

На правах рукописи



РАБАЙА ФУАД

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ АНАЛИЗА И ПРОГНО-  
ЗИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ  
МЕТОДОМ SSA (НА ПРИМЕРЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ И  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ)**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обра-  
ботка информации (в науке и технике)

Научный руководитель:  
ПОРШНЕВ Сергей Владимирович,  
доктор тех. наук, профессор

Диссертация  
на соискание ученой  
степени кандидата технических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2015

## Оглавление

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	4
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	9
1.1. Краткий обзор методов анализа и прогнозирования временных рядов	9
1.2. Метод SSA как средство прогнозирования ВР временных рядов.....	20
1.3. Метод SSA как средство прогнозирования ВР временных рядов.....	24
1.4. Постановка задач исследования.....	28
ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СОБСТВЕННЫХ ТРОЕК И РАЗДЕЛИМОСТИ АДДИТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В МЕТОДЕ SSA .....	29
2.1. Исследование особенностей собственных чисел и собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA гармонического временного ряда .....	29
2.2 Исследование делимости главных компонент детерминированных ВР .....	35
2.2.1. Основные определения и свойства делимости ВР в методе SSA .....	36
2.2.2. Анализ делимости ВР вида «const +изменяющийся во времени ВР».....	38
2.2.3. Анализ делимости ВР вида «cos»+изменяющийся во времени ВР .....	50
2.2.4. Анализ делимости ВР вида «exp » + изменяющийся во времени ВР.....	69
2.3. Исследование особенностей собственных чисел и собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA временного ряда, представляющего собой смесь шума и детерминированного сигнала .....	81
2.3.1. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и постоянной составляющей .....	86
2.3.2. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь шума с равномерным законом распределения и постоянной составляющей.....	91
2.3.3. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и периодической составляющей .....	96

2.3.3. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и тренда.....	107
2.4. Выводы.....	113
Глава 3. Применение метода SSA для анализа и прогнозирования временных рядов .....	114
3.1. Анализ ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ...	114
3.2. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа.....	128
3.3. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности.....	144
3.4. Выводы.....	156
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	157
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	158

## **СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ**

SSA – Singular Spectrum Analysis

АКФ – автокорреляционная функция

АР – авторегрессия

АРМ – авторегрессионная модель

АРСС – авторегрессии скользящего среднего

ВПФР – выборочная плотность функции распределения

ВР – временной ряд

ГК – главные компоненты

ЛРМ – линейная регрессионная модель

МНК – метод наименьших квадратов

СС – скользящее среднее

ФР – функция распределения

**Актуальность темы исследования.** Математические модели, описывающие статистические зависимости между величинами, изменение которых во времени обусловлено факторами (возможно случайными), скрытыми от наблюдателя, являются инструментом исследования сложных систем процессов, протекающих в окружающем нас мире. В большом количестве случаев исходная информация, используемая для построения данных моделей и оценки их адекватности, представляет собой временные ряды (ВР) – последовательности результатов измерений текущих значений одного или нескольких параметров, проводимых в упорядоченные моменты времени. Для объяснения причин того или иного поведения сложной системы или процесса, породивших данный ВР, выявления и объяснения закономерностей их динамики необходимо решить задачу анализа ВР, которые в подавляющем большинстве случаев оказываются нестационарными. Для прогнозирования динамики развития сложной системы или процесса, как правило, на основе результатов анализа ВР решается задача синтеза модели ВР, используя которую вычисляют прогнозируемые значения ВР. В связи с тем, что универсальных методов решения задач анализа и прогнозирования ВР, использование любого метода анализа и прогнозирования ВР требует проведения исследований с целью определения границ применимости, обоснованного выбора параметров данных методов и оценивания точности получаемых результатов. В этой связи тема исследования является актуальной.

**Степень разработанности темы исследования.** Анализ методов обработки данной информации позволяет разделить их на две группы: статистические методы, призванные либо по имеющимся данным находить оценки распределения, вид которого априори известен, или проверять статистическую гипотезу относительно вида распределения либо количественно описывать связи между величинами, как правило, находящимися в неочевидной функциональной связи; а также статистические методы анализа ВР, основанные, по сути, на использовании тех или иных математических моделей ВР и идентификации параметров данных модели на основе имеющихся экспериментальных данных.

В основу первой группы статистических методов положено априорное предположение о том, что генеральная совокупность изучаемой генеральной величины существует. Однако оно не выполняется для нестационарных процессов и процессов, физическая природа которых неизвестна, так как каждое значение анализируемого ВР оказывается принадлежащим другой генеральной совокупности, при этом оценка параметров распределения по одному значению случайной величины оказывается невозможной.

Среди основных методов анализа ВР, относящихся ко второй группе, следует отметить: методы выделения тренда (временного сглаживания), регрессионный, автокорреляционный, адаптивный (скользящих средних) будстреп (численного размножения выборок), нейросетовой метод. Необходимо отметить, что применимость данных методов корректно обоснована только для стационарных ВР, в то время как подавляющее большинство ВР, встречающихся на практике, оказывается нестационарными. Поэтому асимптотические критерии, гарантирующие увеличение точности оценок моделей ВР с увеличением

объема используемой выборки (за исключением случая, когда априори известно его функциональное описание), оказываются несостоятельными с точки зрения увеличения точности прогноза и, как следствие, требуют дополнительных проверок точности получаемых результатов.

Следует также отметить, что сегодня существует ряд методов анализа случайных ВР, которые не требуют предположения о стационарности анализируемого ВР, в том числе: вейвлет-преобразование (Meyer Y., Coifman R., Daubechies I., Coifman R., Новиков И.Я., Стечкин С.Б., Петухов А.Б. и др.); преобразование Хуанга-Гильберта (Huang N. E., R. C. Sharpley, V. Vatchev, Tao Q., Zhang L. и др.); метод сингулярного спектрального анализа (Singular Spectrum Analysis – SSA) (Elsner J., Tsonis A., Hassani H., Schoellhamer D.H., Данилов Д.Л., и Жиглявский А.А., Голяндина Н.Э. и др.). При этом метод SSA позволяет не только проводить анализ, но и решает весьма актуальную практически важную задачу прогнозирования нестационарных ВР, в связи с чем исследование данного метода, призванное научно обосновать рекомендации по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании нестационарных ВР, а также получить соответствующие оценки точности характеристик прогноза, является актуальным.

**Объект исследования:** метод сингулярного спектрального анализа (SSA).

**Предмет исследования:** одномерный ВР, представляющий собой последовательность чисел  $F_N = (f_0, f_2, \dots, f_{N-1})$ .

**Цель диссертационной работы:** исследование метода SSA с целью разработки научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода при анализе и прогнозировании нестационарных ВР и их проверки на примере геофизических и экономических ВР.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **основные задачи исследования:**

1) Разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР.

2) Экспериментальная апробация разработанных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных геофизических и экономических ВР.

3) Разработка алгоритма оценки точности прогнозирования нестационарных ВР методом SSA.

4) Получение количественных оценок точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовых значений цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности (ОРЭМ).

**Методы исследования.** В работе были использованы статистическое моделирование, спектральный анализ, методы теории вероятности, математической статистики, метод SSA.

**Научная новизна полученных результатов.** К основным новым результатам, полученным в диссертации, можно отнести следующие:

1. Обоснован критерий выбора значений параметров метода SSA, обеспечивающих равенство ГК временного ряда, содержащего дискретные значения периодической функции, и гармонических составляющих ряда Фурье.

2. В задаче анализа временного ряда  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ :

2.1. Предложено использовать зависимость разности между соответствующими собственными числами выборочной траекторной матрицы метода SSA, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – размер окна сдвига,  $\Delta t$  – период дискретизации анализируемого временного ряда, позволяющей упростить разделение рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ .

2.2. Уточнены понятия сильной и слабой разделимости рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ .

2.3. На основе статистического моделирования проведено исследование проблемы разделимости ВР вида «шум + const», «шум + периодическая составляющая», «шум + тренд» при различных отношениях сигнал/шум.

3. Предложен алгоритм исследования точности прогнозирования ВР методом SSA.

4. Предложен алгоритм выбора собственных троек траекторной матрицы ВР, используемых для прогнозирования значений ВР.

5. Получено экспериментальное подтверждение целесообразности использования для краткосрочного прогнозирования нестационарных ВР полинома, аппроксимирующего изучаемый ВР, значения которого вычисляются восстановлением исходного ряда по набору собственных троек траекторной матрицы метода SSA, выбираемых в соответствии с предложенным в работе алгоритмом.

#### **Практическая значимость работы**

1. Проведен анализ ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электроэнергии и мощности (ОРЭМ), методом SSA, результаты которых подтверждают целесообразность использования зависимости разности между соответствующими собственными числами выборочной траекторной матрицы метода SSA, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ .

2. Обоснован выбор параметров метода SSA, обеспечивающих наилучшую точность прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен ОРЭМ, методом SSA.

3. Получены оценки точности прогнозирования методом SSA ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ.

#### **На защиту выносятся:**

1. Результаты изучения свойств собственных чисел выборочной траекторной матрицы метода SSA временных рядов вида «периодическая составляющая + периодическая составляющая», «шум + const», «шум + периодическая составляющая», «шум + тренд» и разделимости составляющих данных ВР при различных отношениях сигнал/шум.

2. Результаты анализа методом SSA ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ.

3. Алгоритмы исследования точности прогнозирования ВР методом SSA и выбора собственных троек траекторной матрицы ВР, используемых для прогнозирования значений ВР.

4. Результаты оценки точности прогнозирования методом SSA ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается обоснованным применением методов статистического моделирования, математической статистики, метода SSA, их согласованностью с соответствующими результатами полученными другими известными методами анализа ВР.

#### **Внедрение результатов диссертационного исследования**

Результаты диссертационного исследования использованы в ФГОУ ВПО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина» при подготовке бакалавров и магистров по направлению «Информационные системы и технологии», в ООО », в ООО «Октоника» при разработке информационно-аналитических систем.

#### **Апробация работы**

Материалы работы докладывались на следующих научных конференциях: Международной научно-практической конференции «СВЯЗЬ-ПРОМЭКСПО 2011», Екатеринбург, 2011 г.; Международной научной конференции «Современные телекоммуникационные системы и компьютерные сети: перспективы развития», Санкт-Петербург, 2011 г.; Международной заочной научной конференции «Наука и образование в XXI веке», г. Тамбов, 2012 г.

**Публикации по теме диссертации.** По результатам исследований опубликовано 5 печатных работ, из которых в рекомендованных ВАК РФ периодических изданиях – 2.

**Структура диссертационной работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 118 наименования. Общий объем работы составляет 165 страниц, в том числе 109 рисунков, 9 таблиц.



# ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

## 1.1. Краткий обзор методов анализа и прогнозирования временных рядов

В нашей работе под временным рядом (ВР) (time series) будем понимать последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень состояния и изменения изучаемого явления или системы.

С точки зрения теории вероятностей ВР, представляет собой выборку из генеральной совокупности случайной величины  $\xi$ , характеризующейся одномерной функцией распределения (ФР)  $F(x)$ , представляющей собой вероятность того, что  $\xi$  не превосходит  $x$ :  $F(x) = P(\xi \leq x)$ .

Многомерная ФР вводится аналогично: если  $\xi, x \in R^n$ , то  $F(x) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$ .

Конечномерным распределением процесса  $x(t)$  называется ФР  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  совместного распределения  $n$  случайных величин  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  в моменты времени  $t_1, \dots, t_n$ .

Различают ВР, порожденные стационарными и нестационарными процессами.

Процесс  $x(t)$  называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание  $\mu = M[x(t)]$  не зависит от  $t$ , а автокорреляционная функция (АКФ) процесса  $K(t, t + \tau) = M[(x(t) - \mu)(x(t + \tau) - \mu)] = K(\tau)$  зависит только от разности моментов времени  $\tau$ . Если конечномерное распределение любого количества рассматриваемых случайных величин в любые моменты времени не зависит от времени, процесс называется стационарным в узком смысле [58].

Методы анализа и прогнозирования ВР (time series analysis), активно развиваемые в прикладной математике на протяжении нескольких столетий, в настоящее время исчисляются многими десятками, а количество статей, монографий (см., например, [1, 2, 5, 7, 8, 11–14, 23, 24, 35, 41–43, 46, 50, 58, 60, 75, 80, 83, 87, 89, 92, 97–101, 108–110, 115, 118] и др.), справочников (см., например, [3, 61, 81, 82] и др.) и учебных пособий (см., например, [6, 27, 36–40, 44, 46, 47, 56, 79, 86, 87, 90, 93, 113] и др.), в которых обсуждаются, как теоретические аспекты, так и результаты, получаемые при их практическом применении, – десятками тысяч. (Данное утверждение можно легко проверить с помощью любой поисковой системы в сети Интернет, например, Google, которая в ответ на запрос «Анализ временных рядов», «Прогнозирование временных рядов», находит сотни тысяч страниц, содержащих, в том числе ссылки на опубликованные работы) В этой связи, понятно, что подробный анализ и рассмотрение истории развития данных методов является темой отдельного исследования, которое выходит за рамки данной работы. Поэтому далее мы кратко рассматриваем только наиболее популярные в настоящее время методы анализа ВР: ме-

тод выделения тренда (временного сглаживания), регрессионный, автокорреляционный, скользящих средних, адаптивные методы, метод прогнозирования ВР на основе выборочных распределений [55–59], метод сингулярного спектрального анализа (SSA – Singular Spectrum Analysis) [20–22, 100, 103, 117].

Отметим, что перечисленный выше перечень методов оказывается отнюдь не исчерпывающим. Сегодня также активно развиваются методы, основанные на использовании статистического моделирования на основе имеющихся выборок (численное размножение выборок – бутстреп) и нейросетевой метод, которые находятся за рамками данной работы.

Напомним, что при исследовании ВР, традиционно, принято использовать следующую математическую модель:

$$x(t) = x_{trend}(t) + x_{cycle}(t) + \xi(t), \quad (1.1)$$

где

$x_{trend}(t)$  – тренд или медленно (на данном интервале анализа) изменяющаяся компонента, определяемая долговременной тенденцией изменения ряда признаков;

$x_{cycle}(t)$  – циклическая (сезонная) компонента, отражающая повторяемость исследуемого процесса на определенных промежутках времени;

$\xi(t)$  – случайная компонента, содержащая влияние прочих факторов, скрытых от наблюдателя.

Считается, что теоретически составляющие  $x_{trend}(t)$  и  $x_{cycle}(t)$  могут быть описаны точно, так как они определяются закономерными факторами, описываемыми в рамках детерминированных моделей. Однако, сами детерминированным моделям, являющиеся, в свою очередь, известной идеализацией изучаемых процессов, а потому им имманентно присуща некоторая неточность. В тоже время математическая модель (1.1), несмотря на отмеченную выше ее условность, оказывается весьма полезной на практике для интерпретации результатов статистического анализа ВР.

### **Методы выделения тренда**

Обычно трендовая составляющая ВР оказывается неизвестной точно, но случайной величиной, как анализируемый ВР, в целом. Однако, из априорных соображений рассматриваемую компоненту оказывается возможным описать феноменологически с помощью детерминированных функций. Для описания тренда, традиционно, используются кривые роста [6, 97, 101, 112], которые позволяют описать следующие процессы: 1) без предела роста; 2) с пределом роста без точки перегиба; 3) с пределом роста с точкой перегиба.

Процессы первого типа в основном характерны для абсолютных объемов показателей. Процессы второго типа – для относительных показателей, например, душевое потребление продуктов питания, внесение удобрений на единицу площади, затраты на единицу произведенной продукции и т.п. Процессы третьего типа – например, для описания изменения спроса на новые товары.

Кривые роста, традиционно, описываются полиномиальными или квазиполиномиальными зависимостями, в том числе, с экспоненциальными множителя-

ми, дробно-рациональными и линейно-логарифмическими функциями, а также их композициями. Данный подход, как показывают результаты его практического использования, дает возможность создавать многопараметрические модели, которые с требуемой точностью обеспечивают аппроксимацию исследуемых ВР. В тоже время результаты, используемые при прогнозировании на основе данных моделей далеко не всегда оказываются удовлетворительными, поскольку формально подбираемые аппроксимирующие функции не обязательно отражают реальную зависимость наблюдаемой величины от времени или иных параметров [96, 111, 112]. Закономерно, что в этой ситуации наиболее популярными оказываются более простые, например, линейные модели, в которых связь между несколькими величинами имеет очевидный смысл: при изменении объясняющего параметра на  $\delta_1$  объясняемый параметр изменяется на  $\delta_2$ .

Отметим, что выбор аппроксимирующей функции из условия обеспечения наименьшей дисперсии остатков (разностей между исходным ВР и соответствующими значениями аппроксимирующей функции), отнюдь не всегда приводит к практически полезному результату. Действительно, для того чтобы формально аппроксимировать ту или иную эмпирическую зависимость так, чтобы обеспечить минимум дисперсии остатков, как правило, оказывается достаточным использовать полином достаточно высокой степени. Однако при решении подобной задачи важно помнить, что цель ее решения состоит не столько в решении математической задачи, сколько в качественном описании изучаемого явления с содержательной (физической) точки зрения (см., например, [46, 75]).

Таким образом, один из подходов, используемый при построении моделей ВР, в том числе и нестационарных, основан на использовании параметрического оценивания в выбранном классе функций. В данном подходе предполагается, что после подбора параметров той или иной функциональной зависимости, описывающей трендовую составляющую, и вычитании ее из соответствующих значений анализируемого ВР, получают стационарный временной ряд. (Если ВР, с удаленным трендом, не оказывается стационарным, в смысле строгого математического определения данного понятия, то на практике считают его таковым с доверительной вероятностью достаточной для исследователя.)

Цель описанного выше преобразования переход от нестационарного к стационарному ВР, для которого справедлива теорема Гливленко о сходимости эмпирической функции распределения к ФР генеральной совокупности [58], а также критерия согласия Колмогорова о близости выборочной ФР и ФР генеральной совокупности [78]. Знание ФР генеральной совокупности, в свою очередь, позволяет с известной доверительной вероятностью строить прогноз.

Далее полученный стационарный ВР изучается с помощью методов регрессионного, корреляционного и гармонического анализов, рассматриваемых далее, каждый из которых позволяет создавать некоторые прогностические модели для изучаемого ВР.

### **Линейная регрессионная модель**

Предположим, что в результате наблюдения за случайными величинами  $\xi \in X$  и  $\eta \in Y$  получены ряды значений  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$ , соответственно. Обозначим  $\rho(y, y')$  метрику, используемую в пространстве  $Y$ .

Функцией теоретической регрессии случайной величины  $\xi$  на случайную величину  $\eta$  называется функция  $\varphi: X \rightarrow Y$ , математическое ожидание расстояния  $M[\rho(y, \varphi(x))]$  которой минимально.

Переменная  $x$  называется регрессором (объясняющей переменной), переменная  $y$  – откликом (объясняемой переменной). Если  $X$  и  $Y$  – линейные пространства с евклидовой нормой, то метод нахождения регрессии называется методом наименьших квадратов (МНК). Если зависимость между величинами  $\xi \in X$  и  $\eta \in Y$  предполагается линейной, то такая модель называется линейной регрессионной моделью (ЛРМ).

Далее значения случайной величины  $\eta \in Y$ , вычисленные в соответствии с регрессионной моделью будем обозначать  $\hat{y} = \varphi(x)$ .

Если значения случайных величин  $\xi \in X$  есть множество  $\{x_1, \dots, x_n\}$  и  $\eta \in Y$  – множество  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , то оценки параметров ЛРМ по парам значений  $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$  определяют выборочную прямую регрессии, уравнение которой записывается в виде:

$$\hat{y} - m_{1,y}(n) = a(x - m_{1,x}(n)), \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} m_{1,x}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \\ m_{1,y}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \\ \mu_{2,x}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_{1,x}(n))^2, \\ a &= \frac{\langle \Delta x \Delta y \rangle}{\mu_{2,x}(n)}, \quad \langle \Delta x \Delta y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{1,x}(n))(y_i - m_{1,y}(n)). \end{aligned}$$

Уравнение (1.2) с использованием коэффициента корреляции

$$R_{xy}(n) = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}} \quad (1.3)$$

можно представить в виде связи между нормированными выборочными величинами  $\tilde{x} = \frac{x - m_{1,x}(n)}{\sqrt{\mu_{2,x}(n)}}$  и  $\tilde{y} = \frac{\hat{y} - m_{1,y}(n)}{\sqrt{\mu_{2,y}(n)}}$ :

$$\tilde{y} = R_{xy} \tilde{x}, \quad (1.4)$$

где  $\mu_{2,y}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - m_{1,y}(n))^2$ .

Разность между фактическим значением  $y_i$  и соответствующим значением  $\hat{y}(x_i)$ , вычисляемого в соответствии с (1.2),  $\varepsilon = y - \hat{y}$ , называемая остатками модели, представляет собой некоторый случайный процесс, значения которого могут быть найдены из равенства

$$y_i = m_{1,y}(n) + R_{xy}(n) \sqrt{\frac{\mu_{2,y}(n)}{\mu_{2,x}(n)}} (x_i - m_{1,x}(n)) + \varepsilon_i. \quad (1.5)$$

Ошибка аппроксимации данных ЛРМ (1.5) равняется дисперсии  $\sigma^2$  остатков  $\varepsilon$ :

$$\sigma^2 = \mu_{2,y}(n)(1 - R_{xy}^2(n)). \quad (1.6)$$

Несмещенной оценкой дисперсии остатков является величина  $s^2 = \frac{n\sigma^2}{n-2}$ .

На практике важную роль играет не абсолютная ошибка (1.6) или аналогичная ей ошибка нормированных величин (1.4), но относительная среднеквадратическая ошибка аппроксимации  $\delta$ :

$$\delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\hat{y}_i}{y_i} \right). \quad (1.7)$$

Оценка точности параметров ЛРМ дается следующей теоремой.

**Теорема 1.** (Гаусс, 1809, Марков, 1900) Если значения  $y_1, \dots, y_n$  случайной величины  $\eta$  независимы, то оценки коэффициентов ЛРМ с минимальной дисперсией остатков, определяются формулой (1.2).  $\triangleright$

Теорема 1 для ЛРМ (1.2) позволяет, если известна статистика случайного процесса  $\varepsilon(t)$  построить доверительные интервалы для параметров регрессии. Например, если случайный процесс  $\varepsilon(t)$  имеет нормальное распределение, а  $\xi$

и  $\eta$  не коррелированы, то нормированные величины  $\tilde{y} = \frac{\hat{y} - m_{1,y}(n)}{\sqrt{\mu_{2,y}(n)}}$ , а также

$t = R \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{1-R^2}}$ , где  $R$  – коэффициент корреляции, вычисляемый в соответствии с

(1.4), имеют распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы. Данная информация определяет вероятность, с которой гипотеза об отсутствии корреляции может быть отвергнута. Для нормально распределенных остатков  $\varepsilon(t)$  статистика нормализованных величин выборочной корреляции  $(R - M[R]) / \sqrt{D[R]}$ ,  $D[R]$  – дисперсия коэффициента корреляции, также имеет нормальный закон распределения.

**Авторегрессионные модели**

Математические модели данного типа используются для описания ВР, представляющих собой значения  $\{x_1, \dots, x_N\}$  случайной величины  $\xi$ , когда модуль выборочной автокорреляционной функции (АКФ)  $|A_N(n)|$ , вычисляемой по формуле

$$A_N(n) = \frac{(N-n) \sum_{k=1}^{N-p} x_k x_{k+n} - \sum_{k=1}^{N-n} x_k \sum_{j=1}^{N-n} x_{j+n}}{\sqrt{\left( (N-n) \sum_{k=1}^{N-n} (x_k)^2 - \left( \sum_{k=1}^{N-n} x_k \right)^2 \right) \left( (N-n) \sum_{k=1}^{N-n} (x_{k+n})^2 - \left( \sum_{k=1}^{N-n} x_{k+n} \right)^2 \right)}}, \quad (1.8)$$

оказывается медленно убывающей функцией  $n$  или данная функция оказывается немонотонной на уровне, превосходящем заданный уровень значимости. Другими словами значения  $\{x_1, \dots, x_N\}$  нельзя считать независимыми. Подробный анализ свойств данных моделей можно найти в [52, 97].

Временные интервалы между соседними максимумами АКФ (лаги) ВР, содержащих циклические (сезонные) компоненты, позволяют получить оценки длительностей временных интервалов, на которых отсчеты оказываются зависимыми друг от друга. Величина лага называется порядком  $p$  авторегрессионной модели (АРМ). АРМ аппроксимирует отклонение значения ВР  $x_n$  от выборочного среднего  $m_{1,x}(n)$  в момент времени  $t = n$ , используя для этого  $p$  предыдущих значений ВР:

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + \varepsilon_n, \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon_n$  – белый шум.

Коэффициенты  $a_k$  АРМ являются решением системы уравнений Юла-Уолкера:

$$\begin{pmatrix} A_N(q) & A_N(q-1) & \cdots & A_N(q-p+1) \\ A_N(q+1) & A_N(q) & \cdots & A_N(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N(q+p-1) & A_N(q+p-2) & \cdots & A_N(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_N(q+1) \\ A_N(q+2) \\ \vdots \\ A_N(q+p) \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

На практике обычно используют АРМ, порядок которых не превосходит 5.

При использовании АРМ модели (1.9) для прогнозирования предполагается, что коэффициенты  $a_k$  не зависят от времени. При справедливости данного предположения  $A_N \equiv \text{const}$ ,  $m_{1,x}(N) \equiv m_1 = \text{const}$ .

Формула для вычисления прогнозируемых значений по АРМ первого порядка записывается в следующем виде

$$\hat{x}_n = a_1 x_{n-1} + m_1 (1 - A(1)) = m_1 + A^{n-1}(1)(x_1 - m_1). \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что при прогнозируемые на длительный срок значения ВР будут сходиться к его среднему значению. Следовательно, (1.1) можно использовать для прогнозирования только на один шаг вперед.

Для правильности прогноза АРМ его АКФ, вычисляемая в соответствие с (1.8), должна иметь небольшое число максимумов и достаточно быстро уменьшаться при увеличении сдвига  $n$ . При наличии в анализируемом ВР циклических компонент, полностью исключить из исходного ВР, как правило, не удастся, АРМ используются на этапе качественного анализа ВР. Далее для повышения точности получаемых результатов требуется применять и другие методы анализа ВР.

### Модели скользящих средних

Напомним, предваряя обсуждение модели скользящих средних, теорему Вольда.

**Теорема 2.** (Разложение Вольда) Всякий стационарный процесс  $\xi(t)$  может быть представлен единственным образом в виде суммы некоррелированных между собой процессов

$$\xi(t) = \xi^s(t) + \xi^r(t),$$

где  $\xi^s(t)$  – сингулярный (или детерминированный) процесс,  $\xi^r(t)$  – регулярный (полностью случайный) процесс.  $\triangleright$

Известно [97], что в терминах фильтрации теорема Вольда формулируется следующим образом: всякий стационарный ВР с конечным математическим ожиданием и дисперсией представим в виде

$$x_n = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \varepsilon_{n-k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty. \quad (1.12)$$

где  $\mu$  – среднее значение процесса,  $\varepsilon_n$  – стационарный белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\varepsilon$ .

Процесс, представимый в виде:

$$x_n = \mu + \sum_{k=0}^q h_k \varepsilon_{n-k}, \quad (1.13)$$

называется процессом скользящего среднего порядка  $q$  и обозначается  $CC(q)$ .

Процесс  $CC(q)$  имеет следующие свойства:

$$M[x] = \mu, D[x] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^q h_k^2, A_N(\tau) \Big|_{\tau \leq q} = \sum_{k=0}^{q-\tau} h_k h_{k+\tau}, A_N(\tau) \Big|_{\tau > q} = 0. \quad (1.14)$$

Из (1.14) видно, что модель  $CC(q)$  целесообразно использовать, если выборочная АКФ оказывается близкой к нулю, начиная с определенного значения  $\tau = q$ .

Можно рассматривать (1.13) как операторный полином от оператора  $\hat{L}$ , реализующего сдвиг на один шаг:

$$y_n = x_n - \mu = \sum_{k=0}^q h_k \hat{L}^k \varepsilon_n, \quad (1.15)$$

где  $\hat{L}\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$  и ввести в рассмотрение характеристический многочлен процесса  $CC(q)$ :

$$Y_q(\lambda) = \sum_{k=0}^q h_k \lambda^{q-k}. \quad (1.16)$$

Говорят, что процесс  $CC(q)$  (1.15) обратим, если существует такой процесс фильтрации с коэффициентом  $\psi_k$ , что

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{L}^k y_n. \quad (1.17)$$

Пусть  $\{\lambda_k\}$  – множество различных корней характеристического полинома  $Y_q(\lambda)$ , используя которые можно представить полином в следующем виде

$$Y_q(\lambda) = h_0 \prod_{k=1}^q (\lambda - \lambda_k).$$

Так как норма оператора сдвига  $\hat{L}$  равняется единице, то необходимым условием его обратимости является сходимость по параметру  $\lambda$  разложения в ряд дроби  $1/Y_q(\lambda)$ , которое выполняется, если  $|\lambda_k| < 1$ .

Можно показать [98, 36, 37], что обратным модели  $CC(q)$  является некоторый процесс  $AP(\infty)$ , а обратным к процессу  $AP(p)$  – процесс  $CC(\infty)$ . представление процесса  $AP(p)$  через процесс  $CC(\infty)$  позволяет трактовать последний как декомпозицию Вольда. Отсюда следует, что обратимый процесс  $AP(p)$  является стационарным. Общее решение уравнения (1.9) представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения, являющегося решением системы уравнений Юла-Уокера (1.10) и общего решения однородного уравнения, которое ограничено если корни характеристического уравнения для процесса (1.9) по модулю меньше единицы, что совпадает с условием обратимости процесса  $CC(q)$ . Напротив, если хотя бы один корень имеет действительную часть, равную или большую по модулю единицу, декомпозиция Вольда невозможна, и такой процесс не является стационарным.

Примером нестационарного  $AP$  процесса является так называемое броуновское блуждание, математическая модель которого записывается в следующем виде:

$$y_n = y_{n-1} + \varepsilon_n = y_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n-k}. \quad (1.18)$$

Так как (1.18) можно записать в виде

$$\varepsilon_n = (\hat{L}^0 - \hat{L}^1) y_n,$$

характеристическое уравнение данного представления есть  $1 - \lambda$ , имеющее единственный единичный корень. Математическое ожидание модели (1.18)  $M[y_n] = 0$ , в то время как дисперсия оказывается линейно зависящей от времени:

$$D[y_n] = D\left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_{n-k}\right] = \sum_{k=1}^n D[\varepsilon_{n-k}] = \sum_{k=1}^n \sigma_\varepsilon^2 = n\sigma_\varepsilon^2.$$



Следовательно, при практическом использовании  $AR(p)$  моделей требуется отдельно исследовать проблему единичного корня, в котором проверяется соответствующая статистическая гипотеза с помощью теста Дики-Фуллера [98]. Если гипотеза принимается (единичный корень весьма вероятен), то ряд признается нестационарным и вместо случайного блуждания рассматривают стационарный процесс  $z_n = y_n - y_{n-1} = \varepsilon_n$ . Если первые разности исходного ВР оказываются нестационарными, то переходят ко вторым разностям и т.д. Возвращение от разностей определенного порядка к исходным случайным величинам осуществляется суммированием, вычистившихся переменных, поэтому подобные модели называются интегрируемыми.

В общем случае говорят, что если в результате  $d$ -кратного применения разностного дифференцирования  $x_n^{(d)} = \Delta^d x_n$ , где оператор  $\Delta = 1 - \hat{L}$  действует по правилу  $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ , получился стационарный процесс, то модель относительно  $x_n^{(d)}$  называется интегрируемой моделью порядка  $d$ .

Описанная выше процедура перехода от исходного ВР к конечным разностям порядка  $d$  позволяет исключить полиномиальный по времени тренд, так как разностная производная полинома порядка  $d$  является полиномом порядка  $d-1$ . Однако при наличии в анализируемом ВР других видов трендов данный подход оказывается непродуктивным. В этой ситуации приходится использовать иные методы оценки трендов. При этом от правильности подбора тренда оказываются напрямую зависящими результаты анализа.

Помимо моделей  $AR(p)$  и  $CC(q)$  на практике могут использоваться комбинированные модели  $ARCC(p, q)$ :

$$y_n = x_n - \mu = \sum_{k=1}^p \psi_k \hat{L}^k y_n + \sum_{k=1}^q h_k \hat{L}^k \varepsilon_n, \quad (1.19)$$

также допускающие представление вида  $AR(\infty)$  и  $CC(\infty)$ .

Если процесс  $d$ -кратного применения разностного дифференцирования приводится к процессу  $ARCC(p, q)$ , то данный процесс называют процессом авторегрессии - проинтегрированного скользящего среднего и обозначают  $ARCC(p, q, d)$ .

Основными проблемами использования математических моделей (1.19) на практике являются:

- 1) зависимость коэффициентов  $ARCC(p, q, d)$  модели при ее применении к реальным ВР от времени;
- 2) априори неизвестное распределение ряда остатков  $\varepsilon_n$ ;
- 3) необходимость нахождения временного тренда.

Следует отметить, что одной из наиболее актуальных задач, возникающих при использовании обсуждаемых методов, – выбор порядка моделей. Для ее решения может использоваться, например, информационный критерий Акаике [95] или другие подходы, описание которых, а также ссылки на оригинальные работы приведены в [52].

#### **Адаптивные методы**

Модели, реализующие адаптивные методы, не имеют строгого математического обоснования. Однако данные модели нашли сегодня широкое применение для явно нестационарных процессов [10, 50]. Их отличительной особенностью состоит в том, параметры модели изменяются с течением времени, в зависимости от того насколько удачным или неудачным оказался предыдущий прогноз. Отметим, что здесь процедура подгонки параметров модели принципиально отличается от аппроксимации нестационарного тренда.

Примером адаптивной модели является так называемая взвешенная схема скользящего сглаживания средних, когда в качестве прогнозной оценки  $\hat{x}_n$  принимается взвешенное среднее  $\bar{x}_{WA}(n, m)$   $m$  предыдущих значений анализируемого ВР:

$$\hat{x}_n = \bar{x}_{WA}(n, m) = \frac{\sum_{i=1}^m w_i x_{n-i}}{\sum_{i=1}^m w_i}. \quad (1.20)$$

Весовые множители в (1.20) вводятся, как правило, на основании экспертных оценок относительной важности ранее полученных значений. Обычно весовые множители убывают по мере удаления от правого конца отрезка ВР, использованного для прогнозирования (базовый интервал), т.е. информационная ценность наблюдений считается тем больше, чем ближе к концу базового интервала они находятся.

К другому типу прогнозных моделей относятся параметрические сглаживающие модели, в которых при вычислении прогнозируемого значения  $\hat{x}_{n+1}$  используются не только статистики самого анализируемого ряда, но и несколько спрогнозированных ранее значений, а также оценки тренда, полученные на базовом интервале. К данным моделям относятся модели Брауна, Хольта и Уинтерса [25, 50], как правило, применяемые в задачах с сезонной периодичностью. При этом в зависимости от того, какой порядок имела исходная адаптируемая модель, различают однопараметрические, двухпараметрические и т.д. адаптивные модели, применяемые в большинстве случаев для прогнозирования на один шаг вперед.

Примером одной из простейших однопараметрических адаптивных моделей является следующая модель первого порядка:

$$\hat{x}_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha) \hat{x}_n. \quad (1.21)$$

В (1.21) параметр адаптирует «наивный» прогноз на один шаг вперед (завтра будет как сегодня) на величину рассогласования прошлого прогноза «на сегодня» и сегодняшнего факта. Подобная адаптация называется сглаживанием.

Двухпараметрическая модель Хольта, являющаяся обобщением модели (1.21), описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1} &= y_n + u_n, \\ y_n &= \alpha x_n + (1 - \alpha) \hat{x}_n, \\ u_n &= \beta u_{n-1} + (1 - \beta)(y_n - y_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.22) видно, что в качестве виртуальных переменных для получения прогнозируемых значений  $\hat{x}_{n+1}$  используются сглаженные значения  $y_n$  исходного ряда  $x_n$  и сглаженные значения его тренда  $u_n$ . Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ , входящие в (1.22), называют константами сглаживания. Значение постоянной  $\alpha$  определяет оценку уровня прогноза, постоянной  $\beta$  – тренда.

Выбор указанных параметров оказывается весьма субъективным. Здесь один из возможных подходов – оценивание данных параметров по серии тестовых испытаний с помощью МНК и выбор из них тех значений, которые обеспечивают наилучшую аппроксимацию. Отметим, что в случае нестационарных ВР адаптивные модели типа (1.21), (1.22) требуют весьма тонкой настройки данных параметров, которые исследователь вынужден подбирать вручную, поскольку даже для стационарных ВР оптимальный выбор этих параметров является отдельно достаточно сложной задачей.

### **Прогнозирование ВР на основе выборочных распределений [55–59]**

В данном методе используются следующие понятия.

1. Выборочная функция распределения нестационарного ВР  $f_T(x, t)$  есть ВПРФ, построенную по выборке данных  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-T+1}$ .

2. Расстояние между двумя ВПРФ  $f_1 = f_{T_1}(x, t_1)$ ,  $f_2 = f_{T_2}(x, t_2)$ , вычисляемое по следующей формуле

$$\rho(f_1, f_2) = \|f_{T_1}(x, t_1) - f_{T_2}(x, t_2)\| = \int |f_{T_1}(x, t_1) - f_{T_2}(x, t_2)| dx. \quad (1.23)$$

3. Критерий стационарности ВПРФ, формулируемый следующим образом: ВПРФ  $f_T(x, t)$  нестационарного ВР  $x_n, n = \overline{1, N}$  будем называть  $\theta - \varepsilon$ -стационарной на временном интервале  $\theta$ , если

$$\forall \tau: 1 \leq \tau \leq \theta, \quad \forall t \quad V(T, \tau, t) \leq \varepsilon, \quad (1.24)$$

где

$$V(T, \tau; x, t) = \rho(f_T(x, t + \tau), f_T(x, t)).$$

Основная идея данного метода прогнозирования нестационарных ВР, основанного на анализе выборочных плотностей функций распределения (ВПРФ), состоит в том, чтобы:

1) определить длительность временного интервала, на котором ВПРФ является «стационарной»;

2) получении на основе имеющихся данных оценок средних ВПРФ, построенных по выборка такого же объема, в различные моменты времени;

3) нахождение на основе информации, полученной в п. 2, эмпирического оператора эволюции ВПРФ, аналогичный оператору, входящему в уравнение Лиувилля;

4) определение максимального горизонта прогноза и минимального объема выборки, обеспечивающей данный горизонт прогноза;

5) вычисление с учетом значений максимального горизонта прогноза и минимального объема выборки прогнозируемых ВПРФ;

б) вычисление в соответствии с выбранным функционалом от ВПРФ (например, выборочное среднее значение, наиболее вероятное значение, аргумент наиболее вероятного значения и т.д.) прогнозных значений ВР.

Отдавая должное оригинальности предложенного подхода, нельзя не отметить ряд, существенных, с нашей точки зрения, вопросов, от ответа на которые «ушли» авторы данного метода.

1. Авторы позиционируют данный метод, как метод, предназначенный для анализа нестационарных ВР, однако, его применение к ВР они предваряют процедурами, призванными привести его к стационарному ВР (удаление тренда и т.д.), сведений о работоспособности данного метода, применяемого непосредственно к нестационарному ВР, нам обнаружить не удалось.

2. При оценке точности прогнозирования авторы указывают некоторые конкретные (точечные) значения погрешностей, полученные при выбранной длине окна данных (см. [58, Глава 6, 7, 8]), которая, отнюдь, не является показательной. Действительно, нельзя, априори, гарантировать, что при смещении начальной точки выбранного окна данных в другую точку анализируемого ВР, оценки погрешностей не изменятся, так как, вообще говоря, точность прогнозирования любого ВР, определяется его локальными свойствами. Таким образом, заявленные авторами значения погрешностей прогнозирования некоторых нестационарных ВР методом ВПРФ, относящиеся только к конкретному положению окна данных, не могут характеризовать погрешность прогнозирования рассматриваемым методом.

Отмеченные недостатки, с одной стороны, требуют проведения его дальнейших исследований, которые, однако, находятся за рамками нашей работы, и рассмотрения иных методов, которые, действительно, не требуют стационарности ВР, одним из которых является рассматриваемый далее метод SSA.

## **1.2. Метод SSA как средство прогнозирования ВР временных рядов**

В основании метода SSA [100, 103] (в русскоязычном научном пространстве – метод главных компонент [28], «Гусеница» [20–22, 117]) лежит преобразование одномерного ряда в многомерный с помощью однопараметрической сдвиговой процедуры (отсюда в русскоязычной литературе данный метод получил название «Гусеница») и исследование полученной многомерной траектории с помощью сингулярного разложения и восстановления (аппроксимации) ряда по выбранным главным компонентам. Целью метода является разложение временного ряда на интерпретируемые аддитивные составляющие.

При этом метод не требует стационарности анализируемого ВР, знания модели тренда, а также сведений о наличии в ряде периодических составляющих и их периодах. При таких слабых предположениях метод «Гусеница» может решать различные задачи, такие как, например, выделение тренда, обнаружение периодик, сглаживание ряда, построение полного разложения ряда в сумму тренда, периодик и шума. Важно, что этот непараметрический метод позволяет получить результаты, часто лишь незначительно менее точные, чем многие параметрические методы, в которых используются известные модели ряда (например,  $СС(q)$ ,  $АР(p)$ ,  $АРСС(p,q)$  и др.).

Отметим, что данный метод (под названием метод главных компонент) в 80-х гг. прошлого века активно использовался для анализа ВР, характеризующих состояние различных биологических и гидрологических систем [19, 28–32]. Однако данные работы в более поздних монографиях по непонятной для нас причине их авторы не упоминают.

Кроме этого известны примеры успешного применения метода SSA в астрономических и геофизических задачах [34, 53, 54, 62, 84, 85, 88, 94, 114], технико-экономических задачах [64, 67–69, 72, 103–108]. В тоже время, несмотря на активные исследования данного метода различными авторами, ряд вопросов, связанных с выбором его параметров и интерпретацией полученных результатов, остаются неисследованными. Данный вывод подтверждается, например, работой [18], в которой обсуждаются проблемы оценки погрешностей, возникающих при восстановлении ВР методом SSA.

Приведем, следуя [20], краткое описание базового алгоритма метода SSA. Рассмотрим вещественно-значный временной ряд  $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$  длины  $N$ . Будем считать, что  $N > 2$ . Предположим, что ряд  $F$  – ненулевой, т. е. существует, по крайней мере, одно  $i$ , такое, что  $f_i \neq 0$ . Обычно считается, что  $f_i = f(i\Delta)$  для некоторой функции  $f(t)$ , где  $t$  – время, а  $\Delta$  – некоторый временной интервал. Числа  $0, \dots, N-1$  могут быть интерпретированы не только как дискретные моменты времени, но и как некоторые метки, имеющие линейно-упорядоченную структуру.

Здесь нумерация значений временного ряда начинается с  $i=0$ , а не стандартно с  $i=1$  для удобства обозначений. Базовый алгоритм состоит из двух дополняющих друг друга этапов, разложения и восстановления.

### ***Первый этап: разложение***

#### ***Шаг 1. Вложение***

Процедура вложения переводит исходный временной ряд в последовательность многомерных векторов.

Пусть  $L$  – некоторое целое число (длина окна),  $1 < L < N$ . Процедура вложения образует  $K = N - L + 1$  векторов вложения

$$X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T, \quad 1 \leq i \leq K,$$

имеющих размерность  $L$ . Если нам нужно будет подчеркнуть размерность  $X_i$ , то мы будем называть их векторами  $L$  – вложения.

$X$  – траекторная матрица ряда  $F$ , состоит из векторов вложения в качестве столбцов

$$X = [X_1 : \dots : X_K].$$

Другими словами, траекторная матрица – это матрица

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Очевидно, что  $x_{ij} = f_{i+j-2}$  и матрица  $X$  имеют одинаковые элементы на «диагоналях»  $i + j = \text{const}$ . Таким образом, траекторная матрица является ганкелевой. Существует взаимно-однозначное соответствие между ганкелевыми матрицами размерности  $L \times K$  и рядами длины  $N = L + K - 1$ .

### **Шаг 2. Сингулярное разложение**

Результатом этого шага является сингулярное разложение траекторной матрицы ряда.

Пусть  $S = XX^T$ . Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  собственные числа матрицы  $S$ , взятые в неубывающем порядке ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ), и  $U_1, \dots, U_L$  – ортонормированную систему собственных векторов матрицы  $S$ , соответствующих собственным числам.

Пусть  $d = \max\{i : \lambda_i > 0\}$ . Если обозначить  $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , то сингулярное разложение матрицы  $X$  может быть записано как

$$X = X_1 + \dots + X_d, \quad (1.26)$$

где  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ . Каждая из матриц  $X_i$  имеет ранг 1. Поэтому их можно назвать элементарными матрицами.

Набор  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  называют  $i$ -й собственной тройкой сингулярного разложения (1.26).

### **Второй этап: восстановление**

#### **Шаг 3. Группировка**

На основе разложения (1.26) процедура группировки делит все множество индексов  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_1, \dots, I_m$ .

Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ . Тогда результирующая матрица  $X_I$ , соответствующая группе  $I$ , определяется как

$$X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}.$$

Такие матрицы вычисляются для  $I = I_1, \dots, I_m$ , тем самым разложение (1.26) может быть записано в сгруппированном виде:

$$X = X_{I_1} + \dots + X_{I_m}. \quad (1.27)$$

Процедура выбора множеств  $I_1, \dots, I_m$  и называется группировкой собственных троек.

#### **Шаг 4. Диагональное усреднение**

На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (1.27) переводится в новый ряд длины  $N$ .

Пусть  $Y$  – некоторая  $L \times K$  матрица с элементами  $y_{ij}$ , где  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Положим  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$  и  $N = L + K - 1$ . Пусть  $y_{ij}^* = y_{ij}$ , если  $L \leq K$ , и  $y_{ij}^* = y_{ji}$  – иначе. Диагональное усреднение переводит матрицу  $Y$  в ряд  $g_0, \dots, g_{N-1}$  по формуле

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m, k-m+2}^* & \text{для } 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m, k-m+2}^* & \text{для } L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m, k-m+2}^* & \text{для } K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) соответствует усреднению элементов матрицы вдоль «диагоналей»  $i + j = k + 2$ : выбор  $k = 0$  дает  $g_0 = y_{11}$ , для  $k = 1$  получаем  $g_1 = (y_{12} + y_{21}) / 2$  и т.д. Заметим, что если матрица  $Y$  является траекторной матрицей некоторого ряда  $(h_0, \dots, h_{N-1})$  (другими словами, если матрица  $Y$  является ганкелевой), то  $g_i = h_i$  для всех  $i$ .

Применяя диагональное усреднение (1.28) к результирующим матрицам  $X_{ik}$ , получаем ряды  $\tilde{F}^{(k)} = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)})$ , и, следовательно, исходный ряд  $(f_0, \dots, f_{N-1})$  раскладывается в сумму  $m$  рядов:

$$f_n = \sum_{k=1}^m \tilde{f}_n^{(k)}. \quad (1.29)$$

Основным параметром базового алгоритма SSA является длина окна  $L$ . Выбор длины окна зависит от решаемой задачи и предварительной информации о анализируемом ВР. В общем случае нет универсальных правил и безусловных рекомендаций для выбора длины окна. Однако существуют несколько основных принципов для выбора длины окна  $L$ , которые теоретического обоснования, однако, не имеют [20]. так и практическое обоснование. Так, например, для получения наиболее детального сингулярного разложения траекторной матрицы предлагается использовать длину окна, приблизительно равной половине длины ряда ( $L \sim N / 2$ ). (За исключением рядов конечного ранга, для которых при любом  $L$ , большем, чем ранг ряда  $d$  и  $N > 2d - 1$ , число ненулевых компонент в сингулярном разложении равно  $d$  и не зависит от длины окна.) Отметим, что практическое выполнение данной рекомендации для достаточно длинных ВР, приводит к резкому увеличению времени выполнения вычислений, а также получению заведомо избыточной информации, так как количество собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы, которые должны быть проанализированы равняется  $N/2$ .

Кроме того, авторы рекомендуют для выделения какой-либо составляющей анализируемого ВР или отделения сигнала от шума, использовать соответствующие искомой составляющей собственные тройки сингулярного разложе-

ния траекторной матрицы  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ , далее выполнять их группировку и восстанавливать соответствующую ГК анализируемого ВР. При этом для количественно обоснованной группировки ГК предлагается использовать:

1. Скаттерграммы – зависимости одной главной компоненты от другой главной компоненты. (Здесь используется свойство ортогональности собственных векторов, в силу которого ГК, образующие одну гармонику, на скаттерграмме образуют правильный (выпуклый или звездчатый) многоугольник, возможно несколько искаженный)

2. Значения периодов составляющих выбранных главных компонент, соответствующих главному максимуму их спектральной плотности мощности (СПМ).

3. Зависимость логарифма или корня квадратного из собственного числа траекторной матрицы от его номера.

В тоже время, как показывает опыт применения метода SSA реальных ВР трактовка скаттерграм и зависимостей логарифма или корня квадратного из собственного числа траекторной матрицы от его номера оказывается, особенно, для собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  оказывается далеко не столь очевидной, а их ошибочное использование, как показывает анализ полученных нами результатов, может приводить к возникновению артефактов [65, 66].

В этой связи представляется целесообразным проведение самостоятельных исследований метода SSA, целью которого является:

1) изучение свойств собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ ;

2) самостоятельное исследование делимости аддитивных составляющих ВР;

3) разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе реальных ВР и их экспериментальная апробация.

Отметим, что важность поставленных исследовательских задач подтверждается, в том числе, проводимой в настоящее время разработкой программного комплекса для выделения и прогноза ВР в рамках метода SSA [4].

### 1.3. Метод SSA как средство прогнозирования ВР временных рядов

Предваряя описание алгоритма прогнозирования в соответствии с методом SSA проблем, возникающих при его практическом использовании, отметим, что сегодня накоплен определенный положительный решения подобных задач [20, 22, 26, 33, 45, 48, 64, 91, 100, 103, 106, 107].

Приведем, следуя [20, 103], краткое описание алгоритма рекуррентного прогнозирования. Рассмотрим вещественнозначный ВР  $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$  длины  $N$ . Будем считать, что  $N > 2$ . Пусть  $L$  – некоторое целое число (длина окна),  $1 < L < N$ .

$X$  – траекторная матрица ряда  $F$ , состоящая из векторов вложения  $X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T$ ,  $1 \leq i \leq K$ ,  $K = N - L + 1$ :



$$X = [X_1 : \dots : X_K].$$

Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  собственные числа матрицы  $XX^T$ , взятые в неубывающем порядке ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ),  $U_1, \dots, U_L$  – ортонормированную систему собственных векторов, соответствующих собственным числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  соответственно.

Пусть  $d = \max\{i : \lambda_i > 0\}$ . Если обозначить  $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , то сингулярное разложение матрицы  $X$  может быть записано как  $X = X_1 + \dots + X_d$ , где  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ .

Процедура группировки делит все множество индексов  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_1, \dots, I_m$ .

Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ , тогда результирующая матрица  $\hat{X}_I$ , соответствующая группе  $I$ , определяется как

$$\hat{X}_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}.$$

Такие матрицы вычисляются для  $I = I_1, \dots, I_m$ , тем самым разложение может быть записано в сгруппированном виде:

$$\hat{X} = \hat{X}_{I_1} + \dots + \hat{X}_{I_m}.$$

Проведем ганкелизацию матрицы  $\hat{X}$  (см. формулу (1.28)), получим  $\tilde{X}$  – траекторная матрица некоторого ряда  $\tilde{F} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{N-1})$ :

$$\tilde{X} = \eta \hat{X} = [\tilde{X}_1 : \dots : \tilde{X}_K],$$

где  $\eta$  – оператор ганкелизации.

Обозначим  $\tilde{X}^\nabla$  матрицу, состоящую из первых  $L-1$  компонент матрицы  $\tilde{X}$ ,  $U_1, \dots, U_r$  – ортонормированный базис пространства  $\mathfrak{Z}_r$ , где  $r = \max\{i : \lambda_i > 0\}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $\tilde{X}\tilde{X}^T$ . Рассмотрим линейное векторное пространство  $\mathfrak{Z}_r^\nabla$ , натянутое на векторы  $U_1^\nabla, \dots, U_r^\nabla$ . Пусть  $\pi_i$  – последняя компонента ( $U_{i,L}$ ) вектора  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

Предположив, что  $e_L = (0, \dots, 0, 1)^T \notin \mathfrak{Z}_r$ , получим неравенство  $v^2 = \pi_1^2 + \dots + \pi_r^2 < 1$ . Естественно назвать  $v^2$  коэффициентом вертикальности пространства  $\mathfrak{Z}_r$ . Заметим, что коэффициент вертикальности равняется квадрату косинуса угла между вектором  $e_L$  и пространством  $\mathfrak{Z}_r$ , а следовательно, эта характеристика не зависит от выбора базиса пространства.

Из  $e_L \notin \mathfrak{Z}_r$  следует, что  $r < L$ . Положим

$$R = \frac{1}{1-v^2} \sum_{i=1}^r \pi_i U_i^\nabla, \quad R = (a_{L-1}, \dots, a_1)^T. \quad (1.30)$$

Пусть  $M$  – число точек прогноза.

Определим временной ряд  $G_{N+M} = (g_0, \dots, g_{N+M-1})$  по формуле (4.2):

$$g_i = \begin{cases} \tilde{f}_i & \text{для } i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{j=1}^{L-1} a_j g_{i-j} & \text{для } i = N, \dots, N+M-1 \end{cases} \quad (1.31)$$

Числа  $g_N, \dots, g_{N+M-1}$  образуют  $M$  членов рекуррентного прогноза. Для краткости будем называть рекуррентный прогноз  $R$ -прогнозом.

Пусть  $F_N^{(1)}$  – аддитивная компонента ряда  $F$ , соответствующая выбранным ГК, а  $F_N^{(2)}$  – аддитивная компонента ряда  $F$ , соответствующая оставшимся ГК.

В [20, 103] авторы дают следующие рекомендации по прогнозированию временных рядов с помощью метода SSA:

- Необходимо правильно выбрать параметры. Поскольку мы должны выбрать длину окна  $L$ , обеспечивающую достаточно хорошее качество разделимости, и выбрать набор собственных троек, соответствующих ряду  $F_N^{(1)}$ , то все основные правила для SSA как метода анализа временного ряда остаются в силе. Заметим, что в данном случае нам необходимо отделить ряд  $F_N^{(1)}$  от  $F_N^{(2)}$ , но мы не нуждаемся в полном разложении всего ряда  $F = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ .

- Результаты прогноза существенно зависят от начальных данных. Не считая числа  $M$  шагов прогноза, к формальным параметрам алгоритма SSA-прогнозирования относят длину окна  $L$  и набор  $I$  собственных троек, описывающих ряд  $F_N^{(1)}$ . Эти параметры определяют как прогнозирующую ЛРФ (4.1), так и начальные данные для применения этой ЛРФ.

- Минимальное число выбираемых собственных троек равно  $d$ . Линейное пространство  $\mathfrak{S}_r$  размерности  $r$ , определяющее прогнозирующую ЛРФ, является линейной оболочкой собственных векторов из выбранных собственных троек. Так как условие  $r \geq d$  должно быть выполнено, число собственных выбираемых троек, соответствующих ряду  $F_N^{(1)}$ , должно быть не меньше чем  $d$ .

- К выбору  $I$  собственных троек, описывающих ряд  $F_N^{(1)}$ , необходимо относиться очень внимательно. При анализе ряда с помощью SSA, если мы дополним множество правильно выбранных собственных троек некоторыми лишними собственными тройками с маленькими сингулярными значениями, то результат восстановления существенно не изменится. Если же мы имеем дело с прогнозом, то такое действие может вызвать сильное изменение пространства  $\mathfrak{S}_r$ , его размерность увеличится и, как следствие, ЛРФ прогноза также изменится. Все это может привести к кардинальному изменению прогноза. Заметим, что величины дополнительных сингулярных значений в этом случае не важны.

- Значение коэффициента вертикальности  $v^2$  равно квадрату косинуса угла между пространством  $\mathfrak{S}_r$  и вектором-ортом  $e_L$ . Условие  $v^2 < 1$  является необходимым для возможности прогнозирования. Если величина  $v^2$  близка к 1, то, в силу (1.3), коэффициенты прогнозирующей ЛРФ будут большими и, следовательно, некоторые корни характеристического полинома также будут большими по модулю. Если ожидаемое поведение значений прогноза не предполагает

резкого возрастания или убывания, то большие значения коэффициента вертикальности говорят о возможных проблемах, которые могут возникнуть, в частности о возможной неустойчивости прогноза. Такая ситуация, скорее всего, означает, что были выбраны лишние собственные тройки.

• Важно проверять последние точки восстановленного ряда, в частности, сравнивать их с ожидаемым поведением, так как метод SSA-прогнозирования в качестве начальных данных использует последние значения  $\tilde{f}_{N-L+1}, \dots, \tilde{f}_{N-1}$  восстановленного ряда  $\tilde{F}$ . В силу свойств диагонального усреднения последние (и первые) члены ряда  $F_N^{(1)}$  обычно восстанавливаются с меньшей точностью по сравнению с серединой ряда. Этот эффект может вызвать увеличение ошибок прогноза.

• Необходимо обеспечивать устойчивость и надежность прогноза. Под устойчивостью и надежностью будем понимать, что малые изменения входных данных не приводят к заметным изменениям результата. В то время как правомерность прогнозирования, основанная на требовании сохранения структуры ряда в будущем, не может быть проверена на основе внутренних свойств временного ряда, устойчивость прогноза поддается некоторой проверке. Упомянем несколько способов такой проверки:

– Изменение начальных данных. Поскольку последние элементы восстановленного ряда могут содержать значительные ошибки, то можно начать прогноз с одной из предыдущих точек. Результаты сравнения прогнозов, начатых с разных точек, также говорят об устойчивости прогноза.

– Изменение длины окна. Если характеристики делимости устойчивы при небольших изменениях длины окна, то можно сравнивать прогнозы при измененных  $L$ .

– Прогнозирование укороченного временного ряда. Укоротим исходный ряд  $F$  удалением нескольких его последних элементов. Если условия делимости устойчивы относительно такой операции, то мы можем сравнивать прогноз укороченного ряда с последними, удаленными точками ряда. Этот способ более объективен, так как в построении прогноза не участвуют те точки ряда, на которых прогноз тестируется. Однако его недостатком является то, что значения в последних (наиболее «недавних») точках ряда не учитываются при построении прогноза.

Таким образом, проанализировав рекомендации авторов, можно сделать вывод о том, что без ответа остаются следующие вопросы связанные с выбором параметров алгоритма прогнозирования ВР методом SSA, в том числе, выбор: точки начала прогноза (параметр  $S$ ), набора собственных троек  $I$ , используемых для прогнозирования, длины прогноза (параметр  $M$ ), значения величины сдвига  $L$ , а также влияние формы ВР на качество прогноза. Кроме того не исследованным остается вопрос о точности прогнозирования алгоритма метода SSA.

В этой связи представляется целесообразным проведение самостоятельных исследований алгоритма прогнозирования метода SSA, целью которого является разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров ме-

тогда SSA при анализе прогнозировании реальных ВР и их экспериментальная апробация.

#### 1.4. Постановка задач исследования

Проведенный анализ современного состояния области исследования показал:

1) Задача анализа и прогнозирования нестационарных ВР является актуальной в различных областях человеческой деятельности.

2) Сегодня, несмотря на наличие большого количества разнообразных методов анализа и прогнозирования ВР, часть из которых доведена до конкретных программных реализаций, не существует универсального метода, адаптированного к особенностям нестационарных процессов.

3) Из рассмотренных в работе методов анализа и прогнозирования ВР, для наиболее перспективным представляется метод SSA, не требующий стационарности анализируемого ВР, который, однако, оказывается несвободным от следующих недостатков:

1. при обработке реальных ВР в ряде случаев возникают проблемы с однозначной идентификацией собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  анализируемого ВР;

2. неправильный выбор собственных троек приводит к возникновению артефактов и затрудняет интерпретацию результатов анализа ВР; сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ ;

3. отсутствуют научно обоснованные рекомендации по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании ВР;

4. отсутствует методика оценки точности значений нестационарных ВР, прогнозируемых в соответствии с методом SSA.

Таким образом, задача совершенствования метода SSA попрежнему остается актуальной. В этой связи представляется целесообразным провести целенаправленные исследования в данном направлении, в том числе решить следующие задачи:

1) Разработать научно обоснованные рекомендации по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР.

2) Провести экспериментальную апробацию разработанных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР.

3) Разработать методику оценки точности прогнозирования нестационарных ВР методом SSA.

4) Получить количественные оценки точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности (ОРЭМ).

## ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СОБСТВЕННЫХ ТРОЕК И РАЗДЕЛИМОСТИ АДДИТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В МЕТОДЕ SSA

В данной главе изучены следующие вопросы метода SSA:

- 1) особенности собственных чисел и собственных векторов выборочной траекторной матрицы;
- 2) разделимость аддитивных составляющих ВР, представляющих собой сумму дискретных значений периодических функций с кратными и некратными частотами;
- 3) разделимость ВР, представляющих собой сумму дискретных значений периодических функций и шума;
- 4) разделимость ВР, представляющих собой сумму дискретных значений периодических и различных видов тренда (линейный, квадратичный, полиномиальный, экспоненциальный).

Приведено научное обоснование границ применимости данного метода.

### 2.1. Исследование особенностей собственных чисел и собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA гармонического временного ряда

Из приведенного в Главе 1 описания метода SSA, очевидно, что основным управляющим параметром метода является сдвиг  $L$ . При этом отметить, что теоретически обоснованных рекомендаций по выбору значения  $L$ , поэтому на практике руководствуются опытом, имеющимся у конкретного исследователя, или следуют известным феноменологическим рекомендациям, приведенным например, в [21, с. 18]. Здесь предложены следующие интерпретации метода SSA:

- 1) при  $L \ll N$  собственные векторы выборочной траекторной матрицы есть собственные векторы линейных фильтров, а ГК есть результат действия данных фильтров на исходный ВР;
- 2) при  $L \cong N/2$  метод SSA трактуется как метод аппроксимации исходного ВР рядами конечного ранга.

Напомним, что традиционно для анализа как ГК, так и собственных векторов используются двумерные графики, аналогичные фигурам Лиссажу, для построения которых откладываются различные пары собственных векторов или ГК. При этом, как постулируется в [21, с. 10–11], различные пары ГК образуют пары с близкими амплитудами, аналогичные парам синус-косинус в разложении дискретной последовательности в ряд Фурье. При этом теоретическое обоснование, подтверждающее правомерность данного постулата, имеет скорее качественный, нежели количественный характер. Отметим также, что результаты экспериментальных исследований, в которых метод SSA, применялся к анализу ВР, структура которых, априори, неизвестна, с нашей точки зрения, также нельзя считать убедительным доказательством данного постулата.

Отмеченные обстоятельства определяют необходимость проведения целенаправленного исследования свойств собственных чисел и собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA, используя для этого ВР, структура которых изначально известна [70].

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = \sin(2\pi ft)$  ( $f$  – частота сигнала), вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = \sin(2\pi f t_i) = \sin(2\pi f \Delta t(i-1)) = \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

Зависимости логарифмов собственных чисел выборочной траекторной матрицы метода SSA от их номера и собственные векторы, соответствующие каждому из двух первых собственных чисел, для  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$  при различных значений  $L$  представлены на рис. 2.1.

Из рис. 2.1 видно:

1) у рассматриваемой матрицы значимыми оказываются первые два собственных числа, соответствующие им собственные векторы, частоты которых одинаковы, выделяют две ГК, сумма которых – есть единственная составляющая анализируемого ВР;

2) значения собственных чисел выборочной траекторной матрицы метода SSA оказываются зависящими от  $L$ .

Для удобства дальнейшего анализа на рис. 2.2. представлены зависимости собственных чисел от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f$  (здесь: 1 – первое собственное число, 2 – второе собственное число).

Из рис. 2.2 видно, что условие равенства значений собственных чисел выборочной траекторной матрицы метода SSA (параллельности отрезка, соединяющего данные собственные числа оси абсцисс на графике зависимости собственных чисел от их номера) может быть записано в виде

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5k, k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

При невыполнении условия (2.1), значения собственных чисел выборочной траекторной матрицы метода SSA, оказываются отличными друг от друга и, соответственно, диаграммы собственных векторов – от круговых спиралей (рис. 2.3. Слева –  $L = 10$ , справа  $L = 100$ ).

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. При равенстве собственных чисел выборочной траекторной матрицы, номера которых отличаются друг от друга на единицу, выделяемая ГК соответствует периодической функции, дискретные значения которой есть значения анализируемого ВР, однако, обратное не верно – неравенство собственных чисел не означает, их соответствия составляющим ВР с различными частотами, но требует дополнительно анализа (например, спектрального) собственных векторов.

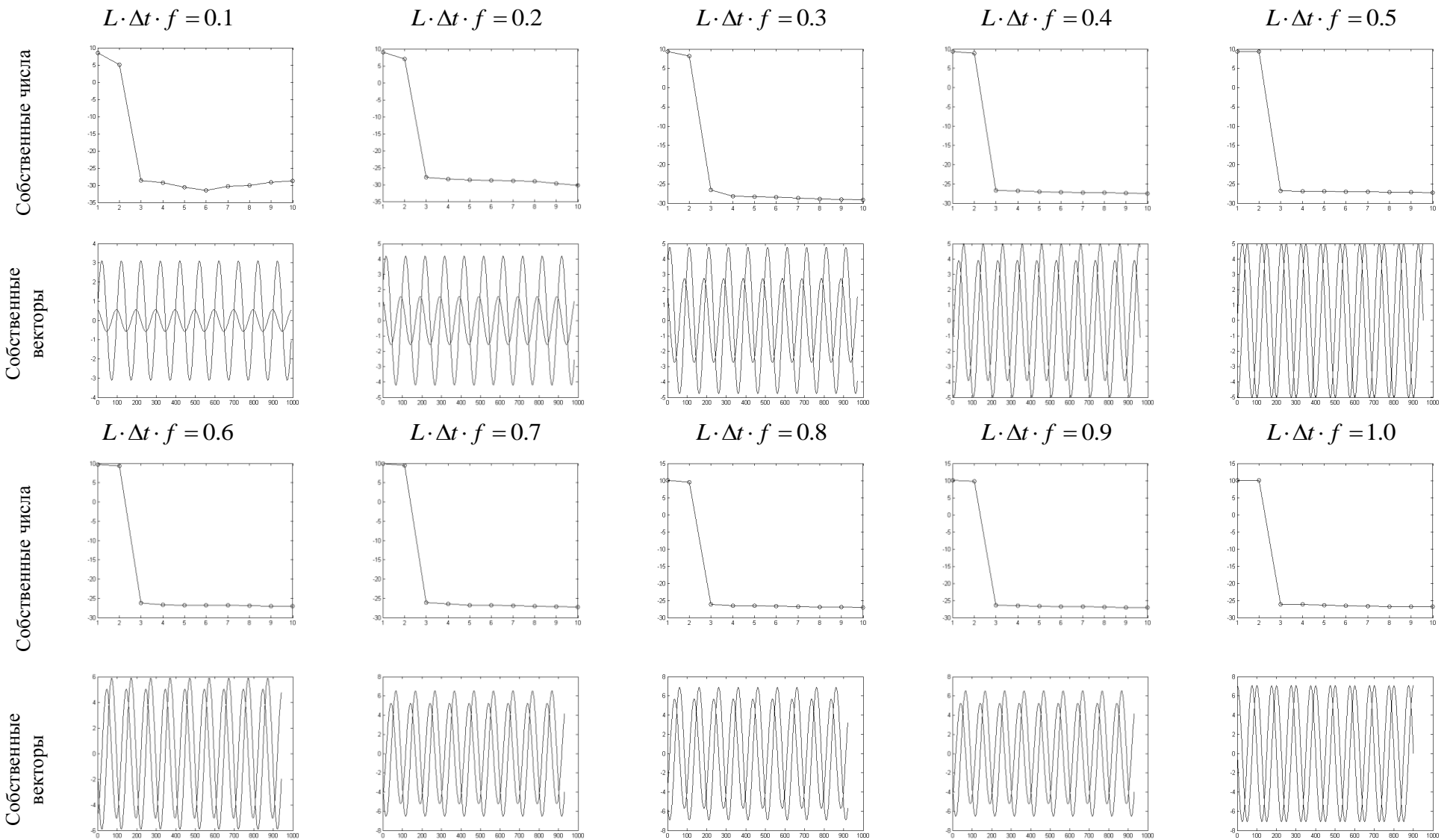


Рис. 2.1. Зависимость логарифма собственного числа от его номера и собственный векторы выборочной траекторной матрицы метода SSA, соответствующие двум первым собственным числам

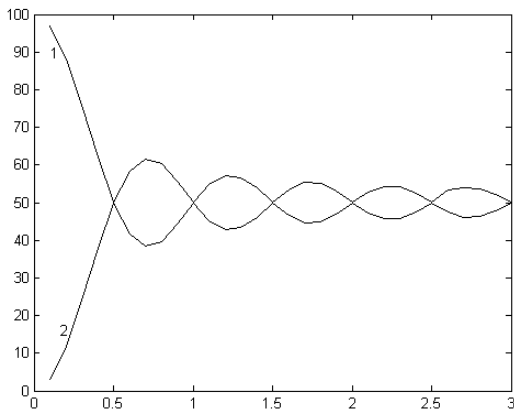


Рис. 2.2. Зависимость значений первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f$

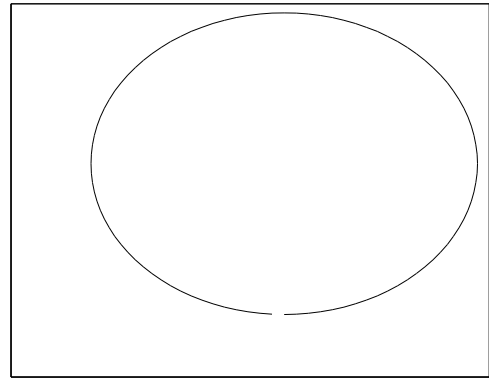
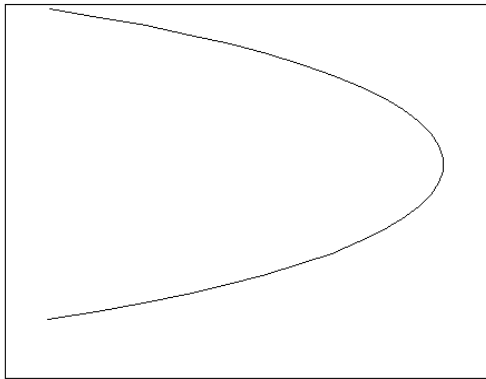


Рис. 2.3. Диаграммы собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA (слева –  $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$ ; справа –  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

2. При анализе ВР, содержащих значения реальных физических процессов, следует использовать не параметр сдвига  $L$ , но физически содержательную величину  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ , имеющую следующий смысл:

- при  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – количество периодов периодической функции с частотой  $f$ , укладывающегося на временном интервале  $L \cdot \Delta t$ ;
- при  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ ,  $n > 1$ ,  $n \notin \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N}$  – множество целых чисел, – целое число периодов и доля периода периодической функции с частотой  $f$ , укладывающегося на временном интервале  $L \cdot \Delta t$ ;
- при  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ ,  $n < 1$ , где  $\mathbb{N}$  – множество целых чисел, – доля периода периодической функции с частотой  $f$ , укладывающегося на временном интервале  $L \cdot \Delta t$ .

3. Для описания зависимости собственных векторов выборочной траекторной матрицы от времени  $x(t), y(t)$  целесообразно использовать следующие математические модели:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x(t) \cos(\omega t + \psi), \\ y(t) &= a_y(t) \sin(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и дополнить алгоритм оценки частоты ГК на основе анализа формы фигуры Лиссажу [2, с. 10] нахождением  $a_1(t), a_2(t)$ , например, с помощью метода аналитического сигнала (АС) [15], и далее умножением выражений (2.2) на множители  $1/a_x(t), 1/a_y(t)$ , соответственно.



Напомним, что по Габору АС  $w(t)$ , соответствующий действительной функции  $u(t)$ , определяется для всех функций, принадлежащих классу  $L^p(-\infty, \infty)$ ,

$$w(t) = u(t) + i\sigma(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}, \quad (2.4)$$

где  $i$  – комплексная единица ( $i^2 = -1$ );  $\sigma(t)$  – сигнал, сопряженный к исходному по Гильберту,

$$\sigma(t) = H(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau;^1 \quad (2.5)$$

здесь  $H(u)$  – оператор, описывающий преобразование Гильберта,  $a(t)$  – амплитуда АС, имеющая физический смысл огибающей сигнала  $u(t)$ :

$$a(t) = \pm |w(t)| = \pm \sqrt{u^2(t) + \sigma^2(t)}. \quad (2.6)$$

Для функций  $u(t), w(t)$  справедливо обратное преобразование:

$$u(t) = H(u) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Можно показать, что существует связь между спектрами исходного сигнала  $u(t) - S_u(\omega)$  и сигнала, сопряженного к исходному по Гильберту,  $\sigma(t) - S_\sigma(\omega)$ :

$$S_\sigma(\omega) = -i S_u(\omega) \operatorname{sgn}(\omega), \quad (2.7)$$

где

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0, \\ -1, & \omega \leq 0. \end{cases}$$

Прямое вычисление сигнала, сопряженного к исходному по Гильберту, согласно (2.5) требует большого объема вычислений, поэтому на практике используют метод, основанный известной на связи спектров исходного и аналитического сигналов:

$$S_w(\omega) = \begin{cases} 2S_u(\omega), & \omega > 0, \\ S_u(\omega), & \omega = 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

непосредственно следующим из (2.4), (2.7).

Из (2.8) видно, что  $\sigma(t)$  можно найти, как мнимую часть обратного преобразования Фурье функции  $S_w(\omega)$ :

$$\sigma(t) = \operatorname{Im} \left( \int_0^{+\infty} S_z(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right). \quad (2.9)$$

Данный алгоритм, являющийся по своей сути линейным, реализуется следующей последовательностью действий.

<sup>1</sup> Интеграл в (2.5) понимается в смысле главного значения по Коши [15].

1. Вычисление спектров собственных векторов  $x(t), y(t)$ , соответственно,  $-S_x(\omega), S_y(\omega)$ .

2. Вычисление по (2.8) спектров аналитических сигналов, соответствующих вектору  $x(t)$ ,  $-S_{\sigma_x}(\omega)$  и вектору  $y(t)$   $-S_{\sigma_y}(\omega)$ .

3. Вычисление в соответствии с (2.9) сигналов, сопряженных векторам  $x(t), y(t)$  по Гильберту, соответственно,  $\sigma_x(t), \sigma_y(t)$ .

4. Вычисление по (2.6) огибающих собственных векторов  $x(t), y(t)$ , соответственно,  $a_x(t), a_y(t)$ .

5. Умножение собственных векторов  $x(t), y(t)$  на множители  $1/a_x(t), 1/a_y(t)$ , соответственно.

Огибающие собственных векторов  $x(t), y(t)$ , полученные с помощью метода АС, для ВР, обсуждавшего в данном разделе выше, для случая  $L = 20$  представлены на рис. 2.4, 2.5.

Результаты обработки собственных векторов, в соответствии с описанным алгоритмом, а также диаграмма нормированных собственных векторов представлены на рис. 2.6–2.8.

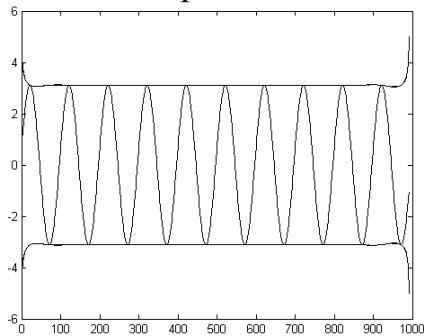


Рис. 2.4. Собственный вектор  $x(t)$ , соответствующий первому собственному числу выборочной траекторной матрицы и его огибающая

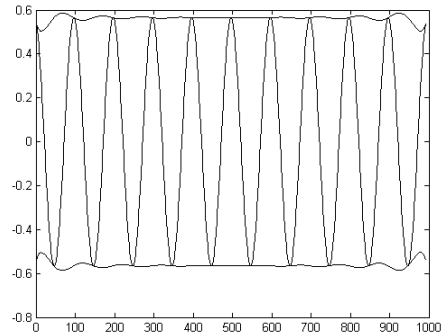


Рис. 2.5. Собственный вектор  $y(t)$ , соответствующий второму собственному числу выборочной траекторной матрицы и его огибающая

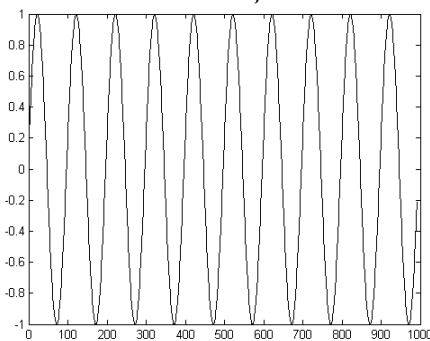


Рис. 2.6. Нормированный собственный вектор  $x(t)$ , соответствующий первому собственному числу выборочной траекторной матрицы

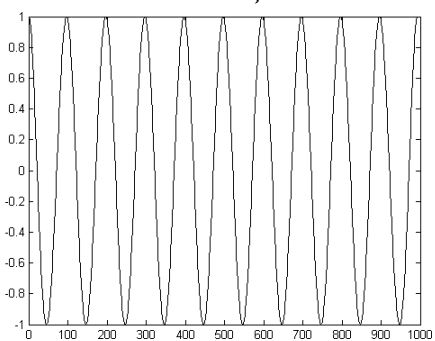


Рис. 2.7. Нормированный собственный вектор  $y(t)$ , соответствующий первому собственному числу выборочной траекторной матрицы

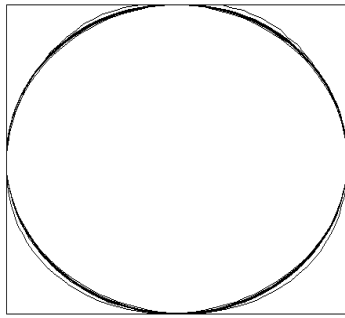


Рис. 2.8. Диаграмма нормированных собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA  
( $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.2$ )

Из сравнения рис. 2.3 и рис. 2.8 видно, что предложенный алгоритм, действительно, повышает однозначность трактовки диаграмм собственных векторов выборочной траекторной матрицы.

Таким образом, результаты применения метода SSA к модельному ВР, представляющему собой отсчеты периодической функции, позволяют сделать следующие выводы:

1. Необходимым и достаточным условием равенства амплитуд ГК, выделяемых из изученного ВР, является выполнение условия (2.1).

2. ГК ВР, содержащего дискретные отсчеты периодической функции  $u(t) = \sin(2\pi f t)$ , оказываются идентичными соответствующим Фурье-гармоникам данного ВР только при выполнении условия (2.1).

3. Диаграммы собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA при невыполнении условия (2.1) и небольших значениях сдвига  $L$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f < 0.5$ ), будут отличаться от круговых спиралей, а потому в этом случае требуется привлечения спектрального анализа собственных векторов или ГК.

4. Для устранения отличия диаграмм собственных векторов от круговых спиралей следует проводить вычисление огибающей собственных векторов в соответствии с методом аналитического сигнала и их нормировку на соответствующую огибающую.

## 2.2 Исследование разделимости главных компонент детерминированных ВР

Задача разделения ГК ВР формулируется следующим образом: определить условия (количество детерминированных функций  $m$  и их вид) для которых возможен выбор такого размера сдвига  $L$ , что можно сгруппировать собственные тройки, так что в результате SSA-разложения получить  $m$  исходных рядов, т.е. восстановить составляющие ряда с помощью сингулярного разложения его траекторной матрицы.

Теоретически вопрос о разделимости составляющих ВР, представляющего собой сумму дискретных отсчетов  $m$  известных детерминированных функций, взятых в одни и те же моменты времени, наиболее подробно исследовался в [21]. Для решения данной задачи автор [21] ввел понятия слабой  $L$ -разделимости, сильной  $L$ -разделимости, приближенной разделимости и асимптотической разделимости составляющих ВР, а также привел без доказательства их свойства. Исходя из целей нашей работы, далее мы приведем их формулировки, следуя [21], и обсудим их свойства более подробно.

### 2.2.1. Основные определения и свойства разделимости ВР в методе SSA

Пусть каждый член ВР длины  $N$   $F_N$  равен сумме соответствующих членов рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ :

$$F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}. \quad (2.10)$$

При выборе величины сдвига, равной  $L$ , каждый из рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  и  $F_N$  порождают соответствующие  $L$ -траекторные матрицы:  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$  и  $X$ .

Обозначим линейные пространства, порожденные столбцами траекторных матриц  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$ , соответственно,  $\mathfrak{Z}^{(L,1)}$  и  $\mathfrak{Z}^{(L,2)}$ . Пространства, порожденные столбцами транспонированных матриц  $(X^{(1)})^T$ ,  $(X^{(2)})^T$ , обозначим, соответственно,  $\mathfrak{Z}^{(K,1)}$  и  $\mathfrak{Z}^{(K,2)}$ ,  $K = N - L + 1$ .

**Определение 2.1.** Будем говорить, что ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы, если  $\mathfrak{Z}^{(L,1)} \perp \mathfrak{Z}^{(K,2)}$  и  $\mathfrak{Z}^{(K,1)} \perp \mathfrak{Z}^{(L,2)}$ .

**Предложение 2.1.** Пусть  $K = N - L + 1$ . Ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} f_k^{(1)} f_m^{(2)} + \dots + f_{k+L-1}^{(1)} f_{m+L-1}^{(2)} &= 0, 0 \leq k, m \leq K - 1, \\ f_k^{(1)} f_m^{(2)} + \dots + f_{k+K-1}^{(1)} f_{m+K-1}^{(2)} &= 0, 0 \leq k, m \leq L - 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что необходимым и достаточным условием разделимости ряда (2.10) слабой  $L$ -разделимости является ортогональность отрезков длины  $L$  ряда  $F_N^{(1)}$  и отрезков длины  $L$  ряда  $F_N^{(2)}$ , а также отрезков длины  $K$  ряда  $F_N^{(1)}$  и отрезков длины  $K$  ряда  $F_N^{(2)}$ .

**Предложение 2.2.** Пусть ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы. Рассмотрим некоторые сингулярные разложения траекторных матриц  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \sum_k \sqrt{\lambda_{1k}} U_{1k} V_{1k}^T, \\ X^{(2)} &= \sum_k \sqrt{\lambda_{2k}} U_{2k} V_{2k}^T, \end{aligned}$$

тогда разложение

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} = \sum_k \sqrt{\lambda_{1k}} U_{1k} V_{1k}^T + \sum_k \sqrt{\lambda_{2k}} U_{2k} V_{2k}^T$$

также является сингулярным.

Таким образом, при слабой  $L$ -разделимости представление ряда в виде (2.10) является естественным с точки зрения разложения его траекторной матрицы  $X$ .

**Следствие 2.1.** Пусть ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы. Тогда существует такое сингулярное разложение траекторной матрицы  $X$  ряда  $F_N$ , что его можно разбить на две части, являющиеся сингулярным разложением траекторных матриц рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ .

В связи с тем, что на этапе разложения базового алгоритма SSA, получают некоторое разложение траекторной матрицы, которое, вообще говоря, не обязано соответствовать  $L$ -разделимости двух рядов, используют усиленное понятие разделимости.

**Определение 2.2.** Если ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы и множество собственных чисел сингулярного разложения траекторной матрицы ряда  $F_N^{(1)}$   $\{\lambda_{1k}\}, k = \overline{1, L}$  не пересекается с множеством собственных чисел сингулярного разложения траекторной матрицы ряда  $F_N^{(2)}$   $\{\lambda_{2k}\}, k = \overline{1, L}$ , то говорят, что ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  сильно  $L$ -разделимы.

**Предложение 2.3.** Пусть ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  сильно  $L$ -разделимы. Тогда любое сингулярное разложение траекторной матрицы  $X$  ряда  $F_N$  можно разбить на две части, являющиеся сингулярными разложениями матриц рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ .

Напомним, что в [21] наряду с понятиями «слабая  $L$ -разделимость» и «сильная  $L$ -разделимость» введены понятия «приближенная разделимость» и «асимптотическая разделимость». Для введения данных понятий автор вводит следующие обозначения.

Для любого ряда  $F_N = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$  положим

$$F_{i,j} = \{f_{i-1}, \dots, f_{j-1}\}, 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Пусть  $F_N^{(1)} = \{f_0^{(1)}, \dots, f_{N-1}^{(1)}\}$ ,  $F_N^{(2)} = \{f_0^{(2)}, \dots, f_{N-1}^{(2)}\}$ .

Для  $i, j \geq 1$  и  $M \leq N - 1 - \max(i, j)$  определим

$$\rho_{i,j}^{(M)} = \frac{(F_{i,i+M-1}^{(1)} F_{j,j+M-1}^{(2)})}{\|F_{i,i+M-1}^{(1)}\| \|F_{j,j+M-1}^{(2)}\|}. \quad (2.13)$$

Здесь  $(\dots)$  – скалярное произведение векторов,  $\|\cdot\|$  – евклидова норма. Если знаменатель в (2.13) равен нулю, то полагают, что  $\rho_{i,j}^{(M)} = 0$ . Значение  $\rho_{i,j}^{(M)}$ , имеющее смысл косинуса угла между векторами  $F_{i,i+M-1}^{(1)}$

В [21] рассмотрен ряд тестовых примеров, иллюстрирующих понятие разделимости ВР, в которых в качестве набора рядов были выбраны следующие ВР:

1) ряд, все значения которого одинаковы (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**const**»);

2) ряд, содержащий последовательные дискретные значения экспоненциальной функции (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**exp**»);

3) ряд, содержащий последовательные дискретные значения функций вида  $\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)$  (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**cos**»);

4) ряд, содержащий последовательные дискретные значения экспоненциальной функций, умноженной на функции вида  $\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)$  (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**exp cos**»);

5) ряд, содержащий последовательные дискретные значения линейной функции или полинома (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**a·k+b**»).

Результаты анализа выше перечисленных ВР, полученные в [21], для представлены в табл. 2.1, в которой пары слабо  $L$ -разделимых рядов помечены знаком плюс.

Таблица 2.1. Точная разделимость

	<b>const</b>	<b>cos</b>	<b>exp</b>	<b>exp cos</b>	<b>a·k+b</b>
<b>const</b>	–	+	–	–	–
<b>cos</b>	+	+	–	–	–
<b>exp</b>	–	–	–	+	–
<b>exp cos</b>	–	–	+	+	–
<b>a·k+b</b>	–	–	–	–	–

Здесь уместно отметить, что при использовании метода SSA для анализа реальных ВР, решается прямо противоположная задача: по вычисленному разложению  $X$  траекторной матрицы ряда  $F_N$  (набору собственных чисел сингулярного разложения, собственным векторам) определить вид в общем случае  $m$  неизвестных детерминированных функций, сумма соответствующих дискретных значений которых определяет значение соответствующего члена ряда  $F_N$ . Другими словами, практический интерес представляет не столько установление факта разделимости временных рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ , сколько исследования возможности установления взаимно однозначного соответствия между вычисленным разложением  $X$  траекторной матрицы ряда  $F_N$  и функциями, определяющими значения членов рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ . В этой связи, представляется целесообразным провести самостоятельное более подробное рассмотрение проблемы разделимости ВР, образованных данными функциями [71].

### 2.2.2. Анализ разделимости ВР вида «const +изменяющийся во времени ВР»

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = c + \sin(2\pi ft)$  ( $f$  – частота сигнала,  $c$  – константа, неравная нулю), вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i - 1), i = \overline{1, N}, \Delta t = T_s / (N - 1), T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + \sin(2\pi f t_i) = c + \sin(2\pi f \Delta t (i-1)) = c + \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

В связи с тем, что в данном тестовом примере нас в первую очередь интересует точность выделения постоянной составляющей анализируемого ВР ( $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ,  $c = 0.2$ ) –  $F_{N_i}^{(1)}$ , на рис. 2.9 представлены зависимости логарифмов собственных чисел выборочной траекторной матрицы метода SSA от их номера, а также компонента ВР восстановленная по ГК, соответствующей третьему собственному числу сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР, при различных значениях сдвига  $L$ .

Из рис. 2.9 видно, что собственные числа выборочной траекторной матрицы метода SSA, соответствующие периодической составляющей ВР, при изменения размера сдвига  $L$ , изменяются аналогично описанию, приведенному в Разделе 2.1.

Компонента ВР, восстановленная по третьей тройке оказывается отличной от постоянной составляющей, заложенной в модель ВР, а степень отличия зависит от размера сдвига  $L$ . Следовательно, для количественного описания отличия восстановленной компоненты от истинной составляющей ВР можно использовать среднее значение компоненты ВР, восстановленной по третьей тройке, зависимость которой от значения параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$  представлена на рис. 2.10.

Из рис. 2.10 видно, что в рассматриваемом случае условием отделимости ряда  $F_N^{(2)}$  от ряда  $F_N^{(1)}$  записывается в виде

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

т.е. на временном отрезке  $L \cdot \Delta t$  должно укладываться целое количество периодов периодической составляющей ВР. Отметим, что данный результат согласуется с [21, С. 17].

В тоже время требование выбора длины интервала анализа ВР такой, чтобы на нем укладывалось целое число периодов ряда  $F_N^{(2)}$ , является избыточным. Данный вывод подтверждает рис. 2.11, на котором представлена зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ВР, для случая когда ряд  $F_N^{(2)}$  представляет собой дискретные отсчеты функции  $u(t) = \sin(2\pi f t)$  ( $f = 10$  Гц,  $T_s = 0.95$  с), вычисленные в узлах координатной сетки  $t_i = \Delta t (i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ . В тоже время значения длительностей интервалов сдвига, при которых обсуждаемая зависимость совпадает с истинным значения постоянной составляющей оказывается отличной от (2.12) – абсциссы точек, соответствующих максимальному значениям рассматриваемой зависимости оказываются равными: 1.0365; 1.9780; 2.8624; 3.8323.

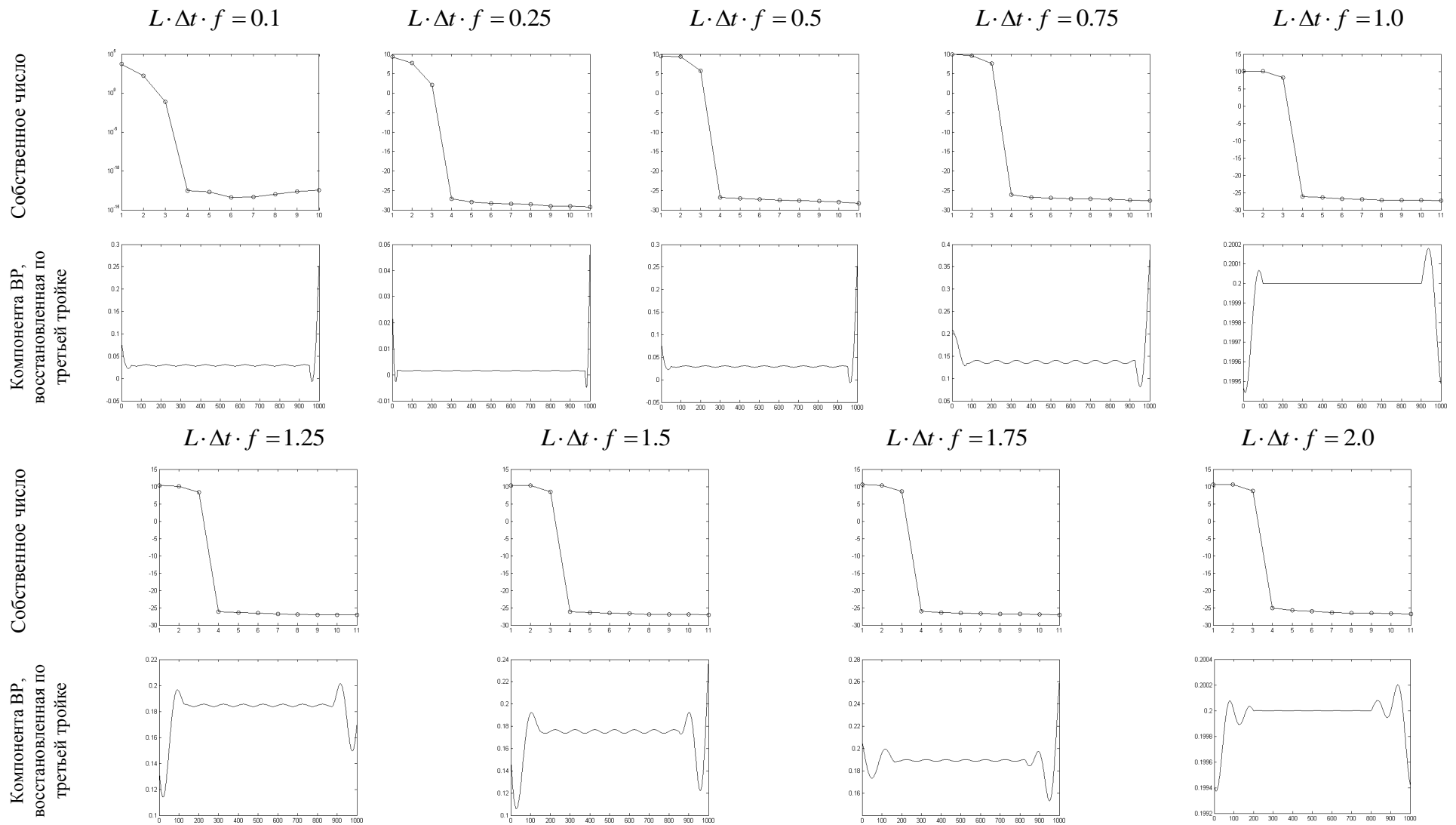


Рис. 2.9. Зависимости логарифма собственного числа о его номера и компоненты BR, восстановленные по третьей собственной тройке  
 $(F_{N_i}^{(1)} = 0.2, i = \overline{1, 1000})$



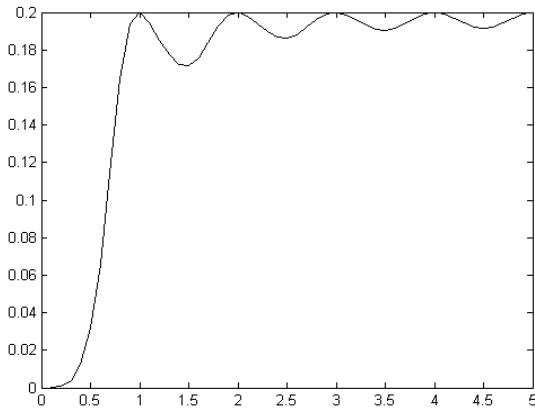


Рис. 2.10. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.2$ ,  $i = \overline{1, 1000}$ ,  $T_s = 1$  с)

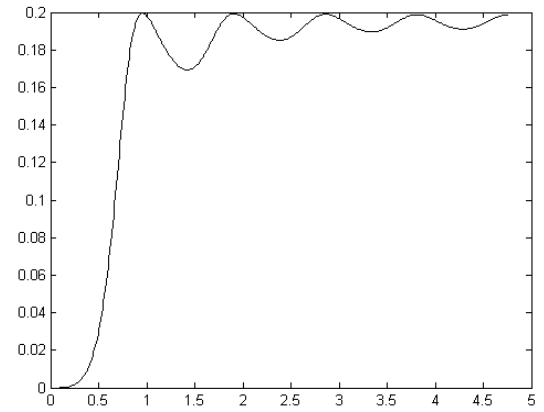


Рис. 2.11. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.2$ ,  $i = \overline{1, 1000}$ ,  $T_s = 0.95$  с)

Из рис. 2.10, 2.11 видно, что условие разделимости рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при  $c < \max(F_N^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  можно сформулировать следующим образом: длина временного ряда  $F_N$  должна быть такой, чтобы на временном интервале  $L_{\max} \cdot \Delta t$ , где  $L_{\max} \leq N/2$ , укладывалось не менее одного периода ВР  $F_N^{(1)}$ .

При  $c \geq \max(F_N^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  первое собственное число выборочной траекторной матрицы метода SSA и компонента ряда  $F_N$ , восстановленная по первой тройке, будут соответствовать ряду  $F_N^{(1)}$ , соответственно, второе и третье собственные числа выборочной траекторной матрицы метода SSA и компонента ряда  $F_N$ , восстановленная по второй и третьей тройке, будут соответствовать ряду  $F_N^{(2)}$  (рис. 2.12).

Зависимости среднего значения ряда  $F_N^{(1)}$  восстановленного по первой тройке для  $T_s = 1$ ,  $T_s = 0.95$ , представлены на рис. 2.13, 2.14, соответственно. Из рис. 2.13, 2.14 видно, что ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  в данном случае оказываются разделимыми при любом значении параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ .

В тоже время значение максимального отклонения значений членов ряда  $F_N^{(1)}$ , выделенного методом SSA из ВР, от его точных значений, оказывается зависящим от длины интервала  $T_s$ , на котором вычислены значения анализируемого ВР: 1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 0.05\%$ ; 2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 1.13\%$ . Отметим, что наибольшим значение максимального отклонения значений членов ряда

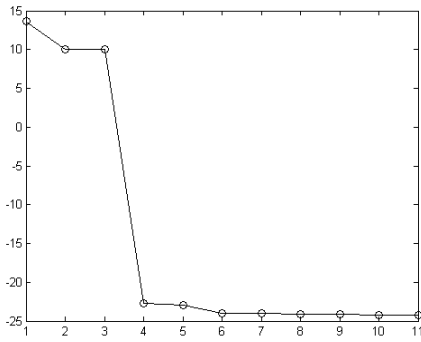


Рис. 2.12а. Зависимость логарифма собственного числа от его номера ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

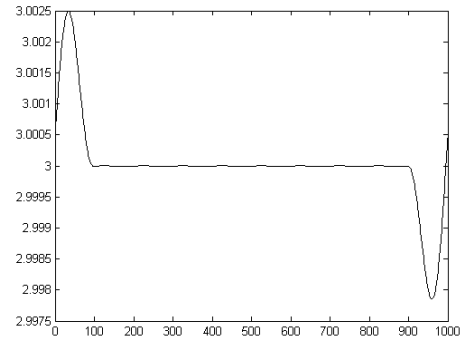


Рис. 2.12б. Компонента ВР, восстановленная по первой тройке ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

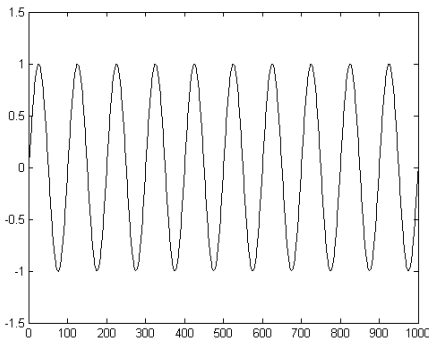


Рис. 2.12в. Компонента ВР, восстановленная по второй и третьей тройкам ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

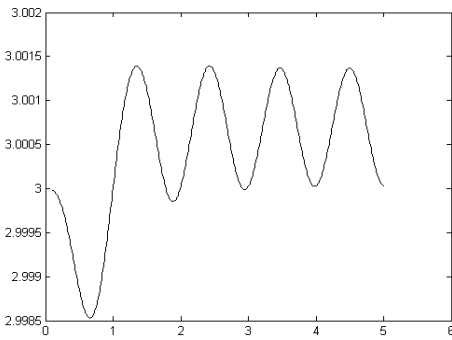


Рис. 2.13. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $T_s = 1.0$  с)

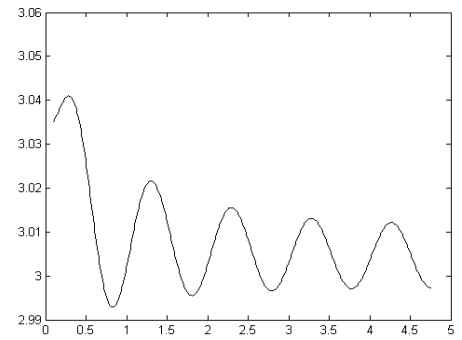


Рис. 2.14. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $T_s = 0.95$  с)

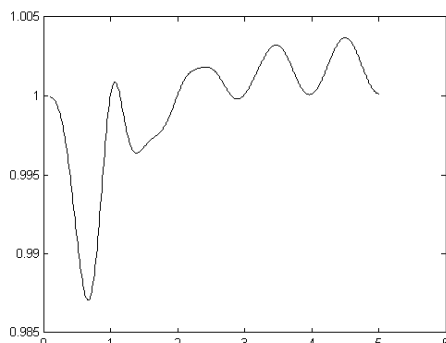


Рис. 2.15. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $T_s = 1.0$  с)

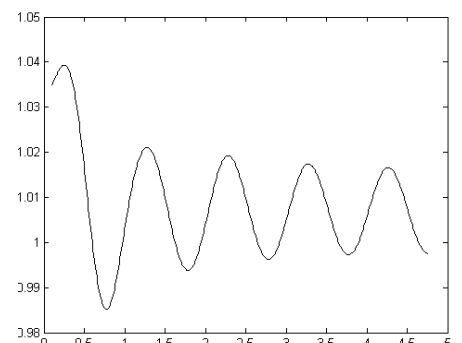


Рис. 2.16. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $i = \overline{1,1000}$ ,  $T_s = 0.95$  с)

$F_N^{(1)}$ , выделенного методом SSA, от его точных значений оказывается для случая когда  $c = \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  (рис. 2.15, 2.16).

Из рис. 2.15, 2.16 видно, что: 1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 1.5\%$ ; 2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 4.0\%$ .

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«exp»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = c + \exp(\alpha t)$  ( $c$  – константа, неравная нулю), вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + \exp(\alpha t_i) = c + \exp(\alpha \Delta t(i-1)) = c + \exp\left(\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

Зависимости логарифма собственного числа от его номера и восстановленная компонента ВР, для случая  $c = 0.3$ ,  $\alpha = -2 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ , по его первой тройке представлены на рис. 2.17–2.20, из которых видно, что ряды  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  в рассматриваемом случае оказываются неразделимыми при любом значении параметра сдвига  $L$ , что соответствует данным [21, С. 16].

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«exp cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = c + \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t), \quad (2.12)$$

здесь  $c$  – константа, неравная нулю, вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + \exp(\alpha t_i) \sin(2\pi f t_i) = \dots \\ &= c + \exp(\alpha \Delta t(i-1)) \sin(2\pi f \Delta t(i-1)) = \dots \\ &= c + \exp\left(\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right). \end{aligned}$$

Отметим, что данный ВР в [Голяндина] отнесен к точно неразделимым рядам, однако,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} u(t) = c + \sin(2\pi f t),$$

следовательно, при малых значениях  $\alpha$  ВР, значения которого вычисляются в соответствие с (2.12), будет аналогичен ряду вида «const» + «cos», а потому

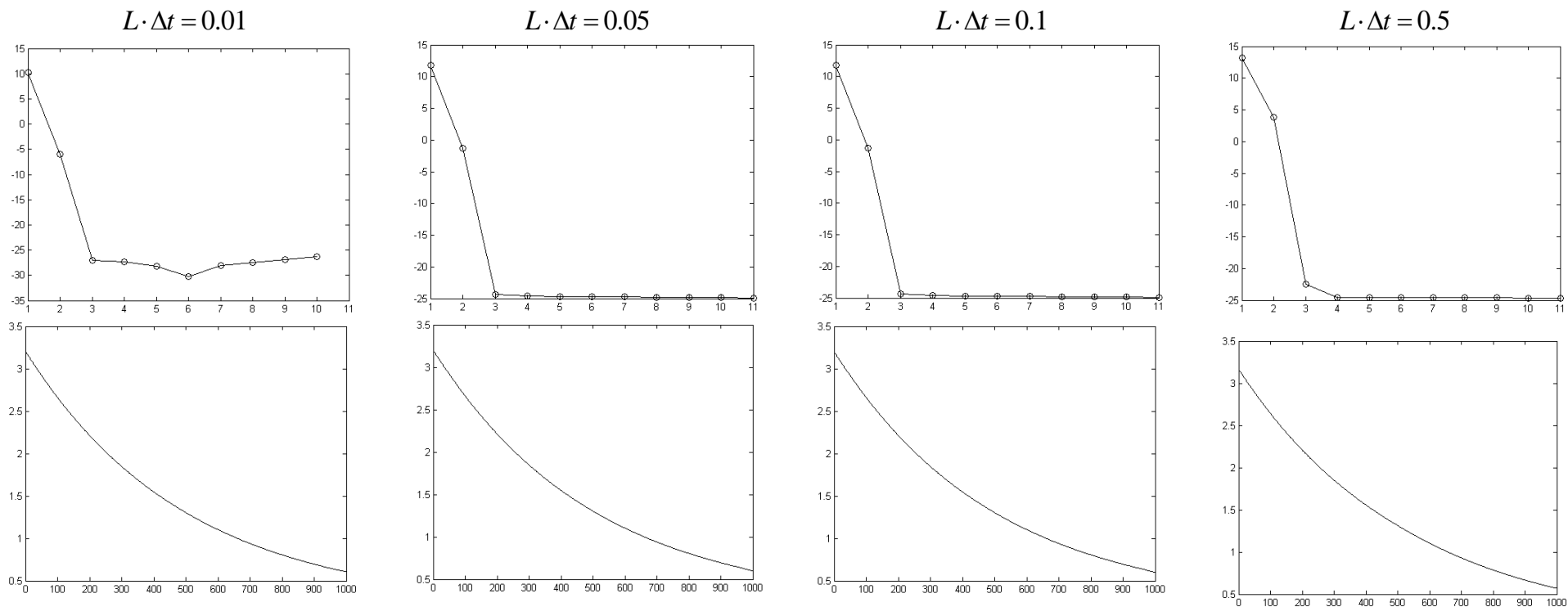


Рис. 2.17. Зависимости логарифма собственного числа о его номера и компоненты BP, восстановленные по третьей тройке ( $F_N^{(1)} = 0.2, \alpha = -2, i = \overline{1, 1000},$ )

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$$

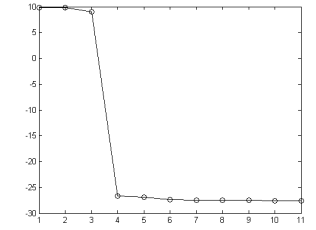
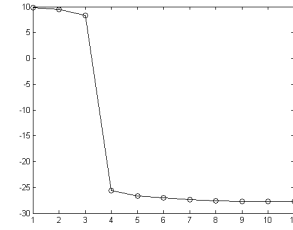
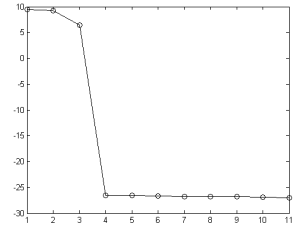
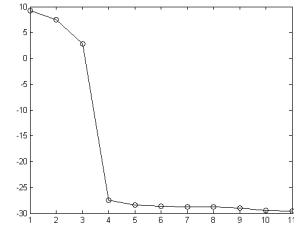
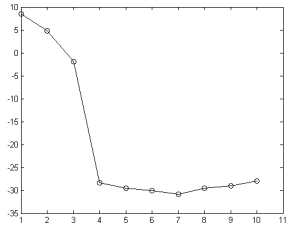
$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.25$$

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$$

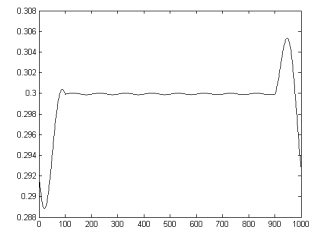
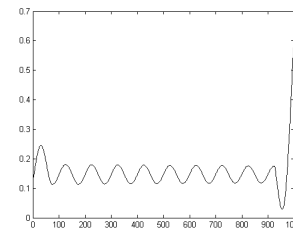
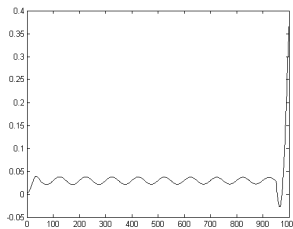
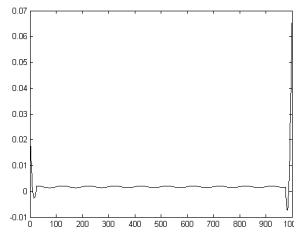
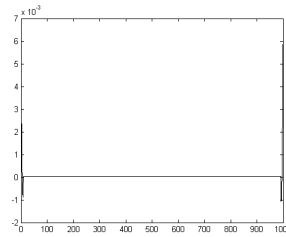
$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$$

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$$

Зависимость логарифма собственного числа от его номера



Компонента ВР, восстановленная по третьей тройке



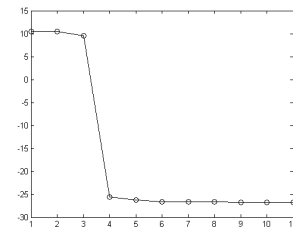
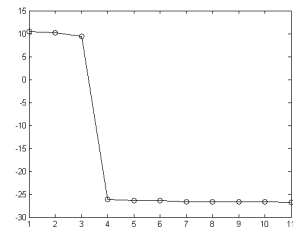
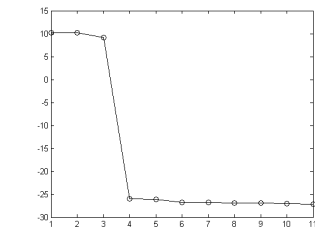
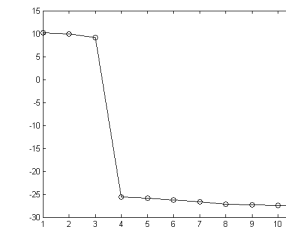
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.25$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

Зависимость логарифма собственного числа от его номера



Компонента ВР, восстановленная по третьей тройке

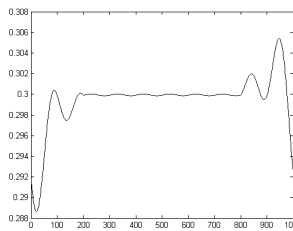
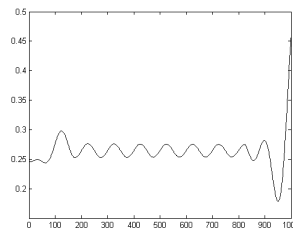
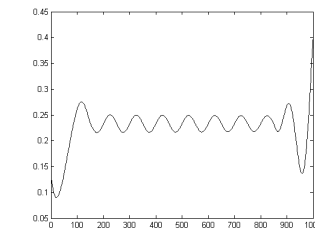
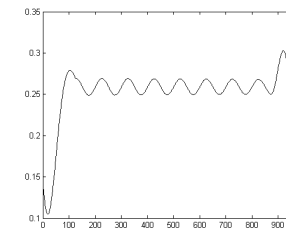


Рис. 2.18. Зависимость логарифма собственного числа от его номера и компонента ВР, восстановленная по третьей тройке ( $\alpha = -0.2$ ,  $c = 0.3$ )

можно ожидать, что ряд в этом случае окажется разделимым, особенно, как показано выше в нашей работе, при  $c > 1$ .

Зависимости логарифма собственного числа от его номера и восстановленная компонента ВР по его третьей тройке, для случая  $c = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ , представлены на рис. 2.18. Из рис. 2.18 видно, что собственные числа выборочной траекторной матрицы метода SSA, соответствующие ВР типа «exp cos», при изменении размера сдвига  $L$ , изменяются аналогично описанию, приведенному в Разделе 2.1.

Компонента ВР, восстановленная по третьей тройке оказывается отличной от постоянной составляющей, заложенной в модель ВР, а степень отличия зависит от размера сдвига  $L$ . Следовательно, как и ранее, для количественного описания отличия восстановленной компоненты от истинной составляющей можно использовать среднее значение компоненты ВР, восстановленной по третьей тройке, зависимость которой от значения параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$  представлена на рис. 2.19.

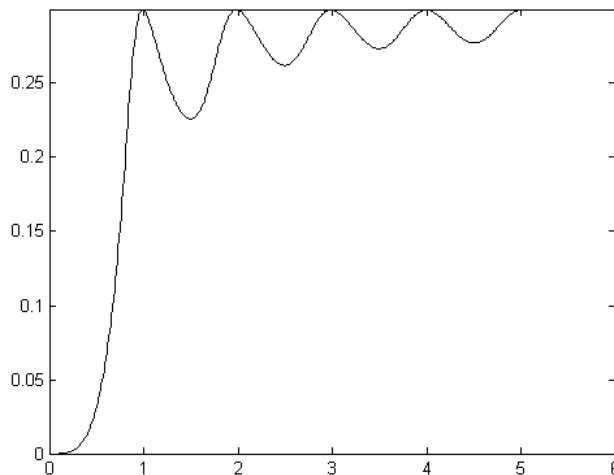


Рис. 2.19. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

Из рис. 2.19 видно, что в рассматриваемом случае условием точной отделимости ряда  $F_N^{(2)}$  от ряда  $F_N^{(1)}$  аналогично условия (2.12).

На рис. 2.20 представлена зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ВР, для случая когда ряд  $F_N^{(2)}$  представляет собой дискретные отсчеты функции  $u(t) = \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t)$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $f = 10 \text{ Гц}$ ,  $T_s = 0.95 \text{ с}$ ,  $\alpha = -0.2$ ), вычисленные в узлах координатной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ . Из рис. 2.20 видно, что значения длительностей интервалов сдвига, при которых обсуждаемая зависимость совпадает с истинным значения постоянной составляющей оказывается отличной от (2.12) – абсциссы точек, соответствующих максимальному значениям рассматриваемой зависимости оказываются равными: 1.0365; 1.9780; 2.8624; 3.8323.

Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке (здесь, как показал анализ собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы ряду  $F_N^{(1)}$  соответствует первая собственная тройка сингулярного разложения траекторной матрицы) от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ВР,

для случая, когда ряд  $F_N^{(2)}$  представляет собой дискретные отсчеты функции  $u(t) = \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t)$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1.0$  с,  $\alpha = -2.0$ ), вычисленные в узлах координатной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$  представлена на рис. 2.21.

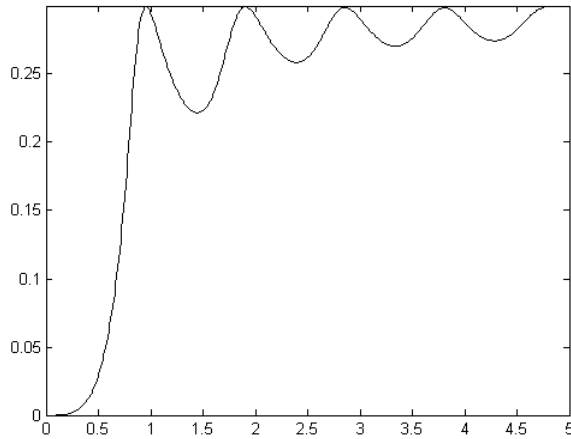


Рис. 2.20. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 0.95$  с)

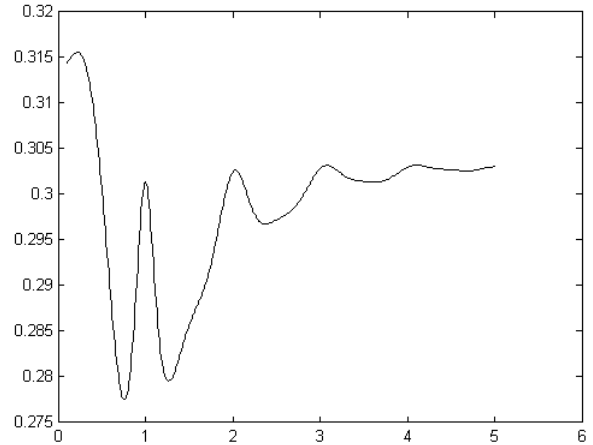


Рис. 2.21. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 1$  с)

Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ВР, для случая когда ряд  $F_N^{(2)}$  представляет собой дискретные отсчеты функции  $u(t) = \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t)$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $f = 10$  Гц,  $T_s = 0.95$  с,  $\alpha = -2.0$ ), вычисленные в узлах координатной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$  представлена на рис. 2.22.

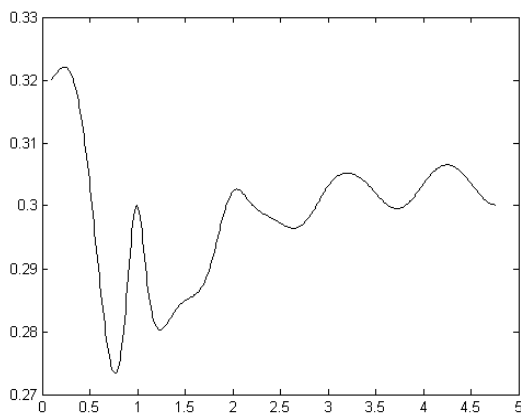


Рис. 2.22. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 0.95$  с)

Из рис. 2.21, 2.22 видно, что при  $L \cdot \Delta t \cdot f > 2$  отличие среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР, отличается от истинного значения постоянной составляющей не более чем на 1.0%.

При  $c \geq \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  первое собственное число выборочной траекторной матрицы метода SSA и компонента ряда  $F_N$ , восстановленная по первой тройке, будут соответствовать ряду  $F_N^{(1)}$ , а второе и третье собствен-

ные числа выборочной траекторной матрицы метода SSA и компонента ряда  $F_N$ , восстановленная по второй и третьей тройке, будут соответствовать ряду  $F_N^{(2)}$  (рис. 2.23).

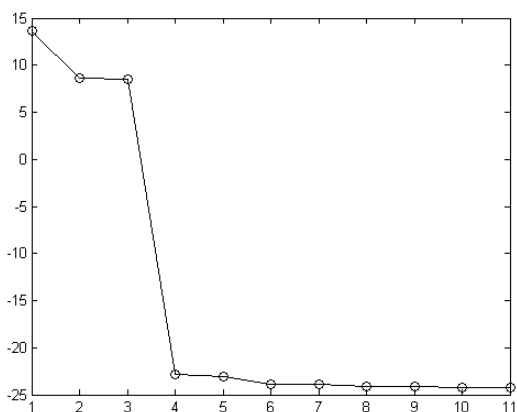


Рис. 2.23а. Зависимость логарифма собственного числа от его номера;  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 1$  с)

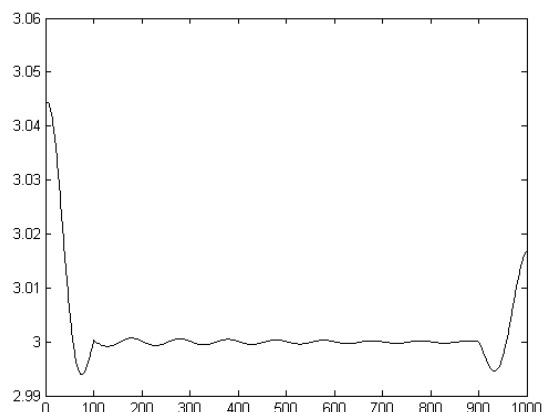


Рис. 2.23б. Компонента ВР, восстановленная по первой тройке ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

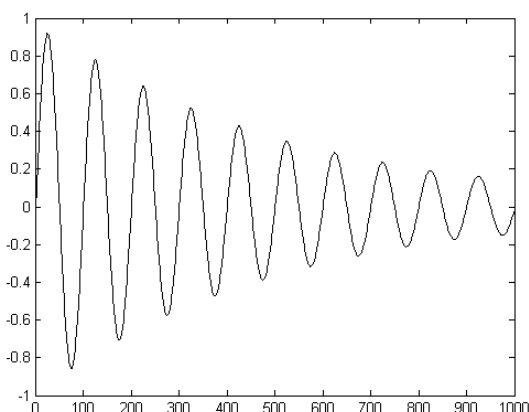


Рис. 2.23в. Компонента ВР, восстановленная по второй и третьей тройкам ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

Зависимости среднего значения ряда  $F_N^{(1)}$  восстановленного по первой тройке для  $T_s = 1$ ,  $T_s = 0.95$  для случая  $F_N^{(1)} = 3.0$  от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$  представлены на рис. 2.24. Зависимости среднего значения ряда  $F_N^{(1)}$  восстановленного по первой тройке для  $T_s = 1$ ,  $T_s = 0.95$  для случая  $F_N^{(1)} = 1.0$  от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$  представлены на рис. 2.25. Из рис. 2.24, 2.25 видно, что ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  в рассматриваемых случаях оказываются разделимыми при любом значении параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ .

В тоже время максимальное отклонение значений членов ряда  $F_N^{(1)}$ , выделенного из ВР с помощью метода SSA из временного ряда  $F_N$ , оказывается зависящей от длины интервала  $T_s$ , на котором вычислены значения анализируемого ВР: 1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 0.05\%$ ; 2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 1.13\%$ . Отметим,



что наибольшее значение обсуждаемая величина достигает когда  $c = \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  (рис. 2.15, 2.16).

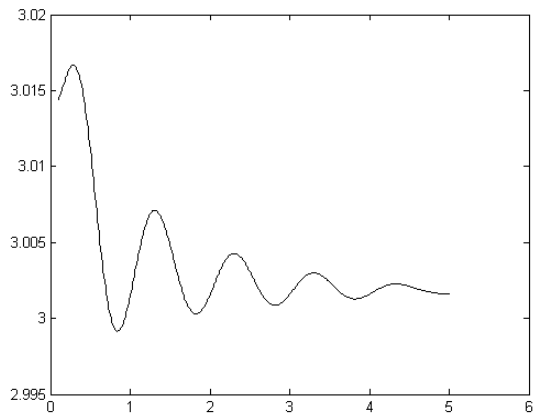


Рис. 2.24а. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 1.0$  с)

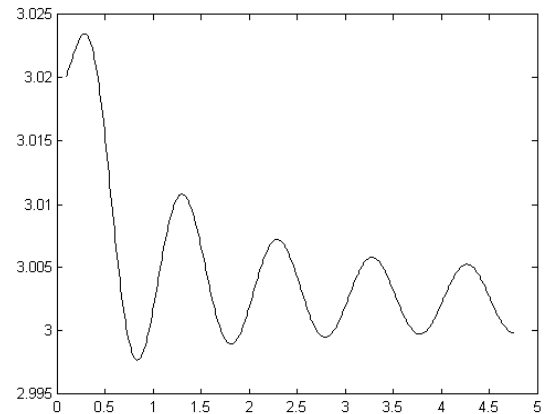


Рис. 2.24б. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 0.95$  с)

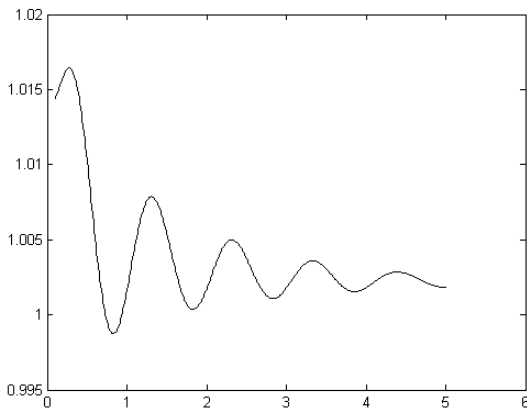


Рис. 2.25а. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 1.0$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 1.0$  с)

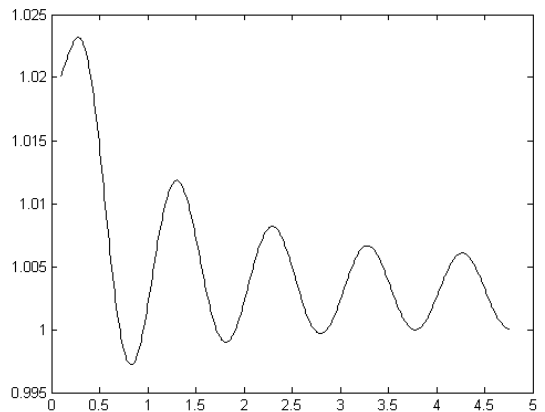


Рис. 2.25б. Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой тройке от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 1.0$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с,  $T_s = 0.95$  с)

Из рис. 2.24, 2.25 видно, что: 1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 1.5\%$ ; 2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 2.5\%$ .

Таким образом, ряды вида «const»+«exp cos»  $L$ -отделимы друг от друга.

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«a·k+b»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = c + (a \cdot t + b), \quad (2.13)$$

здесь  $c$  – константа, неравная нулю, вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + (a \cdot t_i + b) = c + (a \cdot \Delta t(i-1) + b).$$

Пример зависимости логарифма собственного числа от его номера и восстановленной компонента ВР по его первой тройке, для случая  $c \equiv F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $a = 0.3 \text{ с}^{-1}$ ,  $b = 0.5 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ , представлены на рис. 2.26.

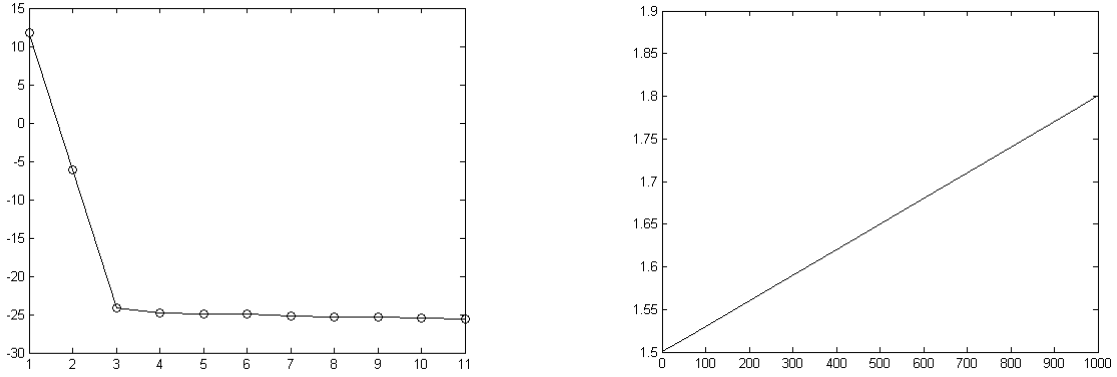


Рис. 2.26. Слева – зависимость логарифма собственного числа о его номера; справа – компонента ВР, восстановленная по первой тройке  
( $c \equiv F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $a = 0.3 \text{ с}^{-1}$ ,  $b = 0.5 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

Результаты проведенных вычислительные эксперименты показывают, что вне зависимости от размера параметра сдвига  $L$ , а также значений параметров, входящих в (2.13), зависимость логарифма собственного числа о его номера, также вид компоненты ВР, восстановленной по первой тройке не меняются. Следовательно, ряды вида «const»+« $a \cdot k + b$ » неразделимы.

### 2.2.3. Анализ разделимости ВР вида «cos»+изменяющийся во времени ВР

#### Анализ разделимости ВР вида «cos» + «cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2). \quad (2.14)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &A_1 \cos(2\pi f_1 t_i + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t_i + \varphi_2) = \dots \\ &A_1 \cos(2\pi f_1 \Delta t(i-1) + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 \Delta t(i-1) + \varphi_2) = \dots \\ &A_1 \cos\left(2\pi f_1 \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(2\pi f_2 \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi_2\right). \end{aligned}$$

#### Случай № 1. $f_2$ кратна $f_1$ , $A_1 \neq A_2$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ ,  $f_1 = 10 \text{ Гц}$ ,

$f_2 = 3f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера, восстановленные компоненты ВР по первой и второй, а также по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы представлены на рис. 2.27.

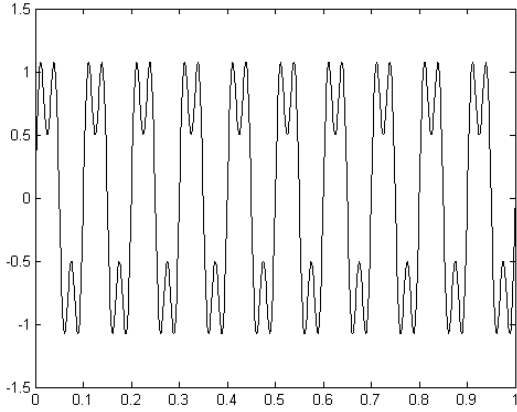


Рис. 2.27а. Анализируемый временной ряд ( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1, L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 3, A_1 = 1, A_2 = 0.5$ )

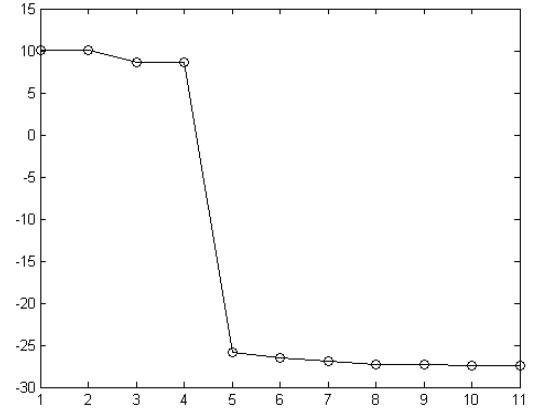


Рис. 2.27б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера

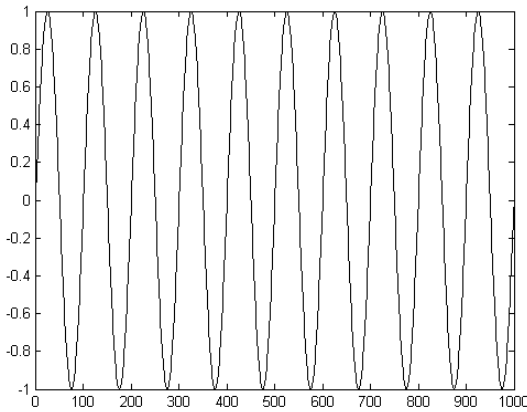


Рис. 2.27в. Составляющая ВР, восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

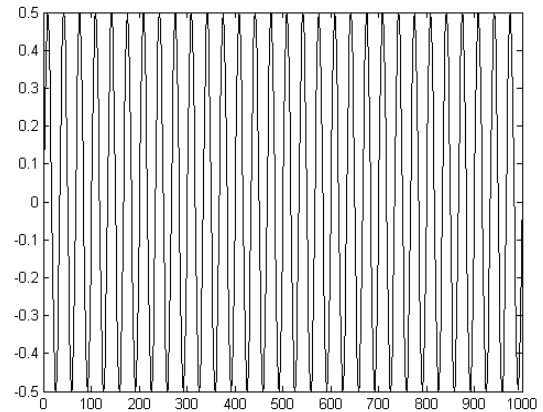


Рис. 2.27г. Составляющая ВР, восстановленная по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

Из рис. 2.27 видно, что первая и вторая тройки сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР, соответствует составляющей ВР с параметрами  $A_1 = 1$ ,  $f_1 = 10$  Гц, третья и четвертая – составляющей ВР с параметрами  $A_2 = 1$ ,  $f_2 = 30$  Гц.

На рис. 2.28 представлены зависимости собственных чисел, выборочной траекторной матрицы ВР, соответствующих первой и второй составляющих анализируемого ВР от величин  $L \cdot \Delta t \cdot f_1, L \cdot \Delta t \cdot f_2$ .

Из рис. 2.28 видно, что условия равенства первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы записываются в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

третьего и четвертого собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР – в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 1.5 + 0.5 \cdot k, k = 0, 1, \dots \quad (2.16)$$

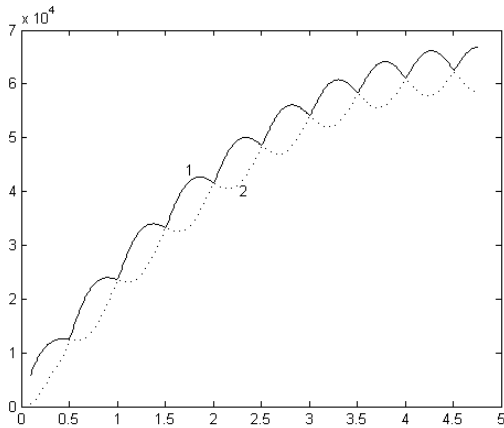


Рис. 2.28а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$

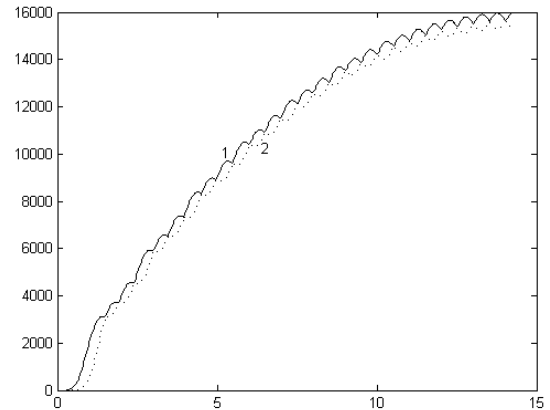


Рис. 2.28б. Зависимости третьего (1) и четвертого (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$

На рис. 2.29 представлены исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 0.5$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f_1 = 10$  Гц,  $f_2 = 3f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость логарифма собственного числа выборочной автокорреляционной матрицы ВР от его номера, восстановленные компоненты ВР по первой и второй, а также по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы.

Из рис. 2.29 видно, что первая и вторая тройки сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР, соответствует составляющей ВР с параметрами  $A_2 = 1$ ,  $f_2 = 30$  Гц, третья и четвертая – составляющей ВР с параметрами  $A_1 = 0.5$ ,  $f_1 = 10$  Гц.

Из рис. 2.27 и 2.29, видно, что в отличие от преобразования дискретного Фурье ВР, состоящего в вычислении амплитуд базисных функции  $e^{-i2\pi f_k t}$ , частоты которых  $f_k$  представляют упорядоченную последовательность

$$f_k = \frac{k}{T_s}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

метод SSA упорядочивает восстанавливаемые компоненты ВР в соответствие со значениями их энергии:

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [F_{N_i}^{(m)}]^2, m = 1, 2,$$

а потому при его использовании требуется проведение дальнейшего спектрального анализа восстановленных компонент с целью определения их частот.

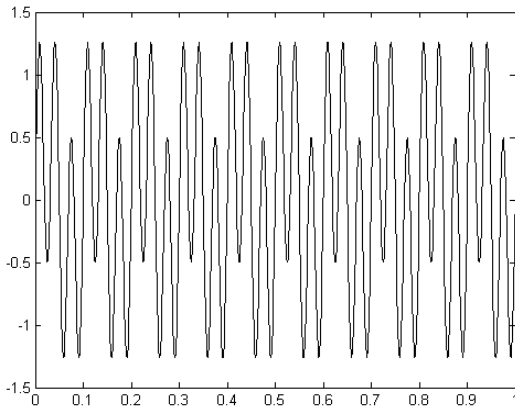


Рис. 2.29а. Анализируемый временной ряд ( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1, L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 3, A_1 = 0.5, A_2 = 1$ )

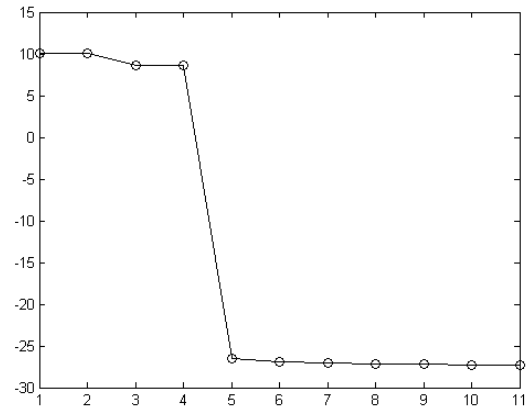


Рис. 2.29б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера

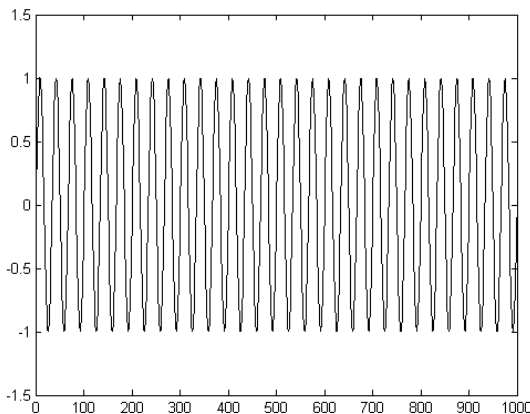


Рис. 2.29в. Составляющая ВР, восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

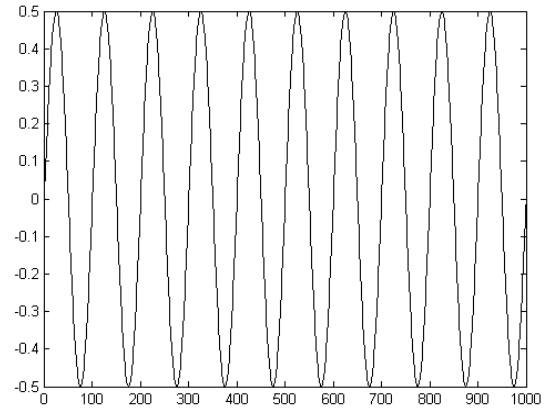


Рис. 2.29г. Составляющая ВР, восстановленная по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

На рис. 2.30 представлены зависимости собственных чисел, выборочной траекторной матрицы ВР, соответствующих первой и второй составляющих анализируемого ВР от величин  $L \cdot \Delta t \cdot f_2, L \cdot \Delta t \cdot f_1$ . Из рис. 2.30 видно, что в рассматриваемом случае условия равенства первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы записываются в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 1.5 + 0.5 \cdot k, k = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

третьего и четвертого собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР – в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Из соотношений (2.15)–(2.16) и рис 2.29, 2.30 видно, что временной интервал между последовательными значениями параметра сдвига  $L$ , при которых собственные значения выборочной траекторной матрицы оказываются максимально близкими, равен  $2L\Delta t$ , следовательно, частота восстановленной составляющей ВР равняется

$$f_{1,2} = \frac{0.5}{L\Delta t}.$$

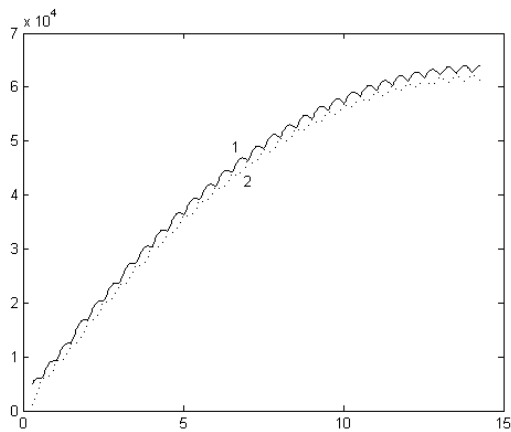


Рис. 2.30а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с

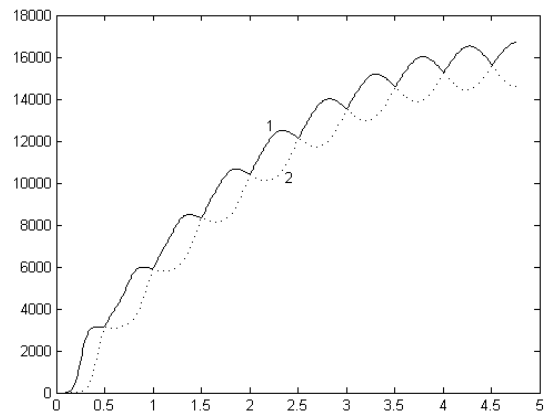


Рис. 2.30б. Зависимости третьего (1) и четвертого (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$ ,  $T_s = 1$  с

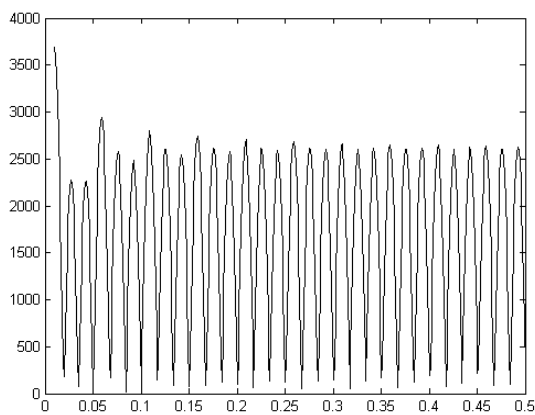


Рис. 2.31а. Зависимость разностей между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР параметра от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1.0$  с

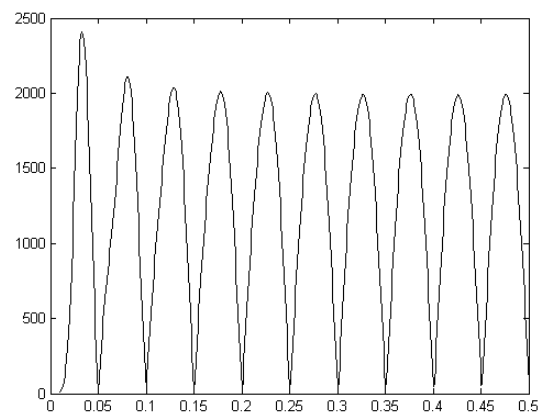


Рис. 2.31б. Зависимость разностей между третьим и четвертым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1.0$  с

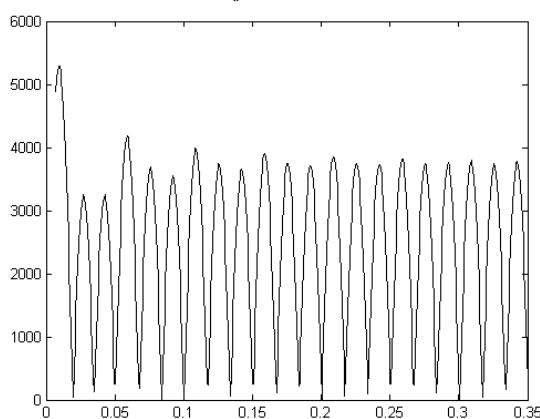


Рис. 2.31в. Зависимость разностей между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 0.7$  с

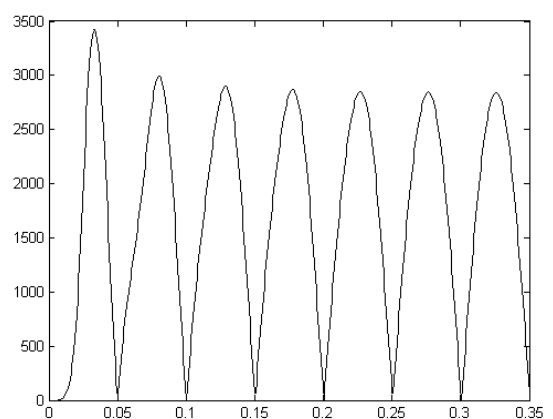


Рис. 2.31г. Зависимость разностей между третьим и четвертым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 0.7$  с

Отметим, что данный результат оказывается независящим от значения произведения  $f \cdot T_s$ , точнее от того целое или нецелое число периодов со-

ставляющей ВР укладывается на интервале анализа. Данный вывод иллюстрирует рис. 2.31, на котором представлены зависимости разностей между первым и вторым, а также третьим и четвертым собственными числами от параметра  $L \cdot \Delta t$  при  $T_s = 1.0$  и  $T_s = 0.7$ .

**Случай № 2.  $f_2$  некратна  $f_1$ ,  $A_1 \neq A_2$**

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ ,  $f_1 = 10$  Гц,  $f_2 = 2.7 f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера, восстановленные компоненты ВР по первой и второй, а также по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы представлены на рис. 2.32.

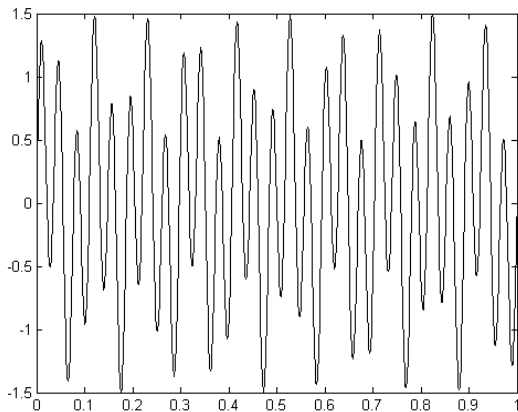


Рис. 2.32а. Анализируемый временной ряд ( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 2.7$ ,  $A_1 = 0.5$ ,  $A_2 = 1$ )

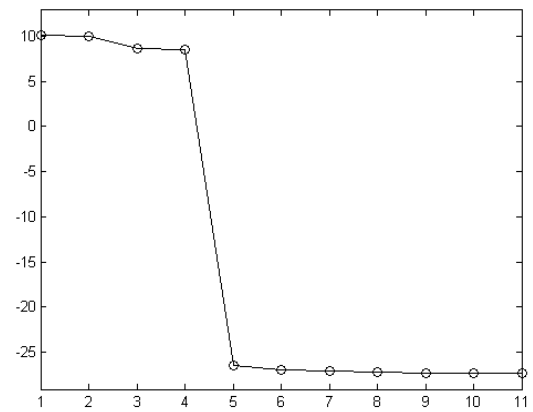


Рис. 2.32б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера

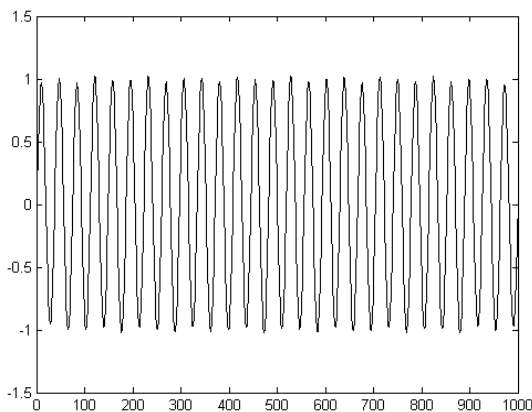


Рис. 2.32в. Составляющая ВР, восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

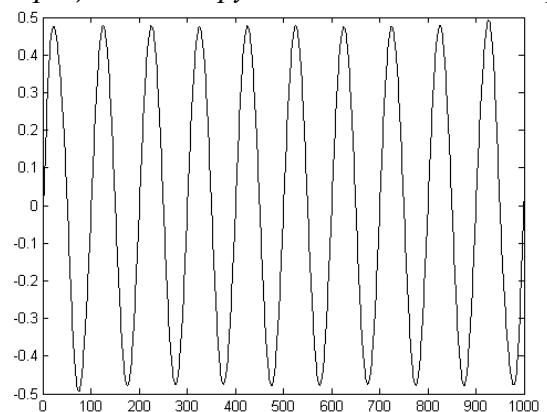


Рис. 2.32г. Составляющая ВР, восстановленная по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

Из рис. 2.32 видно, что первая и вторая тройки сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР, соответствует составляющей ВР с параметрами  $A_2 = 1$ ,  $f_2 = 27$  Гц, третья и четвертая – составляющей ВР с параметрами  $A_1 = 0.5$ ,  $f_1 = 10$  Гц.

На рис. 2.33 представлены зависимости собственных чисел, выборочной траекторной матрицы ВР, соответствующих первой и второй составляющих анализируемого ВР от величин  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$ .

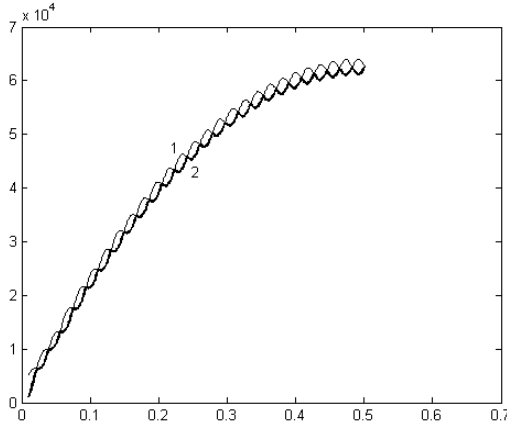


Рис. 2.33а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с

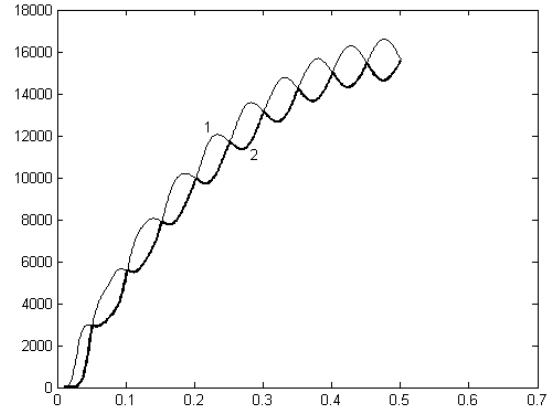


Рис. 2.33б. Зависимости третьего (1) и четвертого (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$ ,  $T_s = 1$  с

На рис. 2.34 представлены зависимости представленные зависимости разностей между первым и вторым, а также третьим и четвертым собственными числами от параметра  $L \cdot \Delta t$  при  $T_s = 1.0$  и  $T_s = 0.7$ .

Сравнивая рис. 2.30 и 2.33, а также 2.31, 2.34, видим, что вне зависимости от кратности частот  $f_1, f_2$  описанная выше зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы от параметра  $L \cdot \Delta t$  остается неизменной. Следовательно, при использовании описанной выше методики оценки частоты составляющих анализируемых ВР, оказывается возможным разделение периодических составляющих ВР, вне зависимости от кратности частот данных составляющих, а также значений параметров  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ . Также необходимо отметить, что данный результат вносит уточнения в условия разделимости обсуждаемых ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ , приведенные в [21, С. 17], которые в наших обозначениях записываются в виде:

$$\begin{aligned} L \cdot \Delta t \cdot f_1 &= l_1, L \cdot \Delta t \cdot f_2 = l_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ K \cdot \Delta t \cdot f_1 &= k_1, K \cdot \Delta t \cdot f_2 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и могут быть, как очевидно, обеспечены только при выполнении условия

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

### Случай № 3. $A_1 = A_2$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f_1 = 10$  Гц,



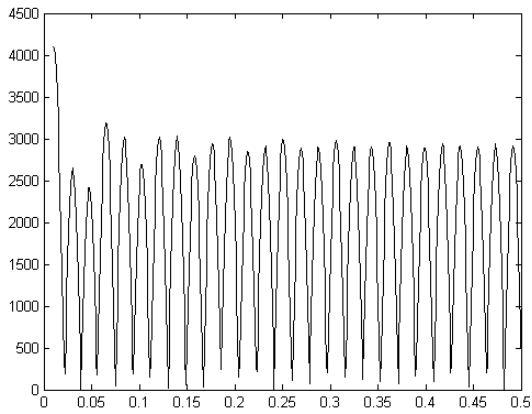


Рис. 2.34а. Зависимость разностей между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР, от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с

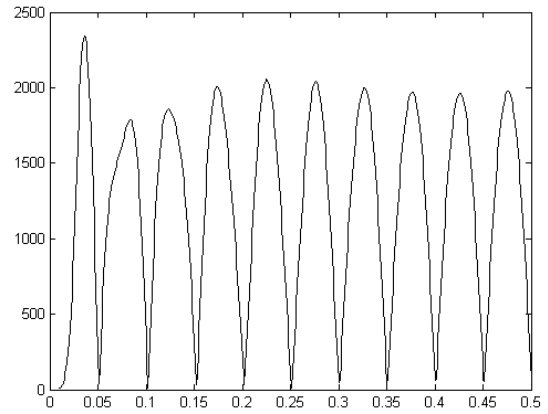


Рис. 2.34б. Зависимость разностей между третьим и четвертым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР, от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с

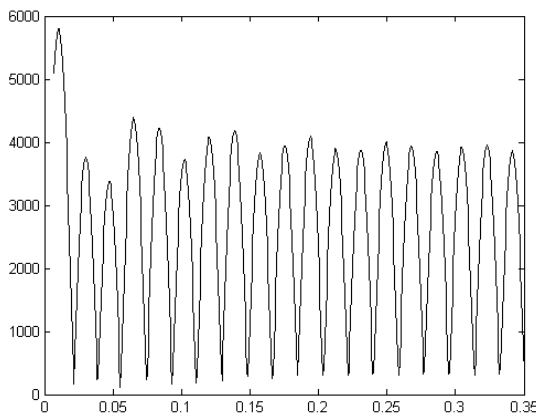


Рис. 2.34в. Зависимость разностей между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР, от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 0.7$

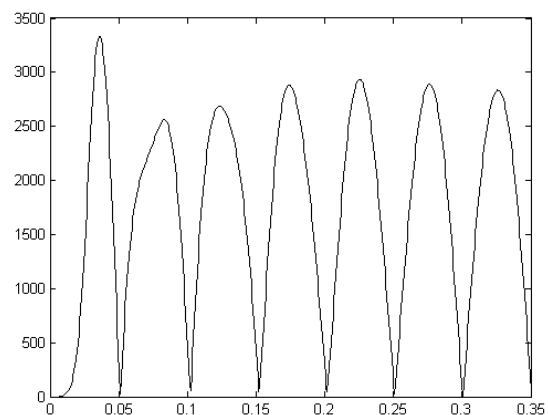


Рис. 2.34г. Зависимость разностей между третьим и четвертым собственными числами выборочной траекторной анализируемого ВР, от величины  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 0.7$

$f_2 = 3.0f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера, восстановленные компоненты ВР по первой и второй, а также по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы представлены на рис. 2.35.

Из рис. 2.35 видно, выборочная автокорреляционная матрица имеет близкие собственные значения, что не позволяет разделить составляющие анализируемого ВР. Данный результат предсказан в [21, С. 27], однако, при  $L, K \rightarrow \infty$ .

Для проверки правомерности наложения данного условия были вычислены в соответствии с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f_1 = 10$  Гц,  $f_2 = 3.0f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах временной сетки

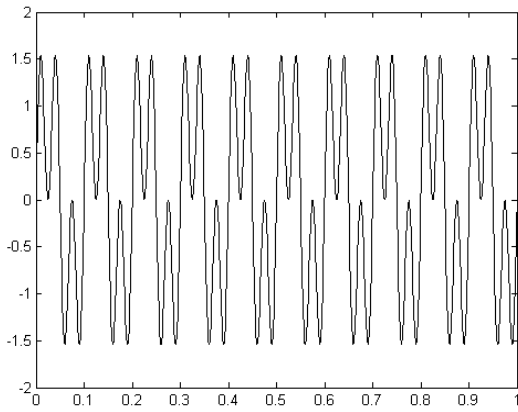


Рис. 2.35а. Анализируемый временной ряд ( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 3.0$ ,  $A_1 = 1.0$ ,  $A_2 = 1$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ )

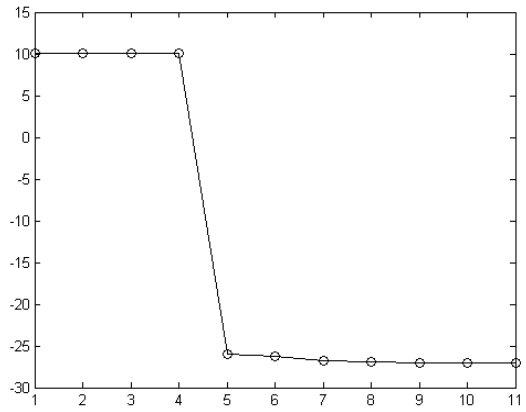


Рис. 2.35б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера

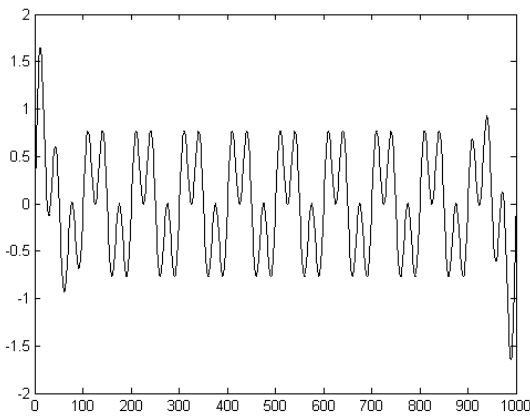


Рис. 2.35в. Составляющая ВР, восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N_1}$ ,  $N_1 = 100$ ,  $T_s = 1$  с. (Здесь значения безразмерных частот составляющих ВР были равны  $f_1 \cdot \Delta t = 0.1$ ,  $f_2 \cdot \Delta t = 0.3$ .)

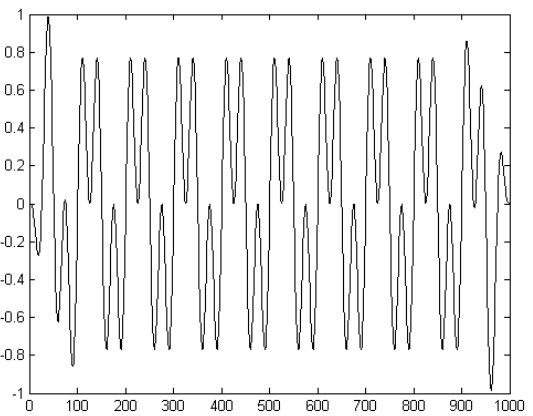


Рис. 2.35г. Составляющая ВР, восстановленная по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

На рис. 2.36 приведены исходный ВР, зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера, восстановленные компоненты ВР по первой и второй, а также по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы представлены на рис. 2.36.

Из рис. 2.36, что описанные выше свойства собственных чисел выборочной траекторной матрицы остаются неизменными и для тех случаев, когда значения  $L$ ,  $K$  оказываются конечными.

### Анализ разделимости ВР вида «cos» + «exp»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \exp(\alpha t) + A_2 \cos(2\pi f t + \varphi), \quad (2.18)$$

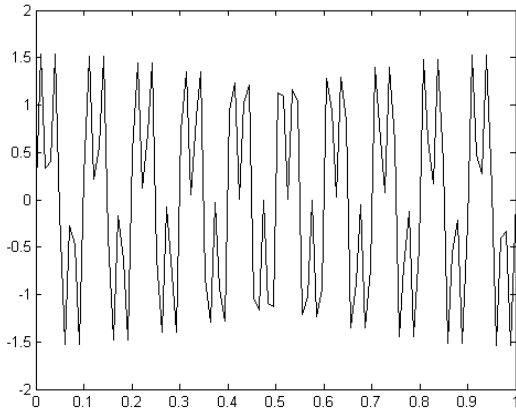


Рис. 2.36а. Анализируемый временной ряд ( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 3.0$ ,  $A_1 = 1.0$ ,  $A_2 = 1$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N_1 - 1)$ ,  $i = \overline{1, N_1}$ ,  $N_1 = 1000$ )

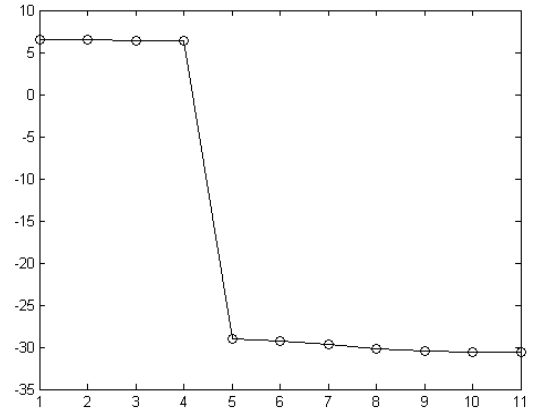


Рис. 2.36б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера

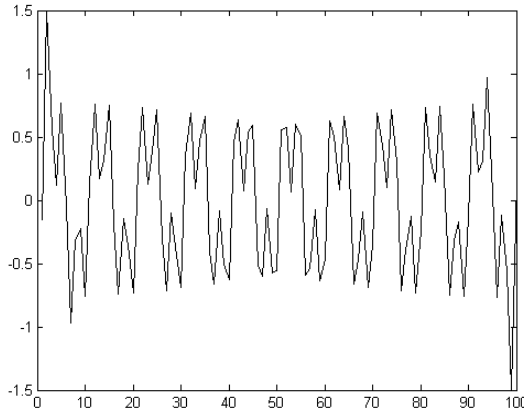


Рис. 2.36в. Составляющая ВР, восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

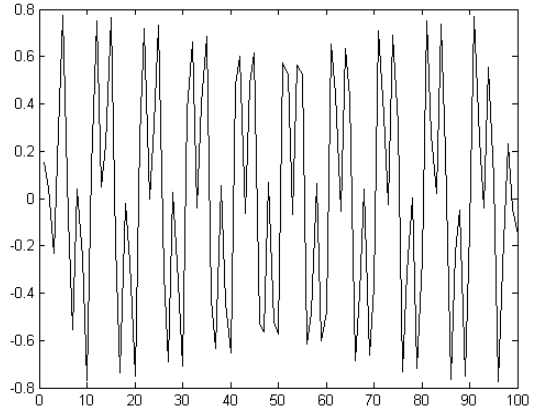


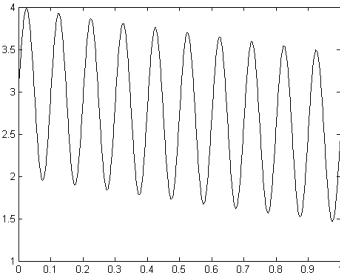
Рис. 2.36г. Составляющая ВР, восстановленная по третьей и четвертой собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned}
 F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\
 &A_1 \exp(\alpha t_i) + A_2 \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots \\
 &A_1 \exp(\alpha \Delta t(i-1)) + A_2 \cos(2\pi f \Delta t(i-1) + \varphi) = \dots \\
 &A_1 \exp\left(\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) + A_2 \cos\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi\right).
 \end{aligned}$$

**Случай № 1.**  $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных



Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  
 $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

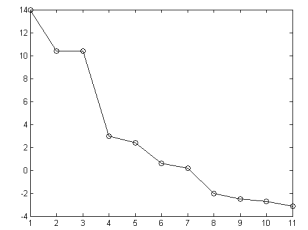
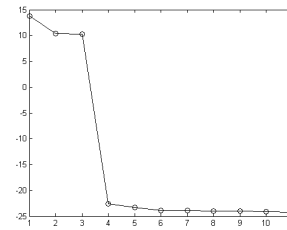
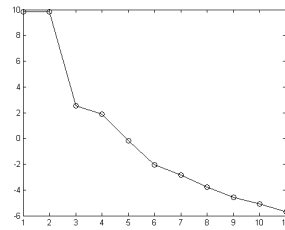
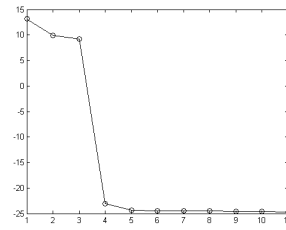
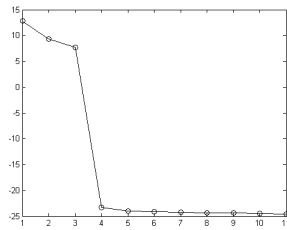
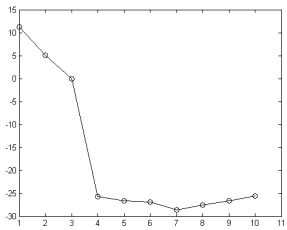
$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

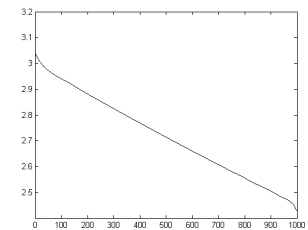
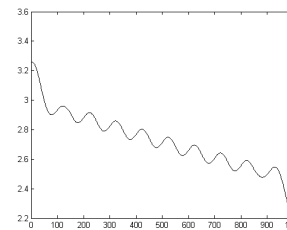
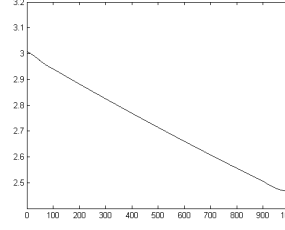
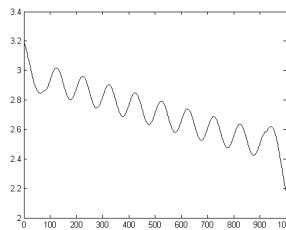
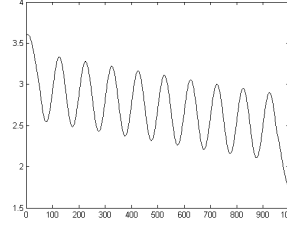
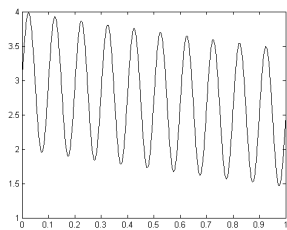
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

а)



б)



в)

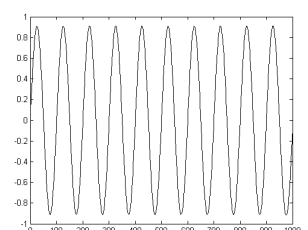
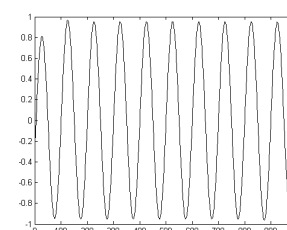
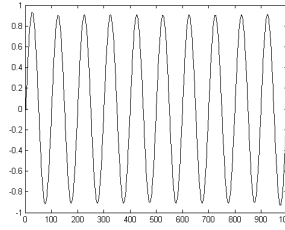
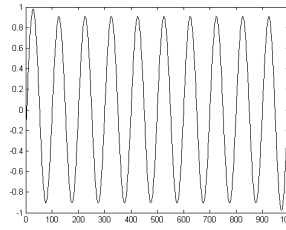
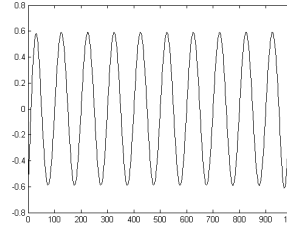
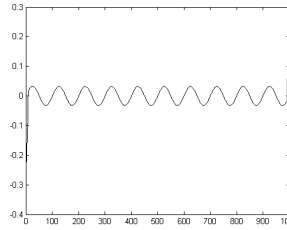


Рис. 2.37. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.37.

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.38.

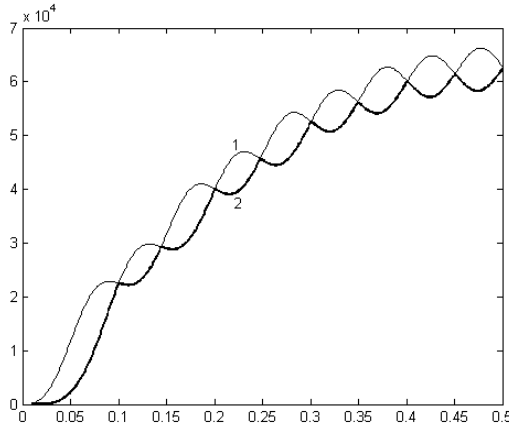


Рис. 2.38а. Зависимости второго (1) и третьего (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

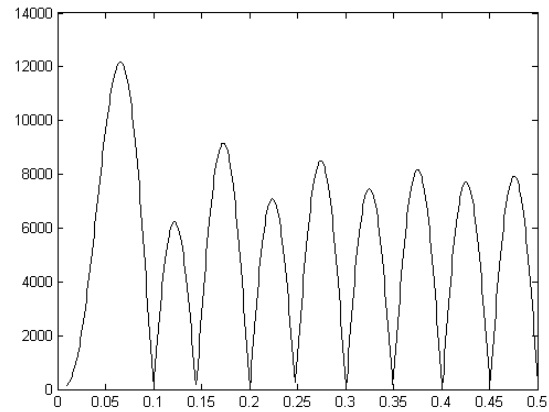


Рис. 2.38б. Зависимости разности второго и третьего собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

Из рис. 2.37, 2.38 видно, что в рассматриваемом случае можно строго разделить ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия

$$L \cdot \Delta t \cdot f = n, n = 1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

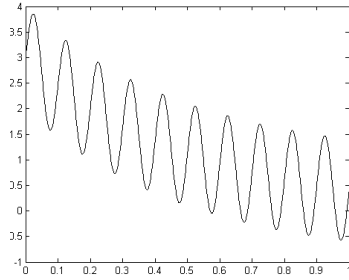
а при выполнении условия

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5 + n, n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

в связи с тем, что компонента ВР, выделенная по первой собственной тройке траекторной матрицы ВР, содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.37), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) оценка амплитуды периодической составляющей ряда  $F_N$ , отличающейся не будет превосходить  $\approx 5\%$ .

**Случай № 2.**  $\max(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$ ,  $\min(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствии с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i - 1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N - 1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.39.



Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -2.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10 \text{ Гц}$ ,  
 $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

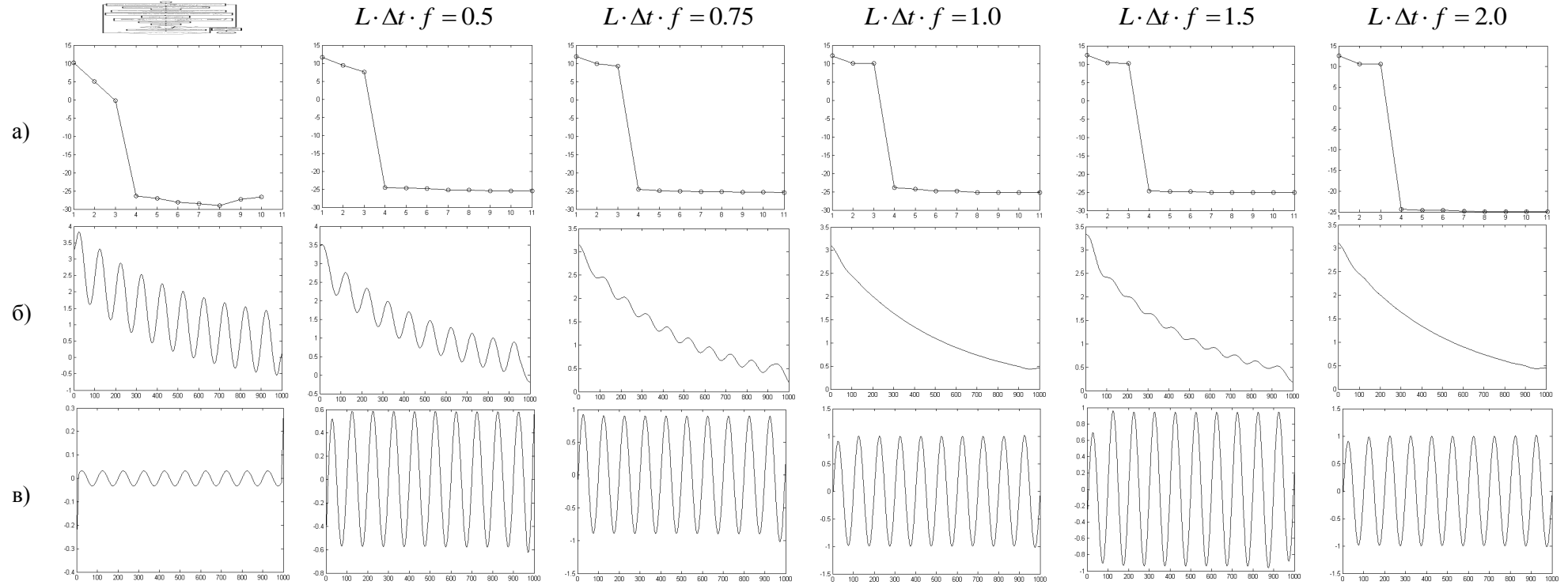


Рис. 2.39. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.40.

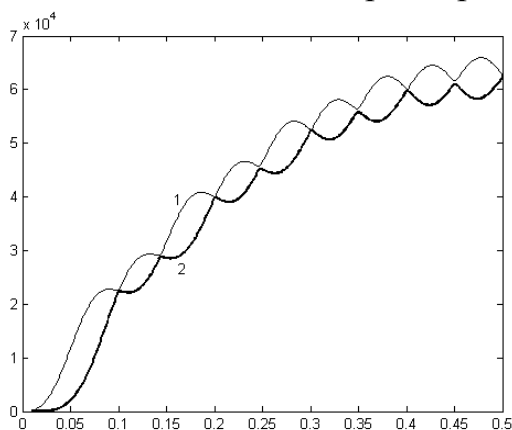


Рис. 2.40а. Зависимости второго (1) и третьего (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

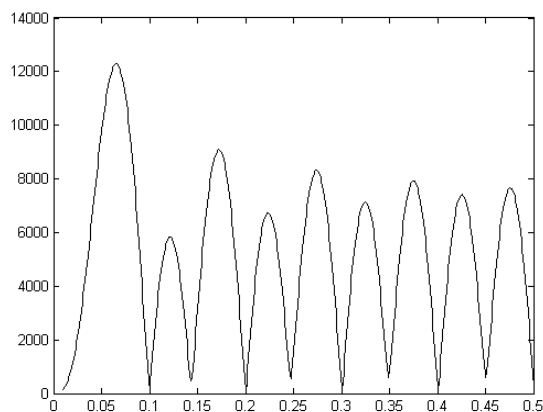


Рис. 2.40б. Зависимости разности второго и третьего собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

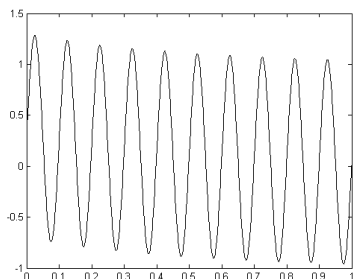
Из рис. 2.39, 2.40 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19), а при выполнении условия (2.20) в связи с тем, что компонента ВР, выделенная по первой собственной тройке траекторной матрицы ВР, содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.39), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) оценка амплитуды периодической составляющей ряда  $F_N$ , выделенной методом SSA, будет отличаться от истинного значения не более чем на  $\approx 3\%$ .

**Случай № 3.**  $\max(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствии с (2.14) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 0.3$ ,  $\alpha = -2.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.41.

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.42.

Из рис. 2.41, 2.42 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19), а при выполнении условия (2.20) в связи с тем, что компонента ВР, выделенная по первой и второй собственным тройкам траекторной матрицы ВР, содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.41), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении



Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 0.3$ ,  $\alpha = -2.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10 \text{ Гц}$ ,  
 $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

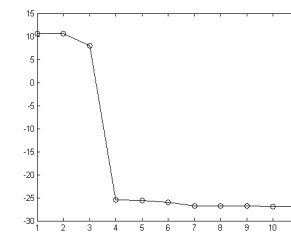
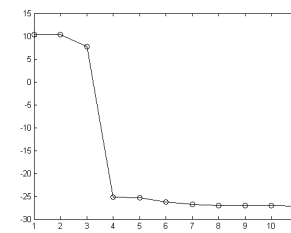
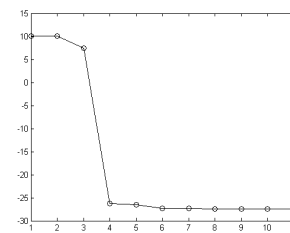
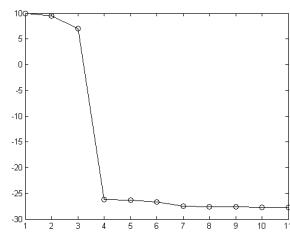
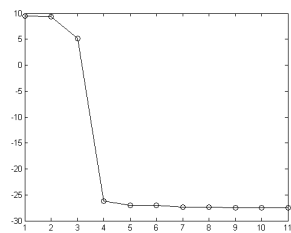
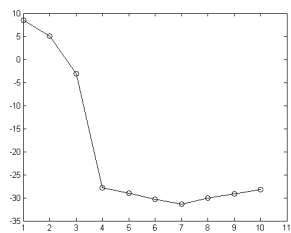
$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

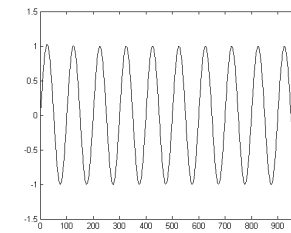
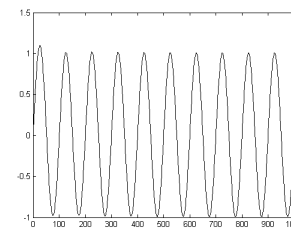
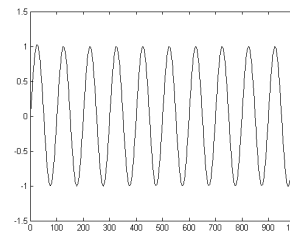
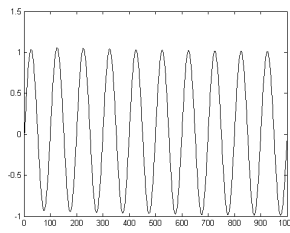
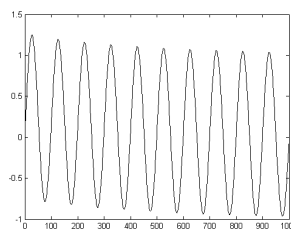
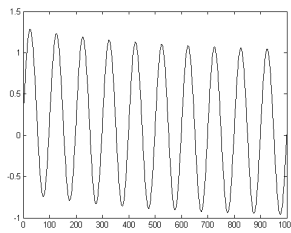
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

а)



б)



в)

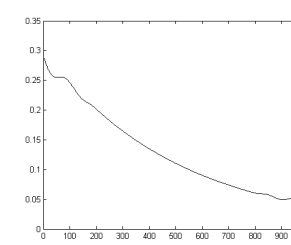
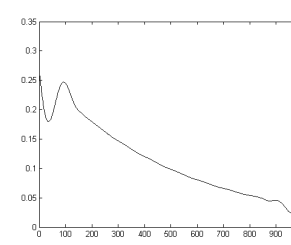
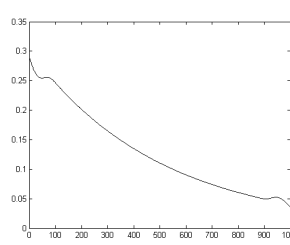
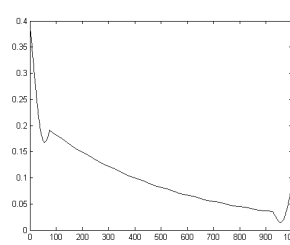
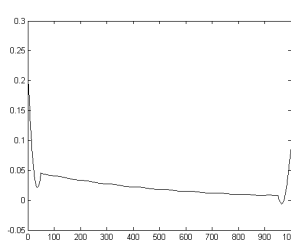
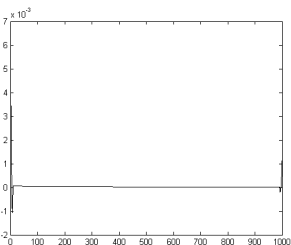


Рис. 2.41. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР



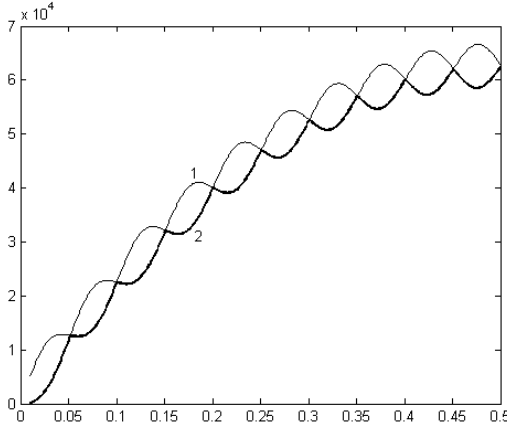


Рис. 2.42а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

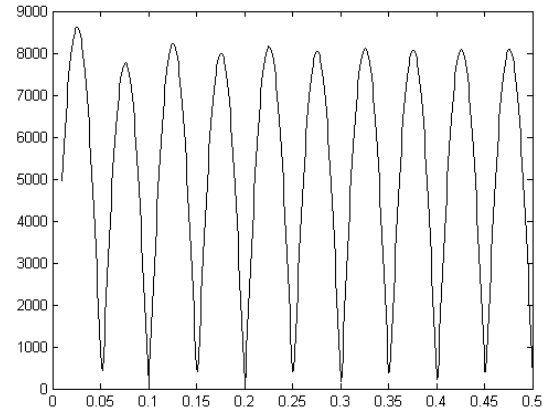


Рис. 2.42б. Зависимости разности первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

условия (2.19) оценка амплитуды периодической составляющей ряда  $F_N$ , выделенная методом SSA, будет отличаться от истинного значения не более чем на  $\approx 2\%$ .

#### Анализ разделимости ВР вида «cos» + «a k+b»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

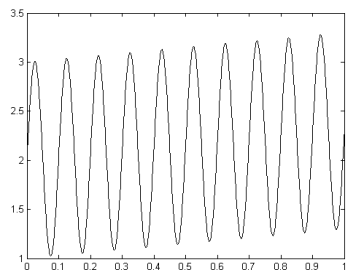
$$u(t) = (a \cdot t + b) + A \cos(2\pi f t + \varphi). \quad (2.21)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &(a \cdot t_i + b) + A \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots \\ &(a \cdot \Delta t(i-1) + b) + A \cos(2\pi f \Delta t(i-1) + \varphi) = \dots \\ &\left( a \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b \right) + A \cos\left( 2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi \right). \end{aligned}$$

#### Случай № 1. $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.21) на временном интервале длительностью 1 с для  $a = 0.3$ ,  $b = 2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.43.



Анализируемый временной ряд ( $a = 0.3, b = 2, A_2 = 1.0, f = 10 \text{ Гц}, \varphi = \pi/2,$   
 $t_i = \Delta t(i-1), \Delta t = T_s/(N-1), i = \overline{1, N}, N = 1000, T_s = 1 \text{ с}$ )

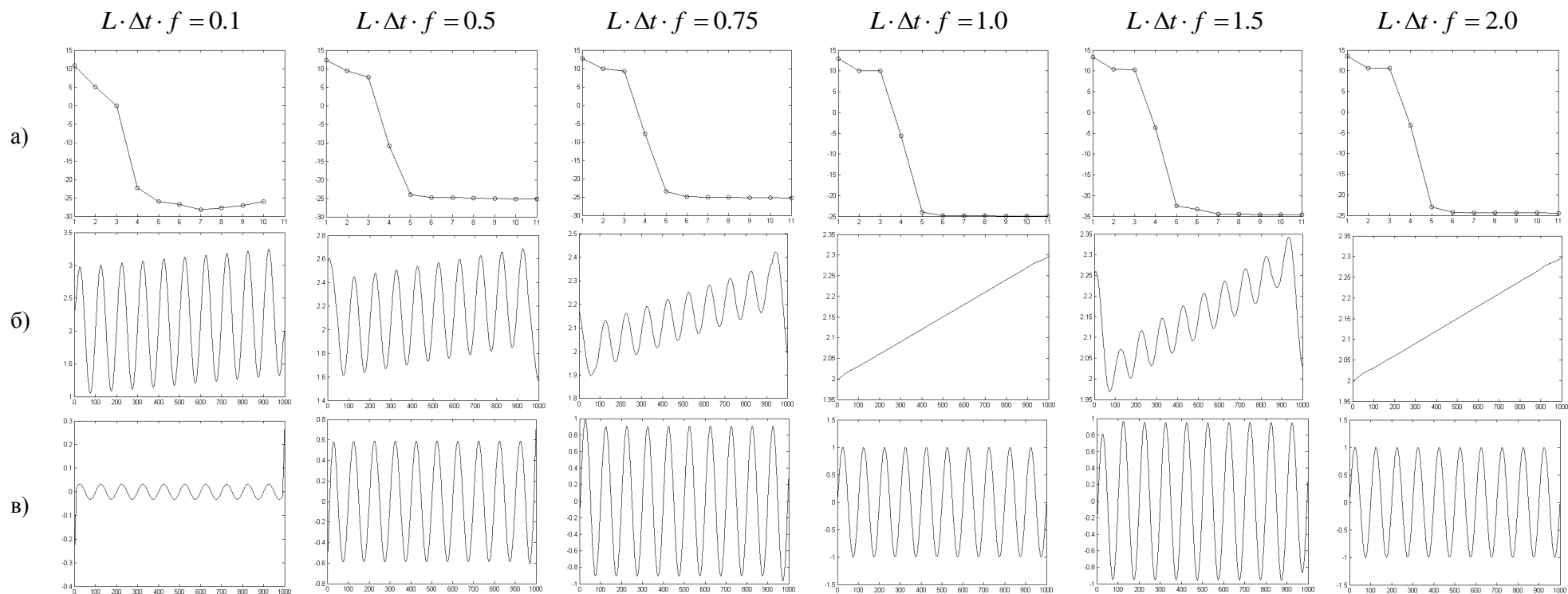


Рис. 2.43. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.44.

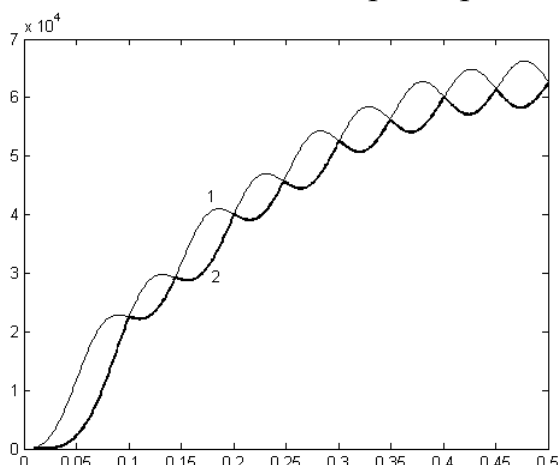


Рис. 2.44а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,

$$T_s = 1 \text{ с}$$

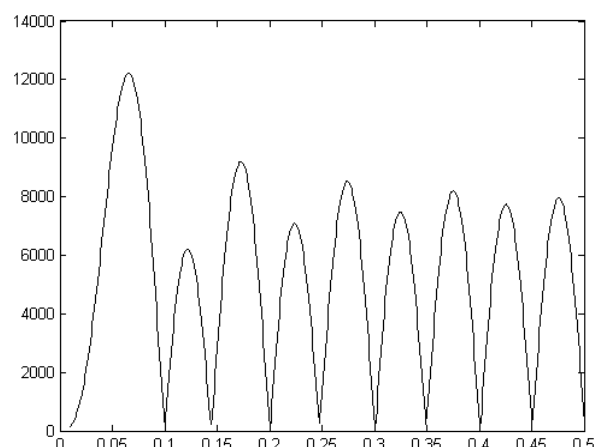


Рис. 2.44б. Зависимости разности первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,

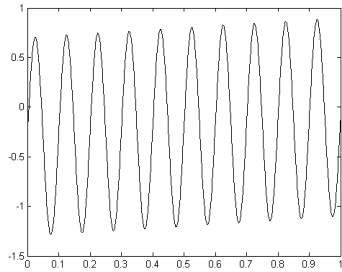
$$T_s = 1 \text{ с}$$

Из рис. 2.43, 2.44 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19), а при выполнении условия (2.20) в связи с тем, что компонента ВР, выделенная по первой собственной тройке траекторной матрицы ВР, содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.43, 2.41), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) отклонение оценки амплитуды периодической составляющей ряда  $F_N$ , выделенного с помощью метода SSA, от истинного значения не будет превосходить  $\approx 1\%$ .

**Случай № 2.**  $\min(F_N^{(1)}) > \min(F_N^{(2)})$ ,  $\max(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.21) на временном интервале длительностью 1 с для  $a = -0.3$ ,  $b = 0.2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.45.

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.46.



Анализируемый временной ряд ( $a = -0.3, b = 0.2, A_2 = 1.0, f = 10 \text{ Гц}, \varphi = \pi/2, t_i = \Delta t(i-1), \Delta t = T_s/(N-1), i = \overline{1, N}, N = 1000, T_s = 1 \text{ с}$ )

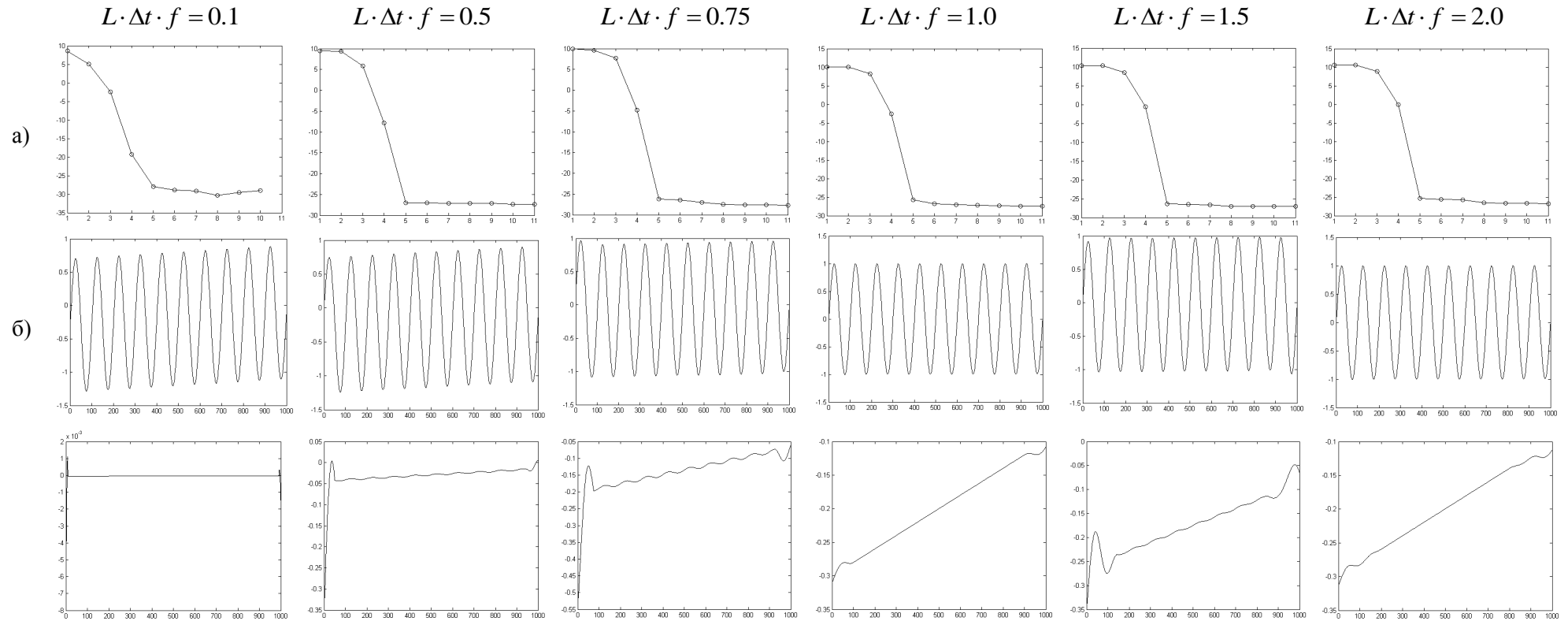


Рис. 2.45. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

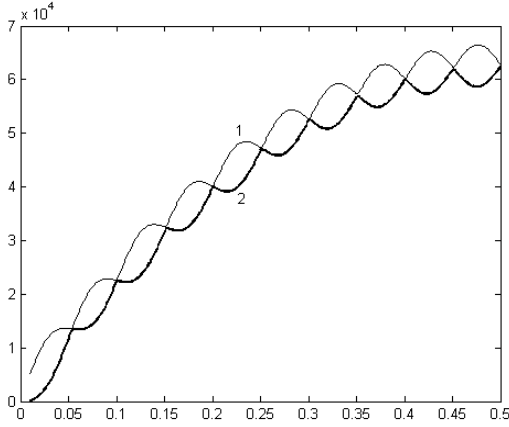


Рис. 2.46а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

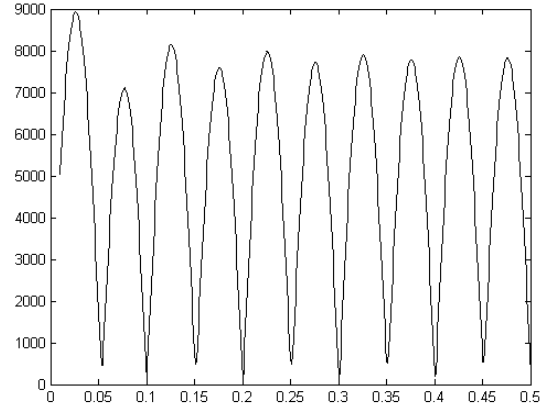


Рис. 2.46б. Зависимости разности первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

Из рис. 2.45, 2.46 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно разделить ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). В связи с тем, что компонента ВР, выделенная по третьей собственной тройке траекторной матрицы ВР, содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.45, 2.41), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) отклонение оценки амплитуды периодической составляющей ряда  $F_N$ , выделенной с помощью метода SSA, от истинного значения не будет превосходить  $\approx 1\%$ .

#### 2.2.4. Анализ разделимости ВР вида «exp» + изменяющийся во времени ВР

##### Анализ разделимости ВР вида «exp» + «exp»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t). \quad (2.23)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ A_1 \exp(\alpha_1 t_i) + A_2 \exp(\alpha_2 t_i) &= \dots \\ A_1 \exp(\alpha_1 \Delta t(i-1)) + A_2 \exp(\alpha_2 \Delta t(i-1)) &= \dots \\ A_1 \exp\left(\alpha_1 \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) + A_2 \exp\left(\alpha_2 \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) &= \dots \end{aligned}$$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.23) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 1.0$ ,  $\alpha_1 = -0.4$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 0.4$ , в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выбо-

рочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.47.

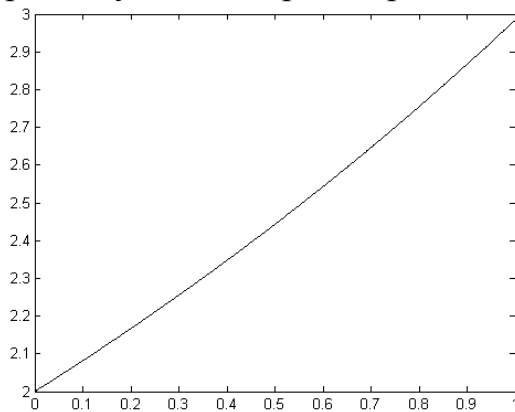


Рис. 2.47а. Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 1.0$ ,  $\alpha_1 = -0.4$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 0.4$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

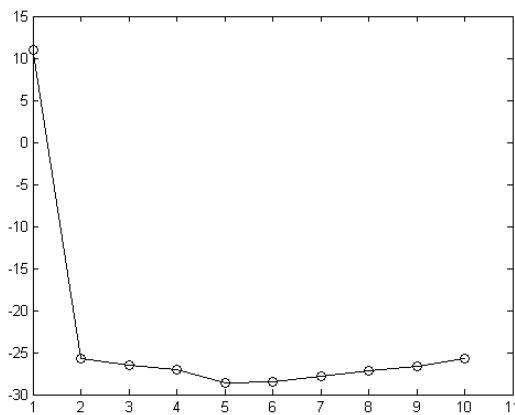


Рис. 2.47б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

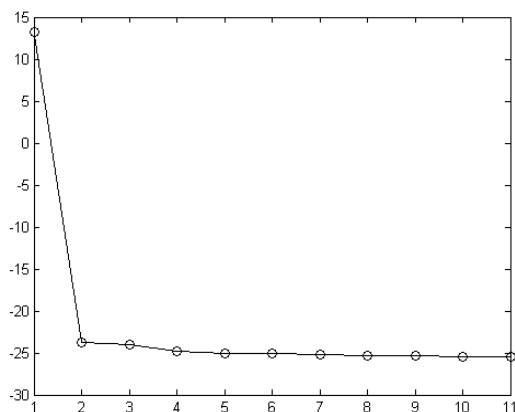


Рис. 2.47в. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

### Анализ разделимости ВР вида «exp» + «exp cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t) \cos(2\pi f t + \varphi). \quad (2.23)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned}
F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\
&A_1 \exp(\alpha_1 t_i) + A_2 \exp(\alpha_2 t_i) \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots \\
&A_1 \exp(\alpha_1 \Delta t (i-1)) + A_2 \exp(\alpha_2 \Delta t (i-1)) \cos(2\pi f \Delta t (i-1) + \varphi) = \dots \\
&A_1 \exp\left(\alpha_1 \frac{T_s}{N-1} (i-1)\right) + A_2 \exp\left(\alpha_2 \frac{T_s}{N-1} (i-1)\right) \cos\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1} (i-1) + \varphi\right).
\end{aligned}$$

**Случай № 1.**  $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.23) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1=1.0$ ,  $\alpha_1=-0.4$ ,  $A_2=1.0$ ,  $\alpha_2=-1.0$ ,  $f=10$  Гц,  $\varphi=\pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i=\Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t=T_s/(N-1)$ ,  $i=\overline{1, N}$ ,  $N=1000$ ,  $T_s=1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.48.

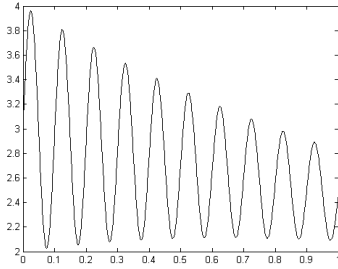
Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.49.

Из рис. 2.48, 2.49 видно, что в рассматриваемом случае ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  можно разделить при выполнении условия:

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5k, k = 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

В связи с тем, что компонента ВР, выделенная по первой собственной тройке траекторной матрицы ВР, содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.48), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Также следует отметить, что второе и третье собственные числа выборочной траекторной матрицы ВР даже при размере сдвига, обеспечивающем выполнение условия (2.24) оказываются значительно отличными друг от друга. Данный результат еще раз подтверждает недостаточность использования графика зависимости логарифма (или корня квадратного) собственных чисел от их номера для идентификации собственных троек, соответствующих данной компоненте ВР. В тоже время, проводя измерения временных интервалов между последовательными локальными минимумами разности второго и третьего собственными числами выборочной траекторной матрицы можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.23) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = \frac{0.5}{L \Delta t}.$$



Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 3.0$ ,  $\alpha_1 = -0.4$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -1$ ,  $f = 10$   
 $\Gamma_{\Pi}$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

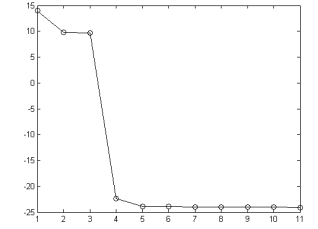
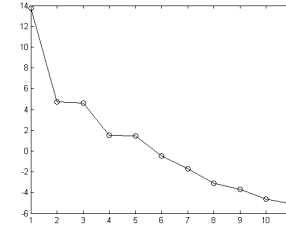
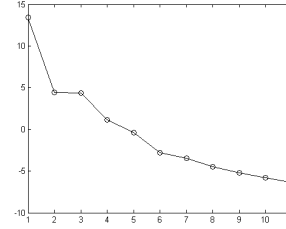
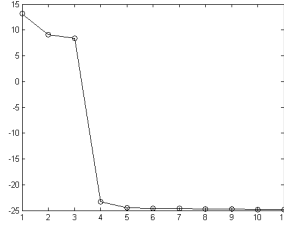
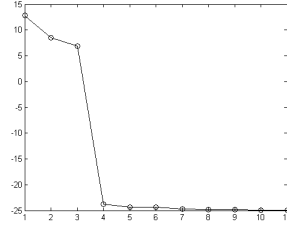
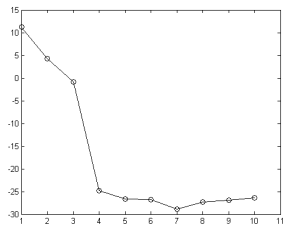
$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

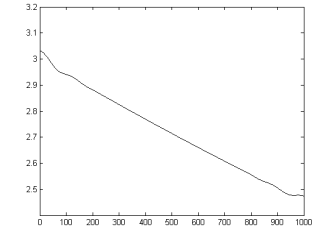
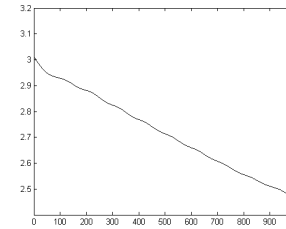
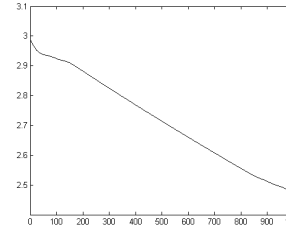
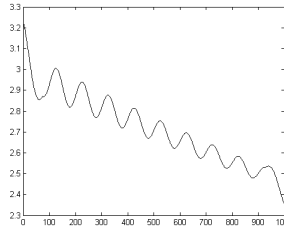
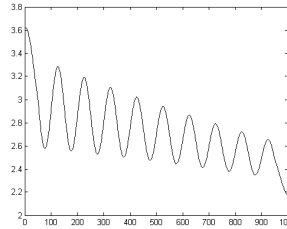
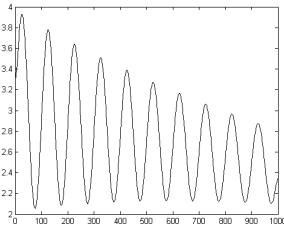
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

а)



б)



в)

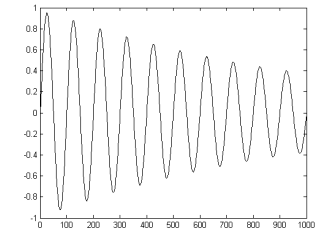
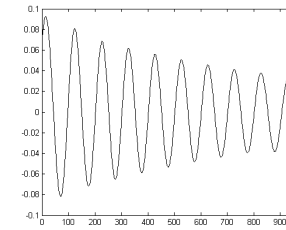
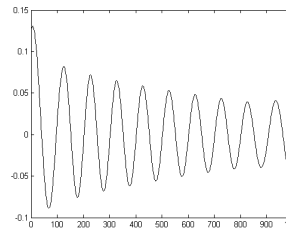
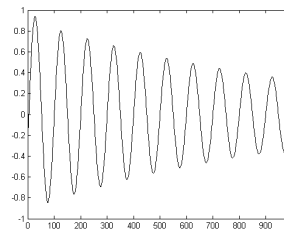
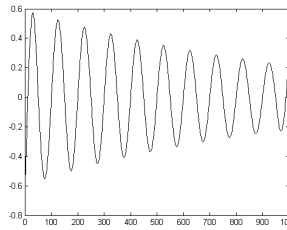
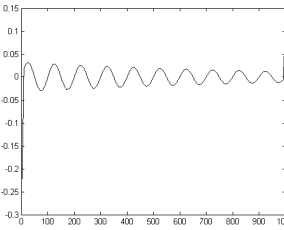


Рис. 2.48. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР



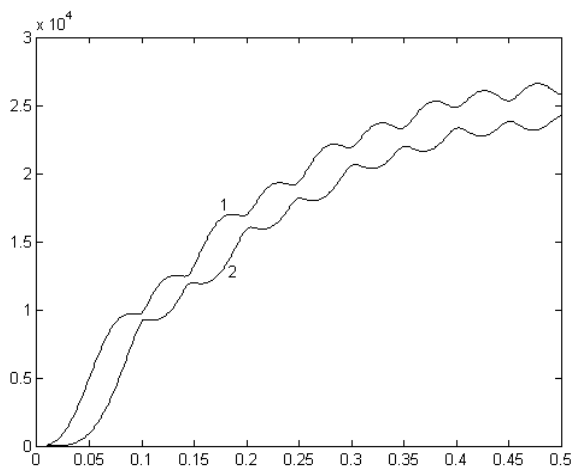


Рис. 2.49а. Зависимости второго (1) и третьего (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

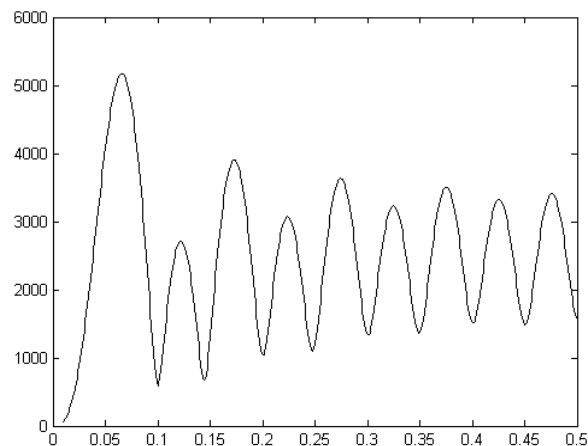


Рис. 2.49б. Зависимости разности второго и третьего собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

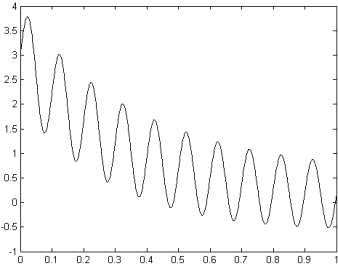
**Случай № 2.**  $\max(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$ ,  $\min(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.23) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1 = 3.0$ ,  $\alpha_1 = -3.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.50.

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.51.

Из рис. 2.50, 2.51 видно, что в рассматриваемом случае можно строго разделить ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). Ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  оказываются слабо  $L$ -разделимы при параметрах сдвига  $L$  таких, что выполнены условия (2.20). Из рис. 2.51 видно, что, проводя измерения временных интервалов между последовательными локальными минимумами разности второго и третьего собственными числами выборочной траекторной матрицы, соответствующих условиям (2.19), можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.23) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = \frac{1}{L\Delta t}.$$



Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 3.0$ ,  $\alpha_1 = -3.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  
 $f = 10$ Гц,  $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

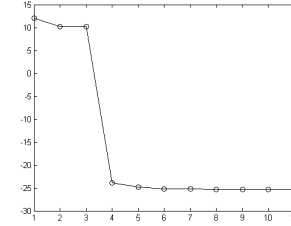
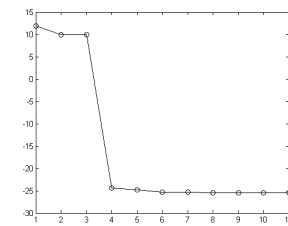
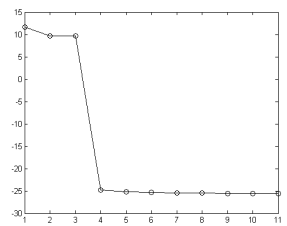
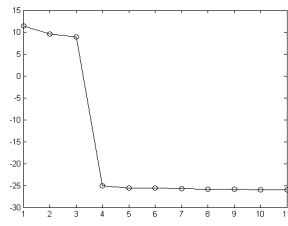
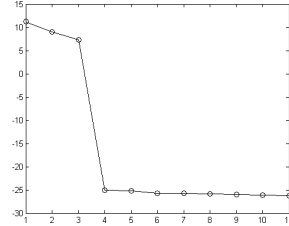
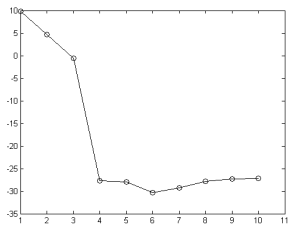
$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

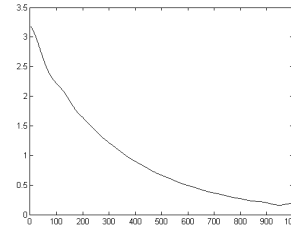
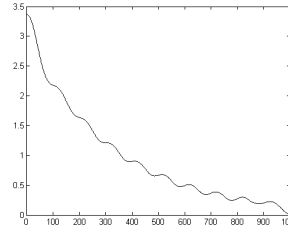
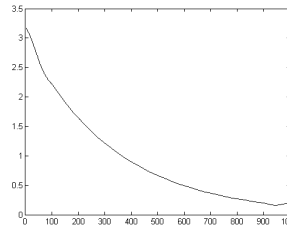
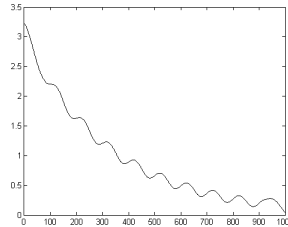
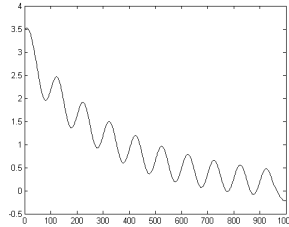
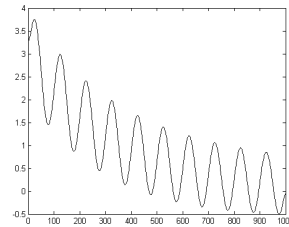
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

а)



б)



в)

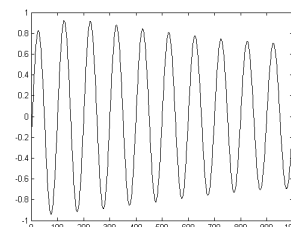
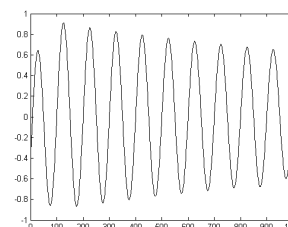
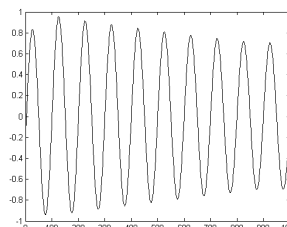
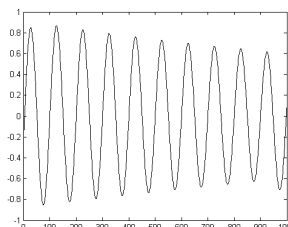
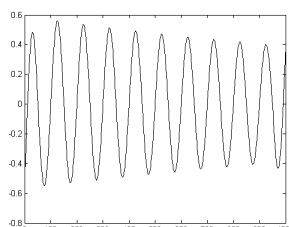
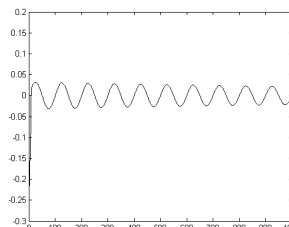


Рис. 2.50. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

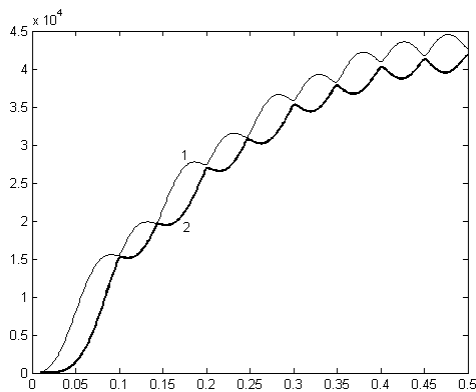


Рис. 2.51а. Зависимости второго (1) и третьего (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

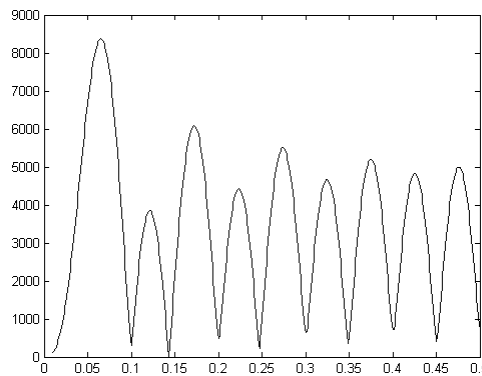


Рис. 2.51б. Зависимости разности второго и третьего собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

**Случай № 3.**  $\max(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$ ,  $\min(F_N^{(1)}) > \min(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.23) на временном интервале длительностью 1 с для  $A_1=0.8$ ,  $\alpha_1=-3$ ,  $A_2=1.0$ ,  $\alpha_2=-0.4$ ,  $f=10$  Гц,  $\varphi=\pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i=\Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t=T_s/(N-1)$ ,  $i=\overline{1,N}$ ,  $N=1000$ ,  $T_s=1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.52.

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.53.

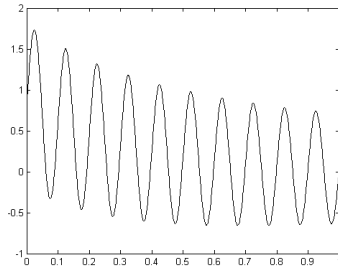
Из рис. 2.52, 2.53 видно, что в рассматриваемом случае ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19) ряды оказываются слабо  $L$ -разделимы. Из рис. 2.53 видно, что, проводя измерения временных интервалов между последовательными локальными минимумами разности второго и третьего собственными числами выборочной траекторной матрицы, соответствующих условиям (2.19), можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.22) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = \frac{1}{L\Delta t}.$$

#### Анализ разделимости ВР вида « $\exp \cos$ » + « $a \cdot k + b$ »

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = (a \cdot t + b) + A_2 \exp(\alpha_2 t) \cos(2\pi f t + \varphi), \quad (2.25)$$



Анализируемый временной ряд ( $A_1 = 3.0$ ,  $\alpha_1 = -3.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  
 $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

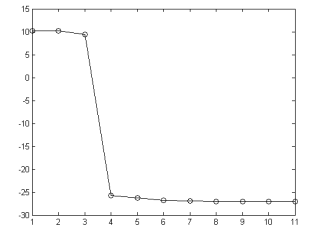
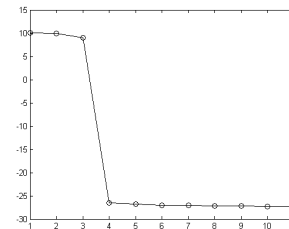
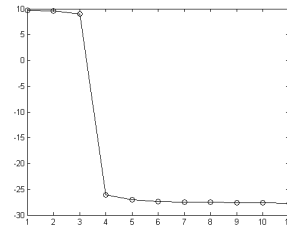
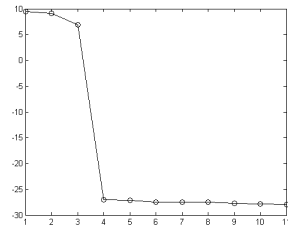
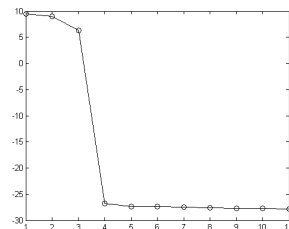
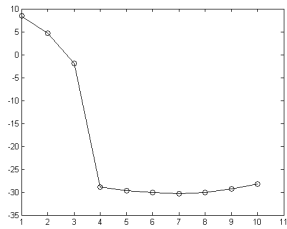
$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

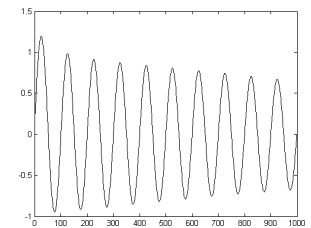
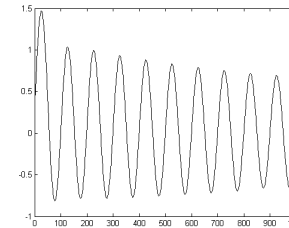
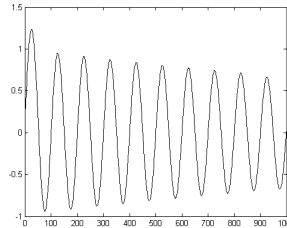
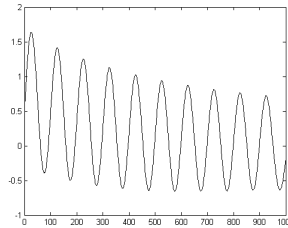
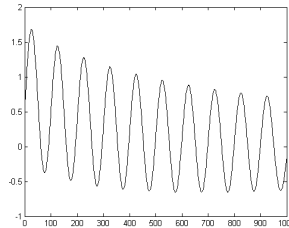
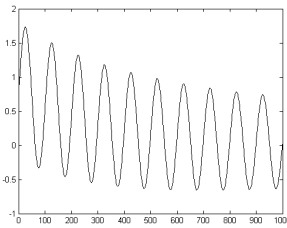
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

а)



б)



в)

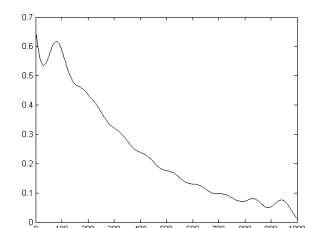
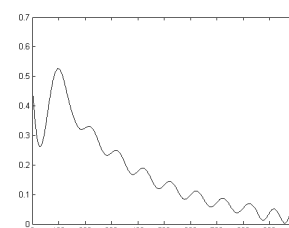
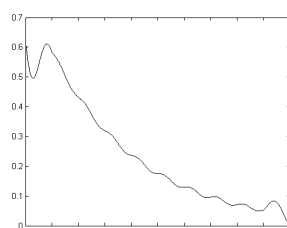
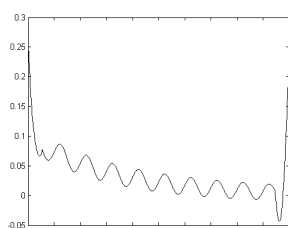
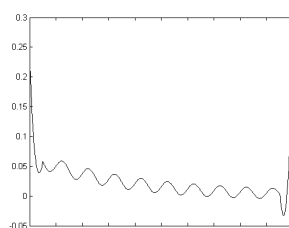
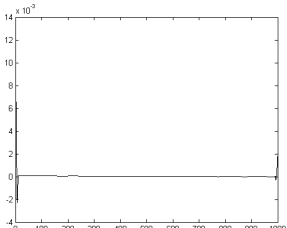


Рис. 2.52. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

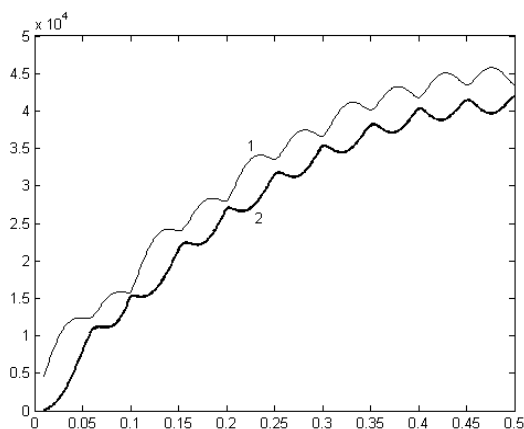


Рис. 2.53а. Зависимости первого (1) и второго (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

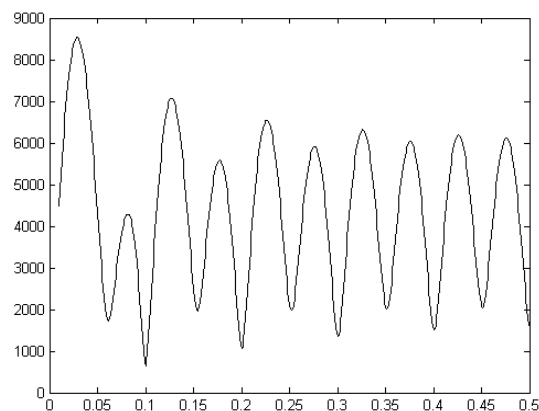


Рис. 2.53б. Зависимость разности первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots$$

$$(a \cdot t_i + b) + A_2 \exp(\alpha_2 t_i) \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots$$

$$(a \cdot \Delta t(i-1) + b) + A_2 \exp(\alpha_2 \Delta t(i-1)) \cos(2\pi f \Delta t(i-1) + \varphi) = \dots$$

$$\left( a \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b \right) + A_2 \exp\left( \alpha_2 \frac{T_s}{N-1}(i-1) \right) \cos\left( 2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi \right).$$

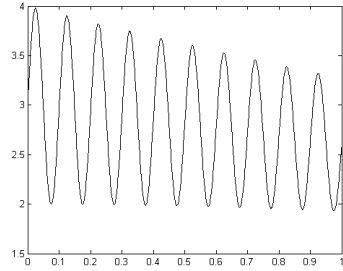
**Случай № 1.**  $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствии с (2.25) на временном интервале длительностью 1 с для  $a = -0.3$ ,  $b = 3$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.54.

Зависимости собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР и их разности от значения параметра  $L \cdot \Delta t$  представлены на рис. 2.55.

Из рис. 2.53, 2.54 видно, что в рассматриваемом случае ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19) ряды оказываются слабо  $L$ -разделимы. Из рис. 2.54 видно, что, проводя измерения временных интервалов между последовательными локальными минимумами разности второго и третьего собственными числами выборочной траекторной матрицы, соответствующих условиям (2.19), можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.25) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = 1/L\Delta t$$



$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

Анализируемый временной ряд ( $a = -0.3$ ,  $b = 3$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $f = 10$   
 $\Gamma_{\Pi}$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

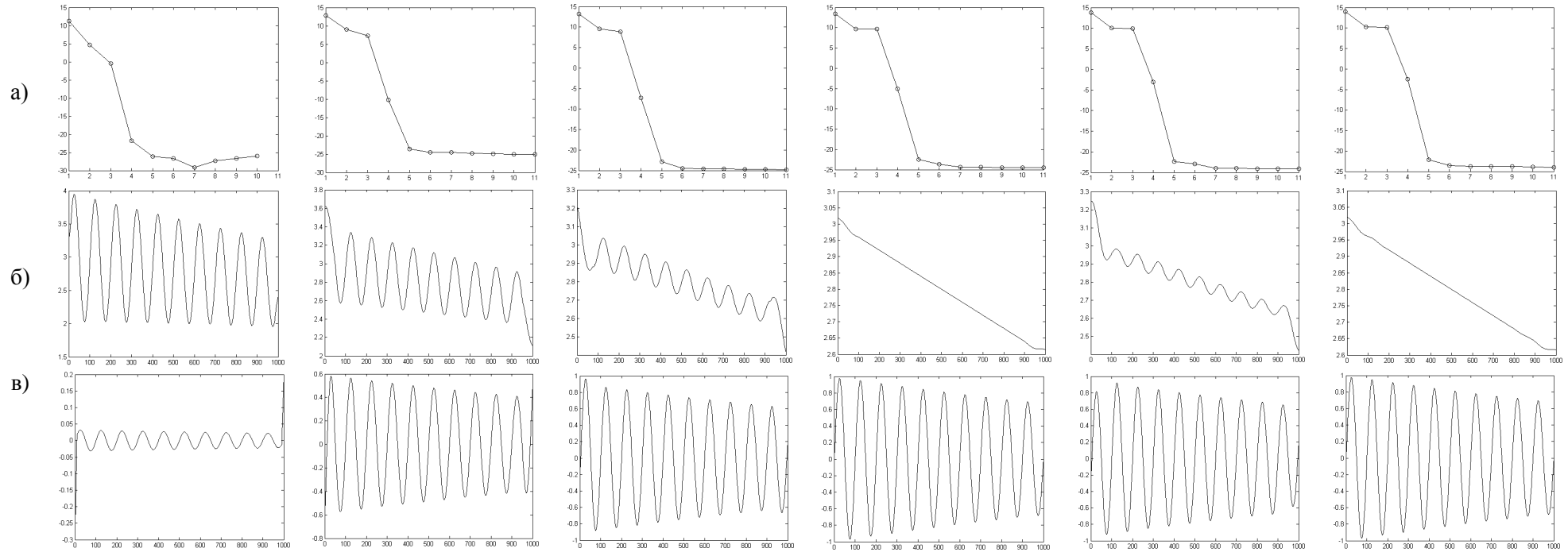


Рис. 2.54. а) зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера; б) составляющая ВР, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР; в) составляющая ВР, восстановленная по второй и третьей собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР

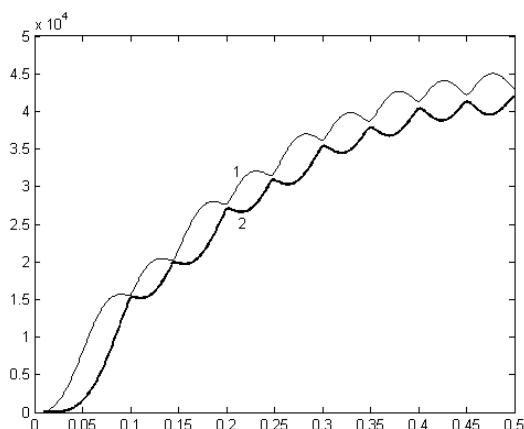


Рис. 2.55а. Зависимости второго (1) и третьего (2) собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

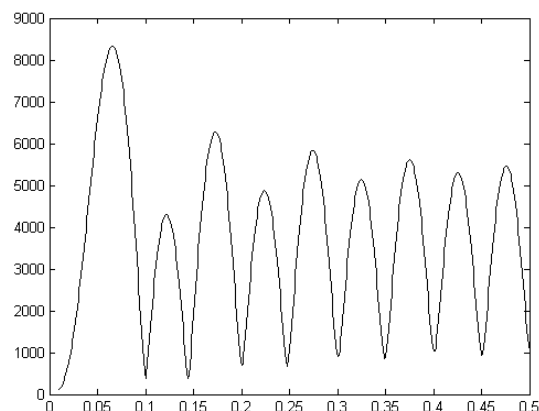


Рис. 2.55б. Зависимости разности второго и третьего собственных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от величины  $L \cdot \Delta t$ , с

### Анализ разделимости ВР вида « $a_1 \cdot k + b_1$ » + « $a_2 \cdot k + b_2$ »

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = (a_1 \cdot t + b_1) + (a_2 \cdot t + b_2), \quad (2.26)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &(a_1 \cdot t_i + b_1) + (a_2 \cdot t_i + b_2) = \dots \\ &(a_1 \cdot \Delta t(i-1) + b_1) + (a_2 \cdot \Delta t(i-1) + b_2) = \dots \\ &\left( a_1 \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b_1 \right) + \left( a_2 \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b_2 \right). \end{aligned}$$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствие с (2.26) на временном интервале длительностью 1 с для  $a_1 = -0.4$ ,  $b_1 = 3$ ,  $a_2 = -0.1$ ,  $b_2 = 1.0$ , в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также компонента ВР, восстановленная по первому числу выборочной траекторной матрицы, и компонента ВР, восстановленная по второму и третьему числам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.56.

Из рис. 2.56 видно, что ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  вида « $a \cdot k + b$ » + « $a \cdot k + b$ » неотделимы друг от друга.

Подведем итоги проведенного анализа разделимости детерминированных рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  в методе SSA, результаты которого представлены в табл. 2.2.

1. Впервые предложено использовать для исследования проблемы разделимости рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  зависимость разности между соответствующими соб-

ственными числами, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ . (Отметим, что использование данной зависимости для анализа реальных ВР, делает возможным обоснованный выбор размера сдвига  $L$ .)

Таблица 2.2. Разделимость рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ <sup>1</sup>

	<b>const</b>	<b>cos</b>	<b>exp</b>	<b>exp cos</b>	<b><math>a \cdot k + b</math></b>
<b>const</b>	Неразделимы	Разделимы точно	Неразделимы	Разделимы точно	Неразделимы
<b>cos</b>	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы точно <sup>3</sup>	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы точно <sup>2</sup>
<b>exp</b>	Неразделимы	Разделимы точно <sup>2</sup>	Неразделимы	Разделимы слабо	Разделимы слабо
<b>exp cos</b>	Разделимы точно	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы слабо	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы слабо
<b><math>a \cdot k + b</math></b>	Неразделимы	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы слабо	Разделимы слабо	Неразделимы

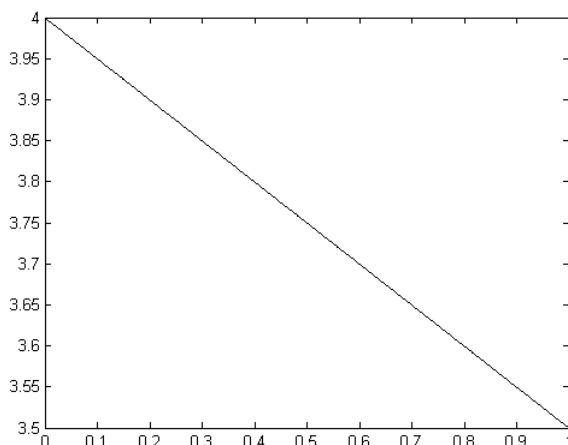


Рис. 2.56а. Анализируемый временной ряд ( $a_1 = -0.4$ ,  $b_1 = 3$ ,  $a_2 = -0.1$ ,  $b_2 = 1.0$ ,  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с)

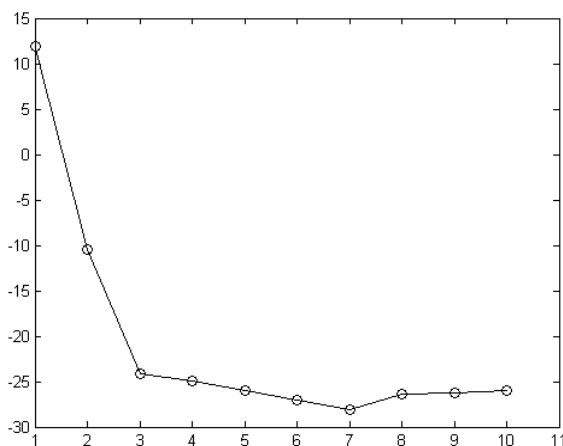


Рис. 2.56б. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

<sup>1</sup> В данной таблице термины «Разделимы точно», «Разделимы слабо» мы понимаем в смысле данных нами выше определений.

<sup>2</sup> За исключением случая равных амплитуд.

<sup>3</sup> При выполнении условия (2.19).



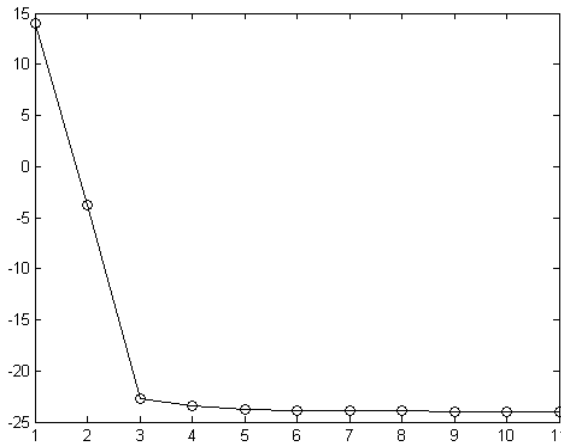


Рис. 2.56в. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от его номера,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

2. Найдены условия точной и слабой  $L$ -разделимости рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ .

3. Показано, что по зависимости разности между соответствующими собственными числами, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , позволяет ввести классификацию  $L$ -разделимости рядов  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ , не требующую проверки критериев, приведенных в [21]:

а) Сильная разделимость имеет место, когда минимум зависимости разности между соответствующими собственными числами выборочной траекторной матрицы ряда  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ , номера которых отличаются друг от друга на единицу, оказывается близким к нулю, соответственно, данные собственные числа отличаются друг от друга на малую величину (менее 10% от максимального значения разности).

б) Слабая разделимость имеет место, когда минимум зависимости разности между соответствующими собственными числами выборочной траекторной матрицы ряда  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ , номера которых отличаются друг от друга на единицу, оказывается значимо отличным от нуля, соответственно, данные собственные числа выборочной траекторной матрицы ряда  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ , отличаются друг от друга на конечную величину (более 10% от максимального значения разности).

### 2.3. Исследование особенностей собственных чисел и собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA временного ряда, представляющего собой смесь шума и детерминированного сигнала

При практическом использовании метода SSA для анализа ВР вида

$$F_{N_i} = \sum_m F_{N_i}^{(m)}, \quad i = \overline{1, N},$$

значения которых получены экспериментально, возникает задача оценки влияния погрешности измерений значений членов ВР, представляющей собой некоторую случайную величину  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , на точность получаемых при этом результатов. Таким образом задача исследования состоит в изучении проблемы разделимости и точности восстановления компонент ВР вида

$$F_{N_i} = \sum_{m=1}^{M-1} F_{N_i}^{(m)} + \xi_i, i = \overline{1, N}.$$

Отметим, что результаты исследования частного случая рассматриваемой задачи для  $\xi_i \equiv 0$ , в которой требуется разделить ВР, представляющие собой дискретные отсчеты некоторых детерминированных функций, приведены в Разделе 2.2. В этой связи представляется достаточным изучить проблемы делимости и точности восстановления компонент ВР на примере ВР  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ , где  $F_N^{(1)} = \xi_i$  – случайный ВР,  $F_N^{(2)}$  – детерминированный ВР.

Здесь уместно отметить, что строгое теоретическое обоснование существования решения рассматриваемой задачи получено только для единственного частного случая [21, с. 21]:  $F_N^{(1)}$  – гауссов белый шум (случайная величина с

плотностью распределения  $f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$ ,  $\sigma$  – стандартное отклонение),  $F_N^{(2)}$  – детерминированный ВР,  $L, K \rightarrow \infty$  и  $L/K \rightarrow a > 0$ , кроме того на

практике далеко не всегда ряд  $F_N^{(1)}$  имеет нормальный закон распределения, а любой анализируемый ВР имеет конечную длительность. Кроме того данная теорема не решает вопроса о точности восстановления компонент анализируемого ВР. Таким образом, перечисленные выше причины определяют актуальность исследований влияния шума на результаты анализа ВР методом SSA.

В связи с тем, что аналитических оценок влияния шума на точность выделения компонент анализируемого ВР получить не представляется возможным мы использовали метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), реализующийся следующей последовательностью действий:

1. Задание временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа, в узлах которой вычисляются значения детерминированного ВР  $F_N^{(2)}$ .

2. Вычисление значений детерминированного ВР  $F_N^{(2)}$  в узлах заданной в п. 1 временной сетки.

2. Задание набора значений параметров сдвига  $L_k$ :

$$L_k = L_{\min} + \Delta L \cdot k, k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - L_{\min}\right) / \Delta L,$$

где  $\Delta L$  – шаг изменения значения параметра сдвига,  $L_{\min}$  – минимальное значение параметра сдвига  $L$ .

3. Задание вида распределения случайной величины и значений ее параметров.

4. Задание числа испытаний *Number\_of\_Trial*.

5. Инициализация счетчика числа испытаний *Counter\_of\_Trial*.

6. Генерация в соответствии с заданным распределением и его параметрами случайной последовательности  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  ( $F_N^{(1)} \equiv \xi_i$ ).

7. Вычисление значений ВР  $F_N$  :

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)}.$$

8. Вычисление сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  для каждого значения параметра сдвига  $L_k$ .

9. Восстановление по соответствующим тройкам сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N$  для каждого значения сдвига  $L_k$  компоненты  $F_N^{(2)}$ . (В результате выполнения п. 9 получают  $k$  восстановленных ВР  $\{\tilde{F}_N^{(2)}\}_k$ .)

10. Вычисление  $k$  ВР, содержащих разности между точными и восстановленными значениями ВР  $F_N^{(2)}$  :

$$\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k = F_{N_i}^{(2)} - \{\tilde{F}_{N_i}^{(2)}\}_k.$$

(В результате выполнения п. 10 получаем матрицу  $\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k$  размерности

$$\left( \left( \frac{N}{2} - L_{\min} \right) / \Delta L \right) \times N .)$$

11. Вычисление среднего значения

$$\overline{\{\Delta F_N^{(2)}\}_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k$$

среднеквадратического отклонения каждой строки матрицы  $\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k$  :

$$\Delta F_k^{(\text{std})} = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k - \overline{\{\Delta F_N^{(2)}\}_k} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

11. Занесение векторов  $\overline{\{\Delta F_N^{(2)}\}_k}$ ,  $\Delta F_k^{(\text{std})}$  в матрицы:

$$\Delta M_{\text{Counter\_of\_Trial},k} = \overline{\{\Delta F_N^{(2)}\}_k},$$

$$\Delta F_{\text{Counter\_of\_Trial},k} = \Delta F_k^{(\text{std})}.$$

12. Увеличение значения счетчика испытаний *Counter\_of\_Trial* на единицу:

$$\text{Counter\_of\_Trial} = \text{Counter\_of\_Trial} + 1.$$

13. Если  $\text{Counter\_of\_Trial} + 1 \leq \text{Number\_Trial}$  выполнение пп. 6–13.

14. Вычисление усредненных по ансамблю реализаций зависимостей средних значений

$$\overline{\{\Delta M\}_k} = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta M_{j,k}$$

среднеквадратического отклонения

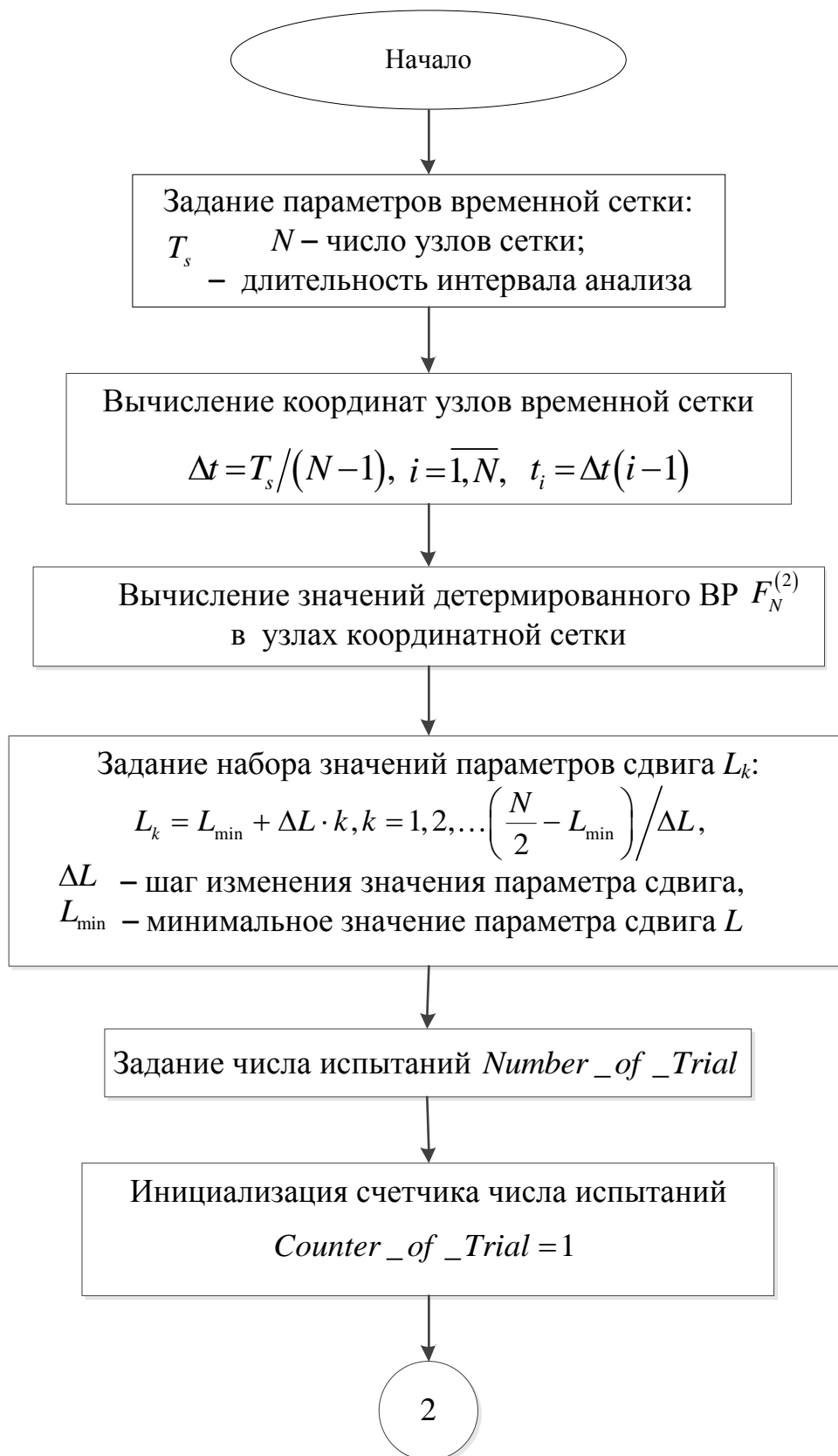


Рис. 2.57. Блок-схема алгоритма исследования точности восстановления компонент ВР  $F_N$ , представляющей собой смесь шума и детерминированного сигнала (начало)

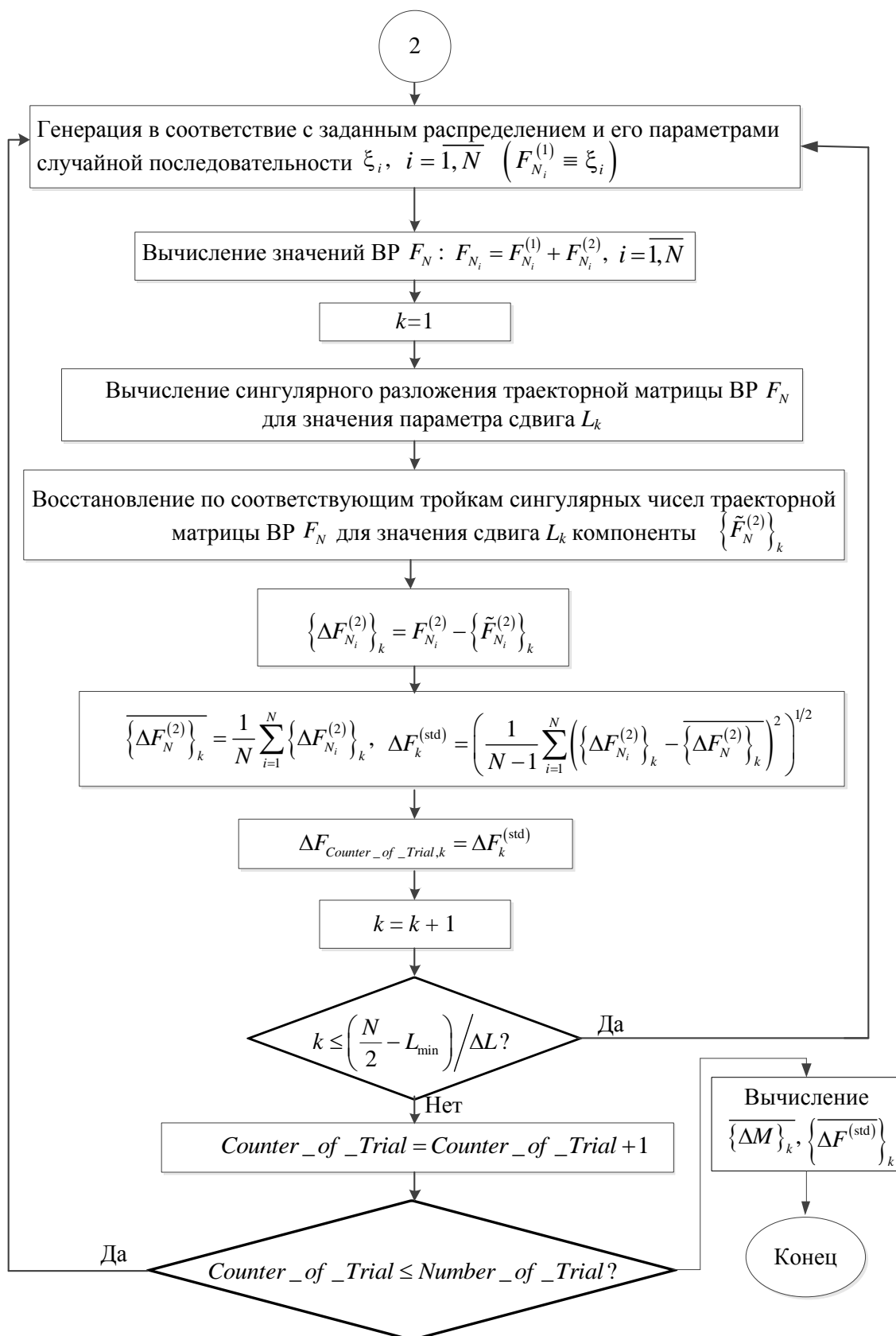


Рис. 2.57. Блок-схема алгоритма исследования точности восстановления компонент ВР  $F_N$ , представляющей собой смесь шума и детерминированного сигнала (продолжение)

$$\left\{ \overline{\Delta F^{(\text{std})}} \right\}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta F_{j,k}$$

разностей между ВР  $F_N^{(2)}$  и восстановленной по соответствующим тройкам траекторной матрицы ВР  $F_N$  компонентой  $\left\{ \tilde{F}_N^{(2)} \right\}_k$  от размера окна сдвига  $L_k \cdot \Delta t$ .

Блок-схема, описанного выше алгоритма, представлена на рис. 2.57.

### 2.3.1. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и постоянной составляющей

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и сигнала. На рис. 2.58 представлены типичные зависимости собственных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N$  от их номера при различных отношениях сигнал/(гауссов) шум.

Из рис. 2.58 видно, что:

1) при любом из рассмотренных отношений сигнал/шум первая собственная тройка сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР соответствует ВР  $F_N^{(2)}$ ;

2) точность восстановления компоненты по первой тройке траекторной матрицы анализируемого ВР, вообще говоря, оказывается зависящей от отношения сигнал/шум;

3) в качестве количественных «интегральных» показателей степени отличия между точным значением ряда  $F_N^{(2)}$  и компонентой, восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР,  $\tilde{F}_N^{(2)}$ , можно использовать среднее значение и среднеквадратическое отклонение (СКО) ряда  $\Delta F_N^{(2)} = F_N^{(2)} - \tilde{F}_N^{(2)}$ .

Для подтверждения данных выводов, которые основывались на анализе выборочных реализаций ВР, представляющего собой смесь шума и постоянного временного ряда, было проведено статистическое моделирование, в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. Зависимости усредненных по ансамблям случайных реализаций средних значений

$$\left\{ \overline{\Delta M} \right\}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta M_{j,k} \quad (2.27)$$

и СКО

$$\left\{ \overline{\Delta F^{(\text{std})}} \right\}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta F_{j,k} \quad (2.28)$$

ряда  $\Delta F_N^{(2)} = F_N^{(2)} - \tilde{F}_N^{(2)}$  от значения параметра  $L_k \cdot \Delta t$ , при различных отношениях сигнал/(гауссов) шум представлены на рис. 2.58.

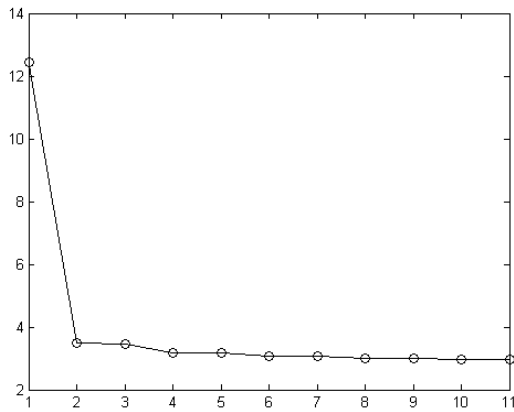


Рис. 2.58а. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется 20 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

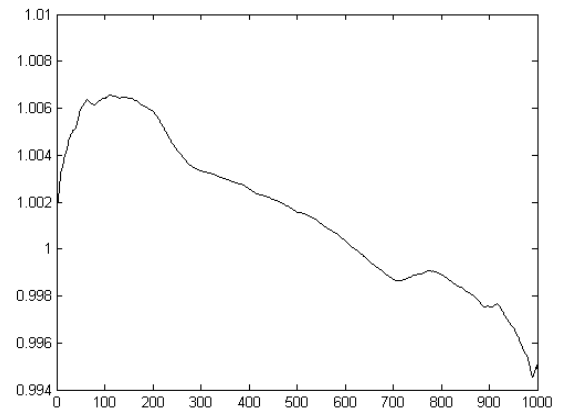


Рис. 2.58б. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется 20 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

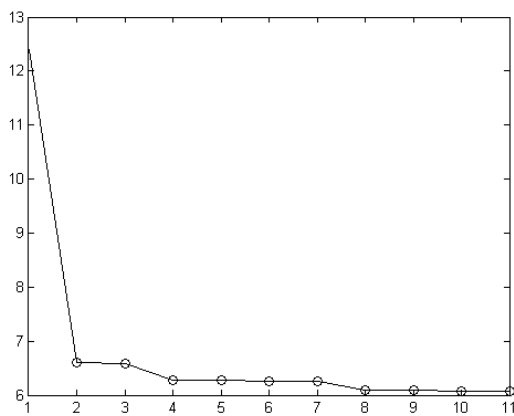


Рис. 2.58в. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется 6 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.1$ )

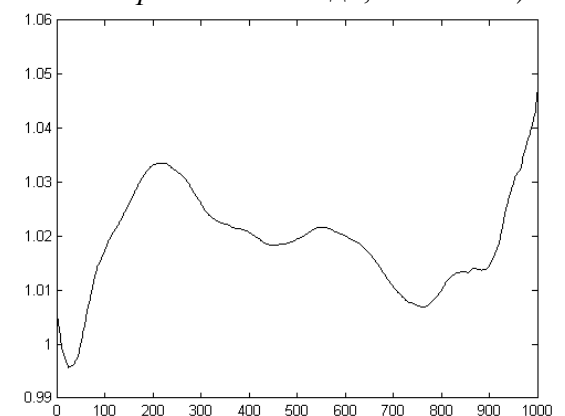


Рис. 2.58г. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется 6 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

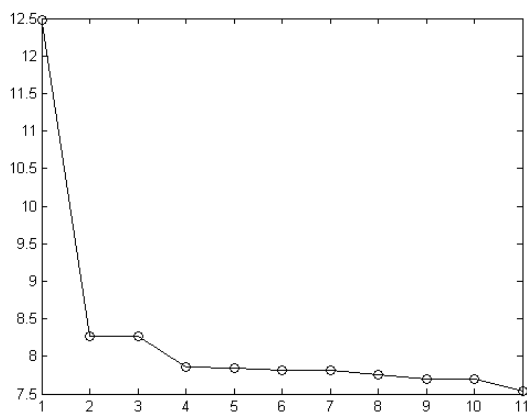


Рис. 2.58д. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется 0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.1$ )

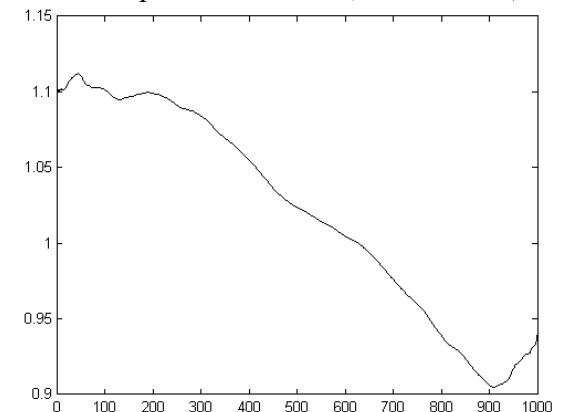


Рис. 2.58е. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется 0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

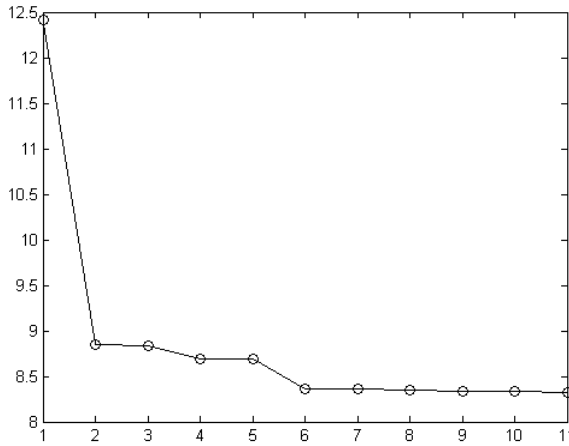


Рис. 2.58г. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется – 3.3 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.1$ )

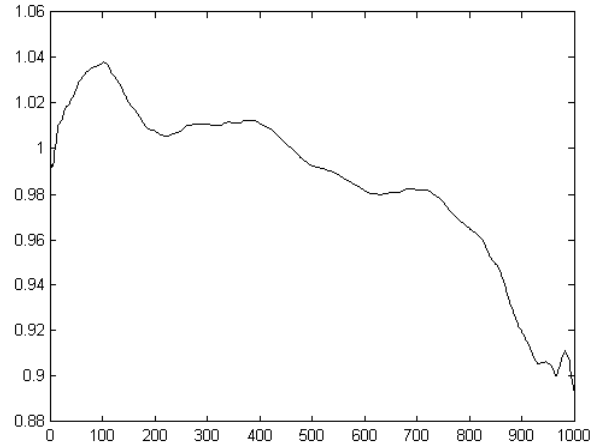


Рис. 2.58з. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется – 3.3 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

Здесь:  $N = 1000$ ,  $Number\_of\_Trial = 100$ ,  $L_k = 10, 15, \dots, 500$ . Для иллюстрации величины разброса величин  $\Delta M_{j,k}, \Delta F_{j,k}$  внутри ансамблей реализаций на рис.

2.59 также пунктирными линиями показаны зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k \pm \sigma(\Delta M_{j,k})$ ,

$$\sigma(\Delta M_{j,k}) = \left[ \frac{1}{Number\_of\_Trial - 1} \sum_{j=1}^{Number\_of\_Trial} \left( \Delta M_{j,k} - \{\overline{\Delta M}\}_k \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.29)$$

и  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k \pm \sigma(\Delta F_{j,k})$ ,

$$\sigma(\Delta F_{j,k}) = \left[ \frac{1}{Number\_of\_Trial} \sum_{j=1}^{Number\_of\_Trial} \left( \Delta F_{j,k} - \{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.30)$$

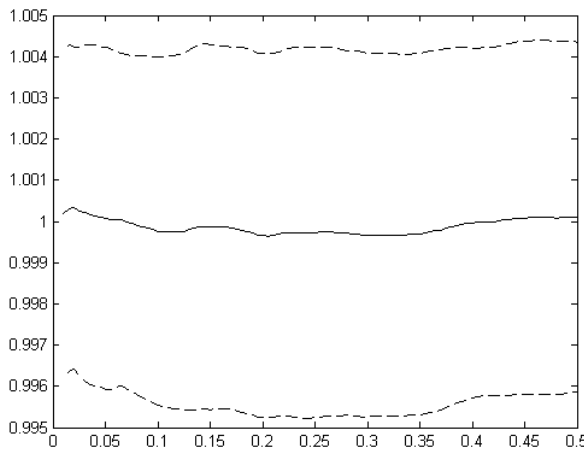


Рис. 2.59а. Зависимость  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 20 дБ)

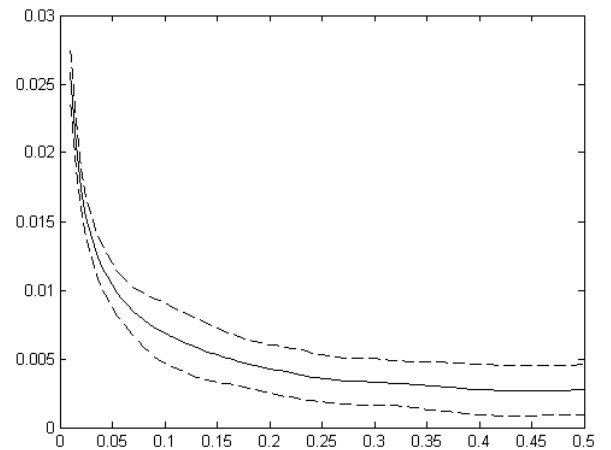


Рис. 2.59б. Зависимость  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 20 дБ)



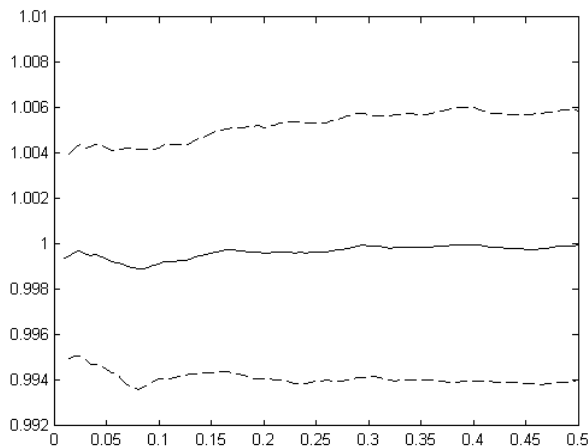


Рис. 2.58в. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}_k}$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 12 дБ)

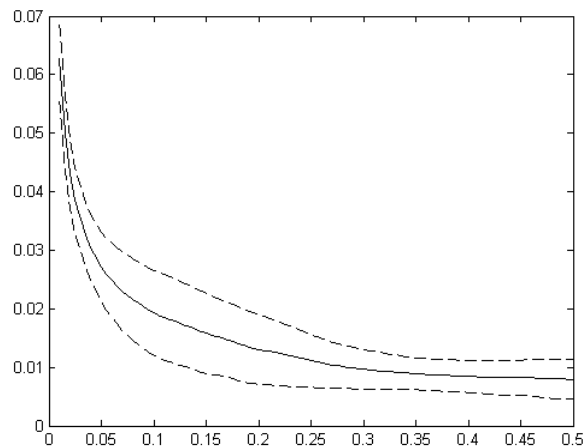


Рис. 2.58г. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}_k}$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 12 дБ)

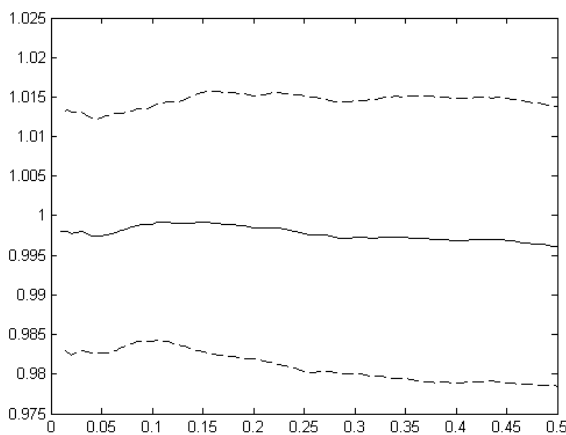


Рис. 2.59д. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}_k}$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 6 дБ)

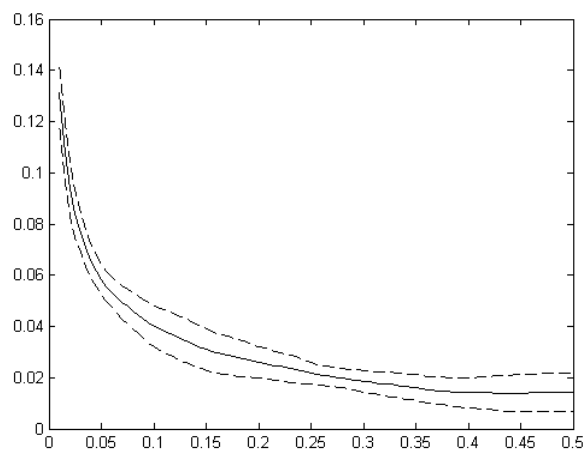


Рис. 2.59е. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}_k}$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 6 дБ)

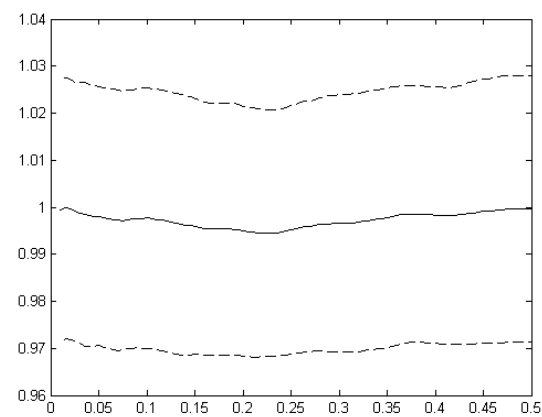


Рис. 2.59ж. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}_k}$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 2.5 дБ)

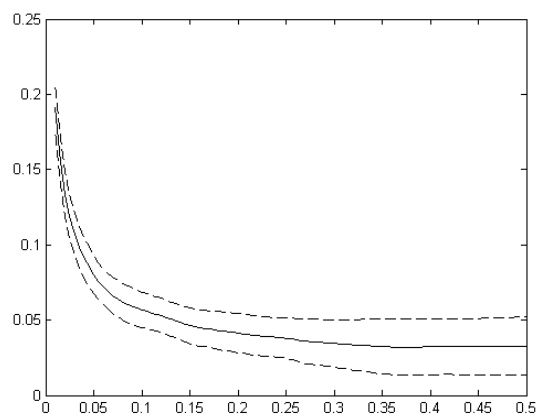


Рис. 2.59з. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}_k}$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 2.5 дБ)

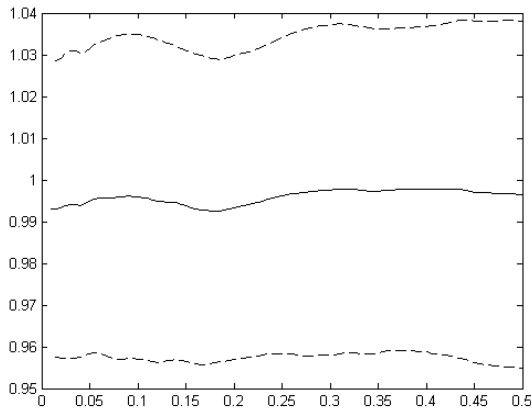


Рис. 2.59и. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 0 дБ)

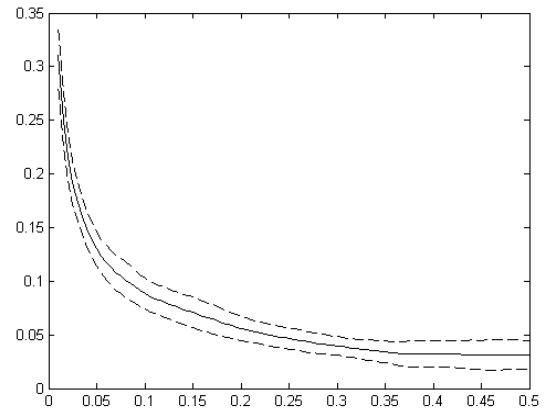


Рис. 2.59к. Зависимость  $\left\{ \overline{\Delta F^{(std)}} \right\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 0 дБ)

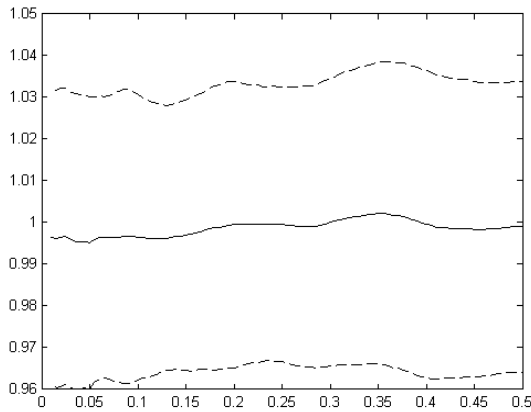


Рис. 2.59л. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -2 дБ)

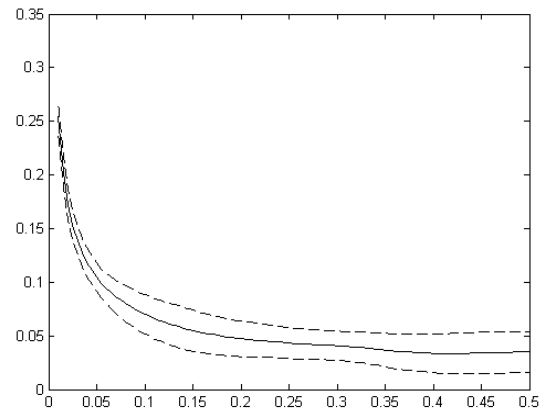


Рис. 2.59м. Зависимость  $\left\{ \overline{\Delta F^{(std)}} \right\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -2 дБ)

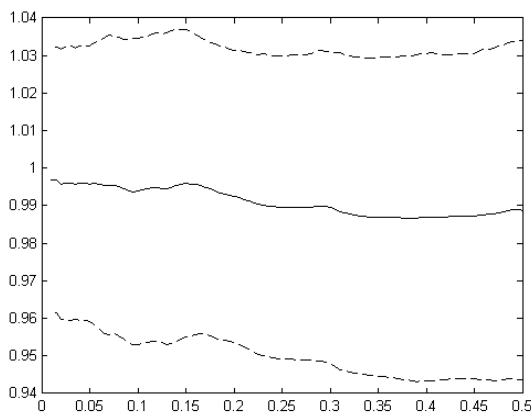


Рис. 2.59о. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -4 дБ)

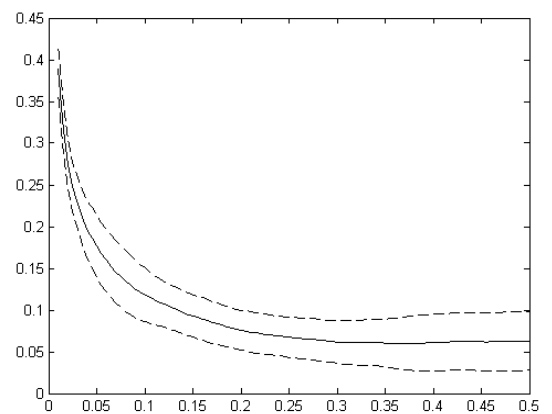


Рис. 2.59п. Зависимость  $\left\{ \overline{\Delta F^{(std)}} \right\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -4 дБ)

Из рис. 2.59 видно, что:

1) для каждого из рассмотренных отношений сигнал/(гауссов) шум вне зависимости от значения параметра  $L_k \cdot \Delta t$  величина  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  оказывается достаточно близкой к точному значению постоянной составляющей ВР  $F_N^{(2)}$ .

2) при уменьшении отношения сигнал/(гауссов) шум происходит увеличение интервалов  $[-\sigma(\Delta M_{j,k}), \sigma(\Delta M_{j,k})]$ ,  $[-\sigma(\Delta F_{j,k}), \sigma(\Delta F_{j,k})]$ ,

2) при рассмотренных отношениях сигнал/шум вид зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k = f(L_k \cdot \Delta t)$  оказывается одинаковым: быстрое убывание при изменении значений параметра  $L_k \cdot \Delta t$  в диапазоне  $[0; 0.25]$  с и медленное, когда  $L \cdot \Delta t \in [0.25; 0.5]$  с;

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. ВР, представляющие собой смесь гауссова шума и постоянной составляющей, с помощью метода SSA разделимы.

2. Для повышения оценки точности значений ряда  $F_N^{(2)}$  за счет уменьшения интервала  $[-\sigma(\Delta F_{j,k}), \sigma(\Delta F_{j,k})]$ , целесообразно использовать значения задержки  $L$  такие, что  $L \cdot \Delta t \in [0.25; 0.5]$  с.

### 2.3.2. Исследование разделимости ВР, представляющего собой смесь шума с равномерным законом распределения и постоянной составляющей

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР, представляющего собой смесь сигнала и шума с равномерным законом распределения. На рис. 2.60 представлены типичные зависимости собственных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N$  от их номера при различных отношениях сигнал/(равномерный) шум.

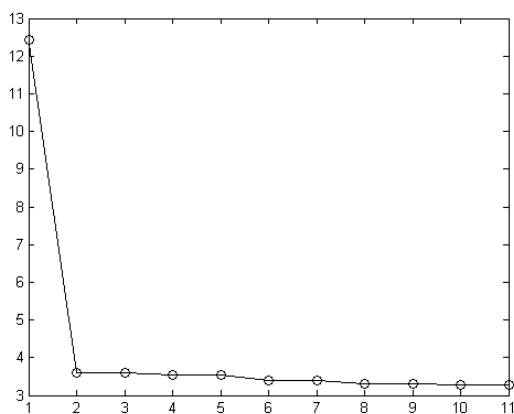


Рис. 2.60а. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется 19 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

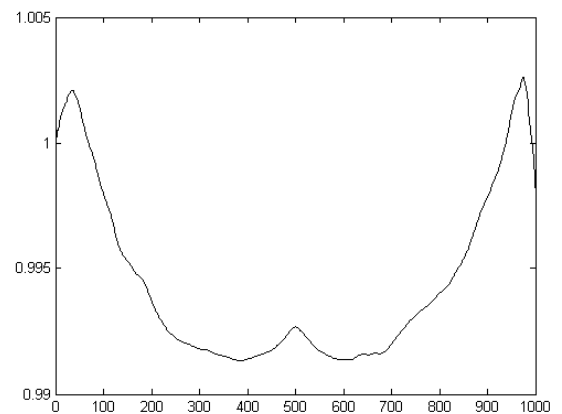


Рис. 2.60б. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется 19 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

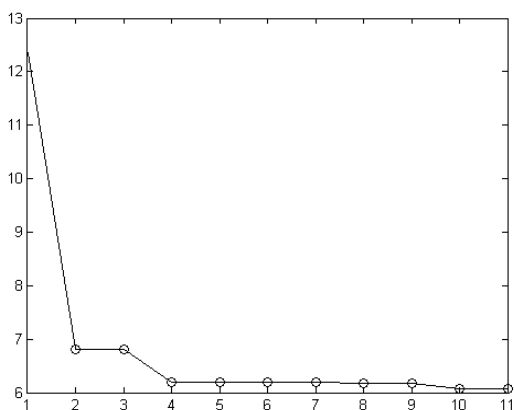


Рис. 2.60в. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется 6.7 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

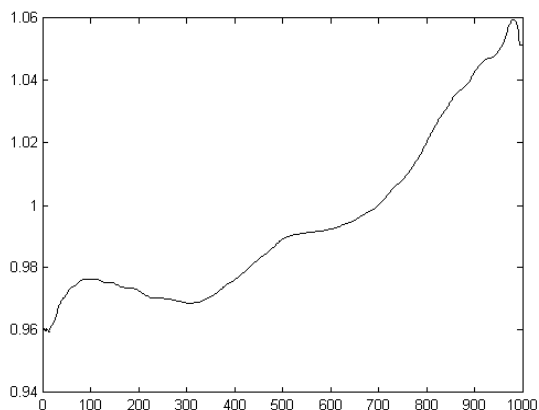


Рис. 2.60г. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется 6.7 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

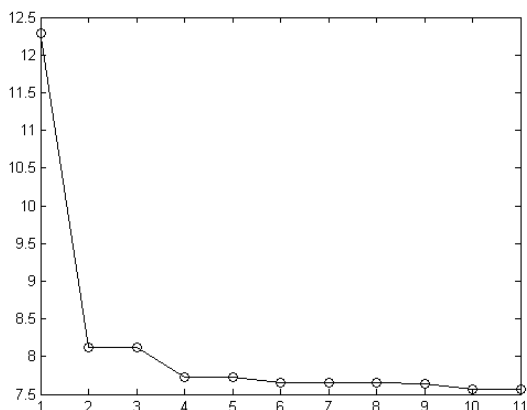


Рис. 2.60д. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется -0.3 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

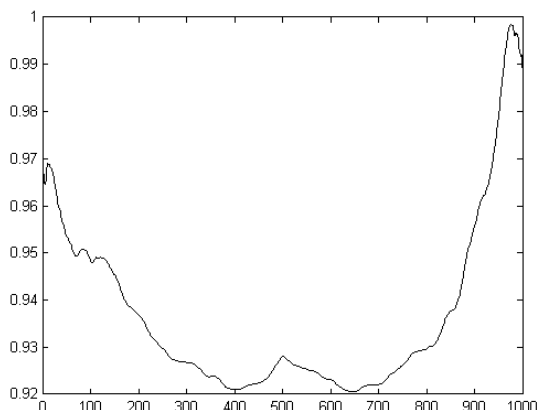


Рис. 2.60е. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется -0.3 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

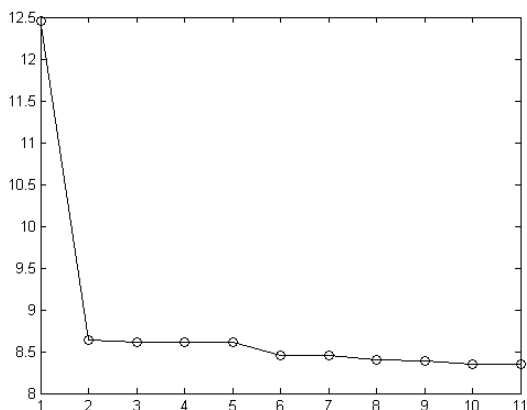


Рис. 2.60ж. Зависимость логарифма собственного числа от его номера (отношение сигнал/шум по мощности равняется -3.5 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

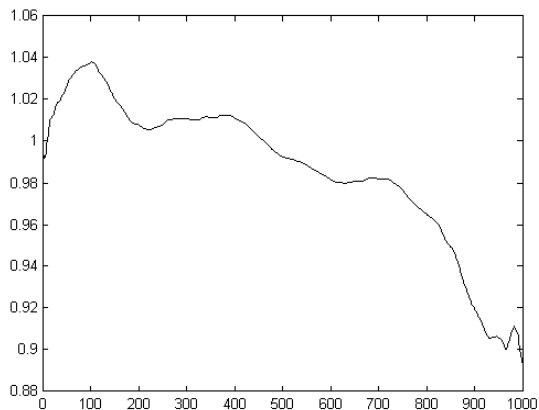


Рис. 2.60з. Компонента, восстановленная по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР (отношение сигнал/шум по мощности равняется -3.5 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

Из рис. 2.60 видно, что свойства собственных чисел выборочной траекторной матрицы и главной компоненты сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР  $F_N$ , представляющего собой смесь шума с равномерным законом распределения и постоянной величины, оказываются аналогичными рассмотренному выше случаю ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и постоянной величины.

Для подтверждения данных выводов, которые основывались на анализе выборочных реализаций ВР, представляющего собой смесь шума и постоянного временного ряда, было проведено статистическое моделирование, в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. Зависимости усредненных по ансамблям случайных реализаций средних значений  $\{\overline{\Delta M}\}_k$ , вычисляемых в соответствии с (2.27), и СКО  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$ , вычисляемых в соответствии с (2.28), ряда  $\Delta F_N^{(2)} = F_N^{(2)} - \tilde{F}_N^{(2)}$  от значения параметра  $L_k \cdot \Delta t$ , при различных отношениях сигнал/(гауссов) шум представлены на рис. 2.61. Здесь:  $N = 1000$ ,  $Number\_of\_Trial = 100$ ,  $L_k = 10, 15, \dots, 500$ . Для иллюстрации величины разброса величин  $\Delta M_{j,k}, \Delta F_{j,k}$  внутри ансамблей реализаций на рис. 2.60 также пунктирными линиями показаны зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k \pm \sigma(\Delta M_{j,k})$  (здесь  $\sigma(\Delta M_{j,k})$  вычисляется в соответствии с (2.29)), и  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k \pm \sigma(\Delta F_{j,k})$ , (здесь  $\sigma(\Delta F_{j,k})$  вычисляется в соответствии с (2.30)).

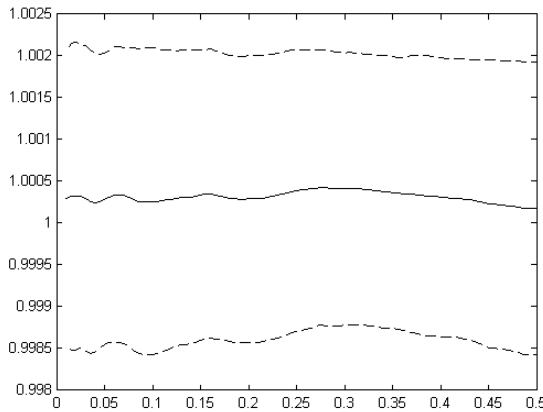


Рис. 2.61а. Зависимость  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 25 дБ)

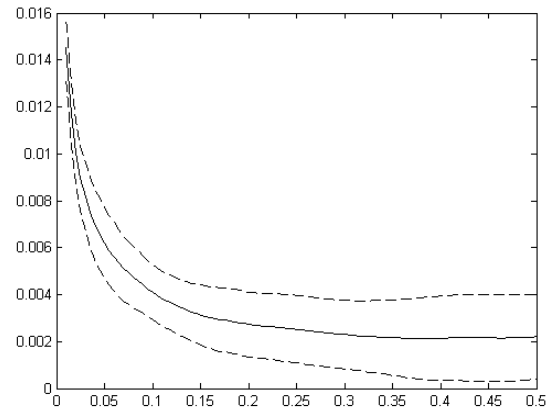


Рис. 2.61. Зависимость  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (отношение сигнал/шум по мощности равняется 25 дБ)

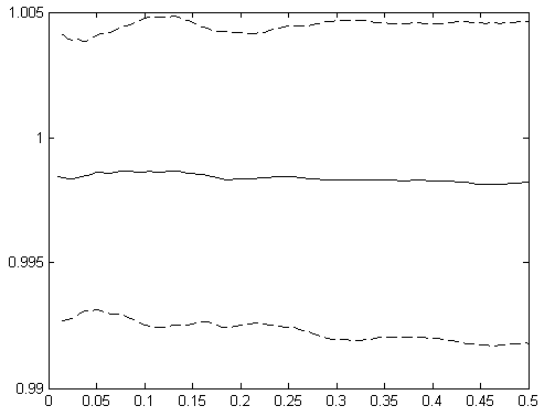


Рис. 2.61в. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 16.7 дБ)

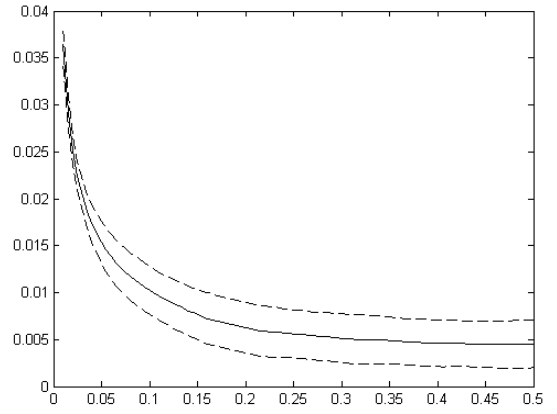


Рис. 2.61г. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 16.7 дБ)

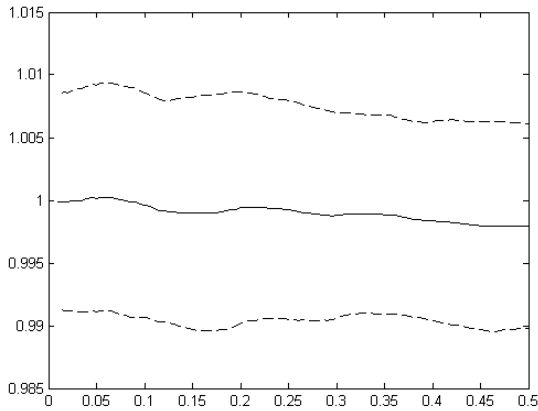


Рис. 2.61д. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 10.8 дБ)

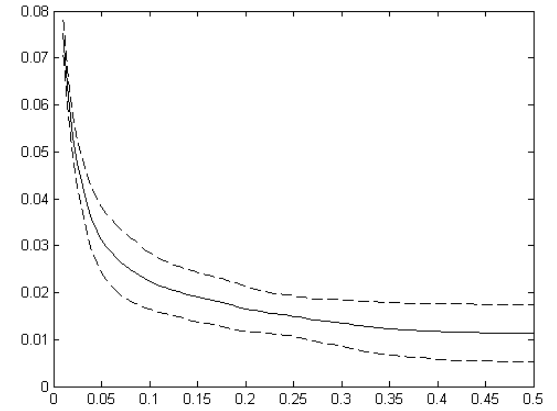


Рис. 2.61е. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 10.8 дБ)

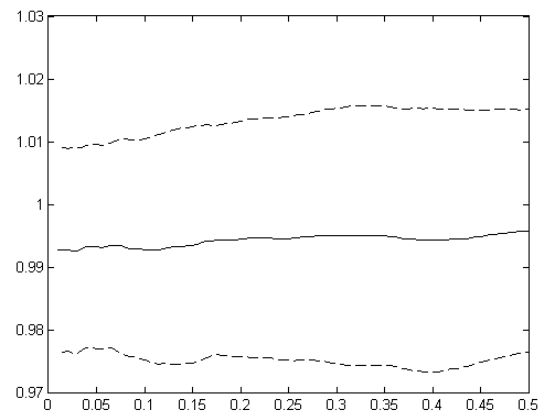


Рис. 2.61ж. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 4.8 дБ)

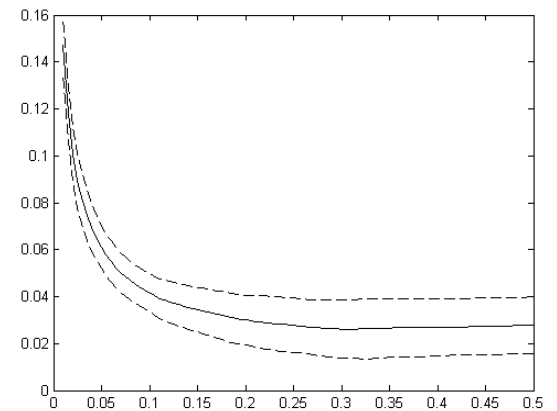


Рис. 2.61з. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 4.8 дБ)

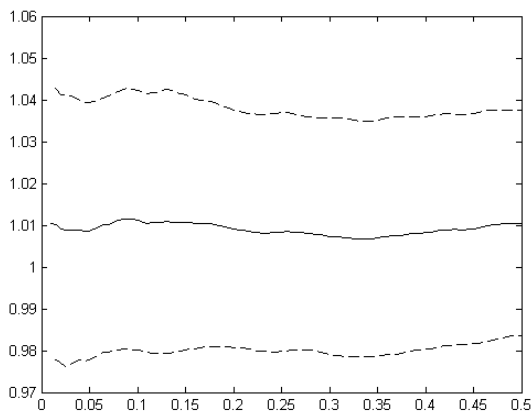


Рис. 2.61и. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 1.3 дБ)

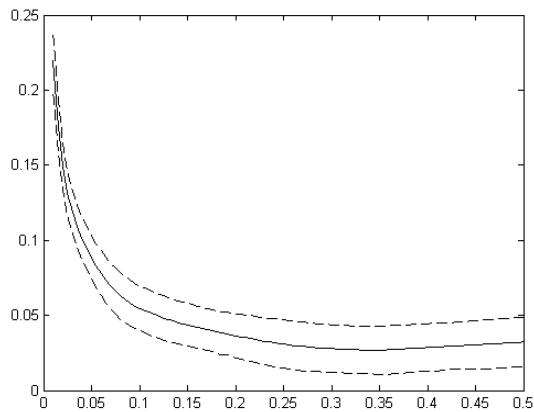


Рис. 2.61к. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется 1.3 дБ)

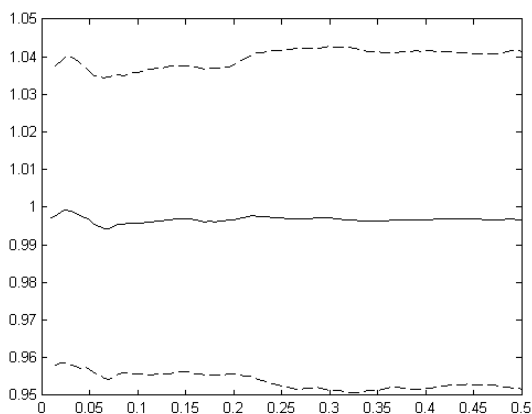


Рис. 2.61л. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -1.2 дБ)

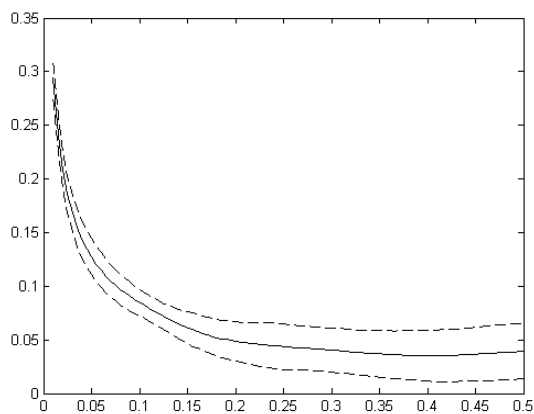


Рис. 2.61м. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -1.2 дБ)

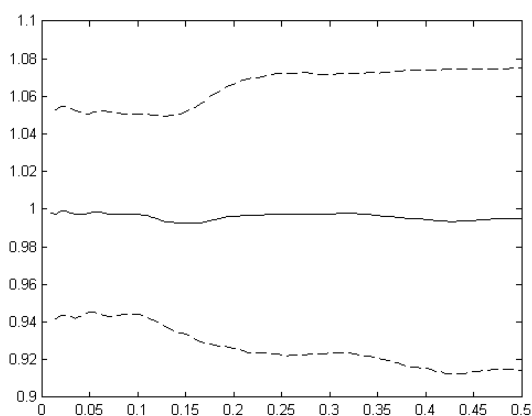


Рис. 2.61н. Зависимость  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -4.8 дБ)

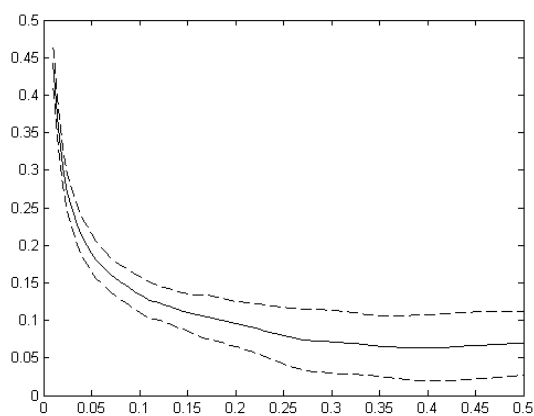


Рис. 2.61о. Зависимость  $\overline{\{\Delta F^{(std)}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$   
(отношение сигнал/шум по мощности равняется -4.8 дБ)

Сравнивая рис. 2.59, 2.61 видно, что свойства собственных чисел выборочной траекторной матрицы и компоненты ВР, выделяемой с помощью метода

SSA, гауссова шума и шума с равномерным законом распределения оказываются подобными. Данный результат, в свою очередь, позволяет сделать вывод о том, что метод SSA оказывается не чувствительным в виду функции распределения случайной ВР  $F_N^{(1)}$  и далее при рассмотрении вопросов разделимости ВР вида «случайная составляющая» + «детерминированный ряд» рассматривать шум, например, с нормальным законом распределения.

### 2.3.3. Исследование разделимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и периодической составляющей

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР, представляющего собой сумму независимых отсчетов шума с равномерным законом распределения и детерминированного ВР, представляющего собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = \sin(2\pi ft)$  ( $f$  – частота сигнала), вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1), i = \overline{1, N}, \Delta t = T_s/(N-1), T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(2)} = \sin(2\pi f t_i) = \sin(2\pi f \Delta t(i-1)) = \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

На рис. 2.62 представлены типичные зависимости собственных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N$  от их номера при различных отношениях сигнал/(гауссов) шум (здесь  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ).

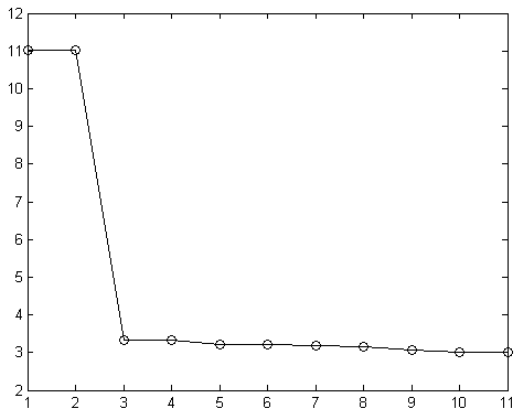


Рис. 2.62а. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 17 дб)

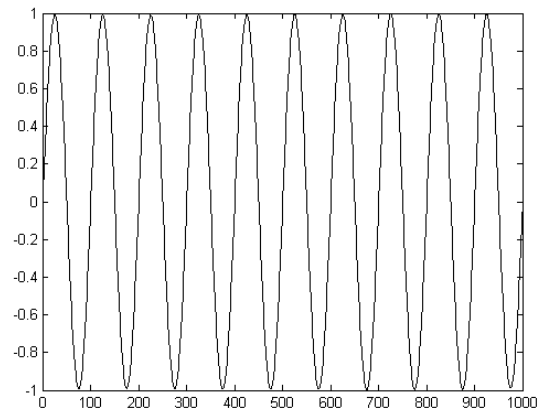


Рис. 2.62б. Компонента ВР  $F_N$ , восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 17 дб)



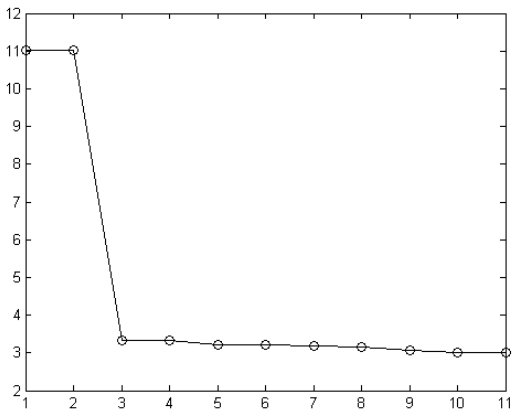


Рис. 2.62в. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 3дб)

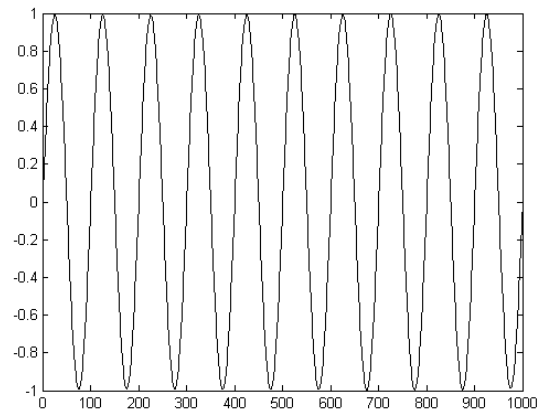


Рис. 2.62г. Компонента  $BP F_N$ , восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы  $BP F_N$ , ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 3 дб)

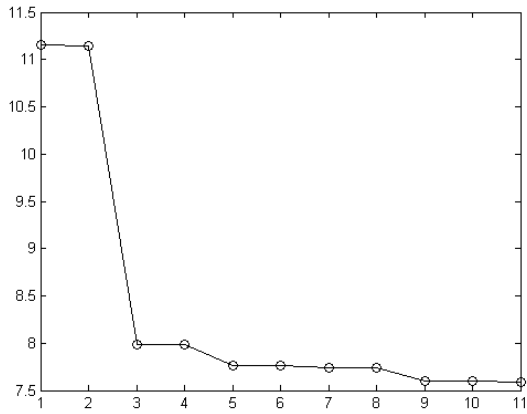


Рис. 2.62в. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется -3 дб)

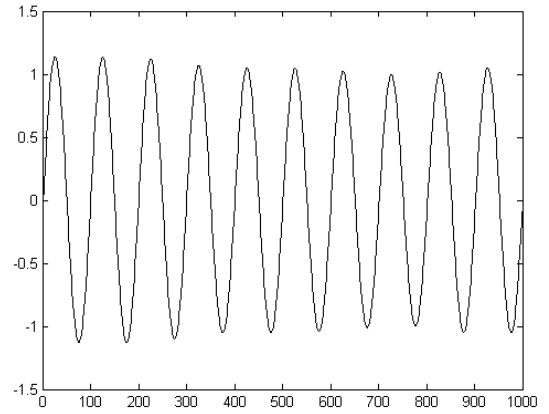


Рис. 2.62г. Компонента  $BP F_N$ , восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы  $BP F_N$  ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется -3 дб)

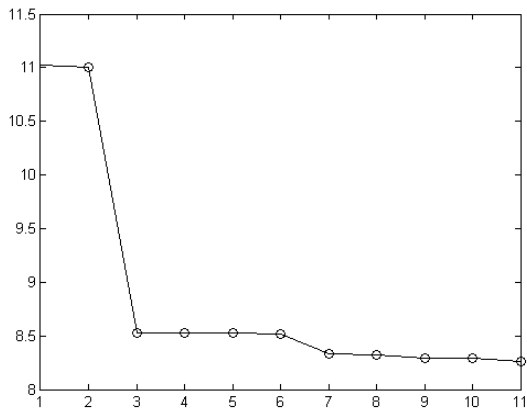


Рис. 2.62д. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется -6.4 дб)

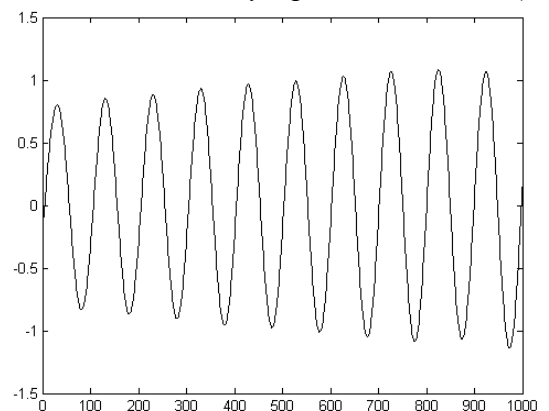


Рис. 2.62е. Компонента  $BP F_N$ , восстановленная по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы  $BP F_N$  ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется -6.4 дб)

Из рис. 2.61 видно, что при уменьшении отношения сигнал/шум значения первого и второго собственных чисел траекторной матрицы начинают отличаться друг от друга, кроме того происходит изменение формы компоненты ВР, восстановленной по первой и второй тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ .

В связи с обнаружением зависимости значений собственных чисел траекторной матрицы и формы компоненты ВР  $F_N$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , было проведено исследование, в ходе которого было проведено статистическое моделирование в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. В процессе моделирования при различных отношениях сигнал/шум были вычислены следующие зависимости, усреднённые по ансамблям реализаций: зависимости первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от значений параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – параметр сдвига, и, соответственно, разности между соответствующими точными значениям ВР  $F_N^{(2)}$  и значениями компоненты, восстановленной по первой и второй тройкам сингулярного разложения ВР  $F_N$ , а также зависимости СКО данных разностей от параметра  $L \cdot \Delta t$ . Полученные в ходе исследования результаты для случая  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ,  $N_{Trial} = 100$  представлены на рис. 2.63–2.70.

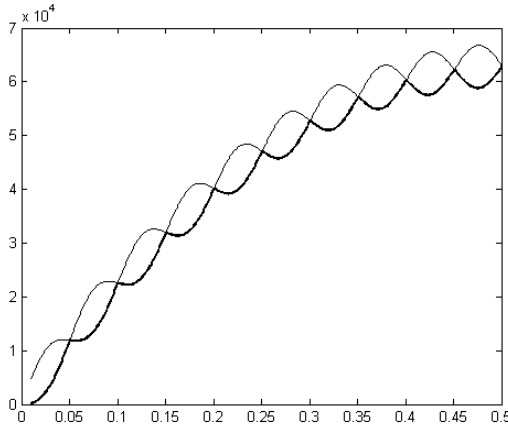


Рис. 2.63а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 17 дб)

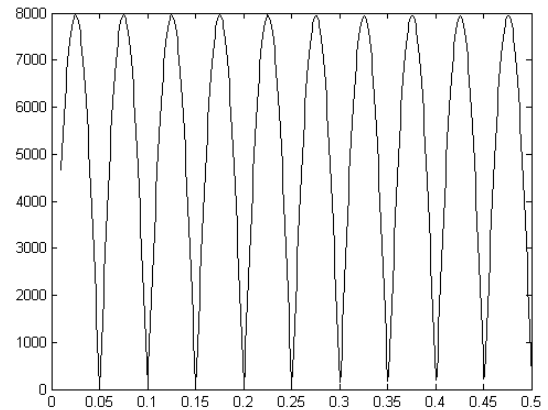


Рис. 2.63б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 17 дб)

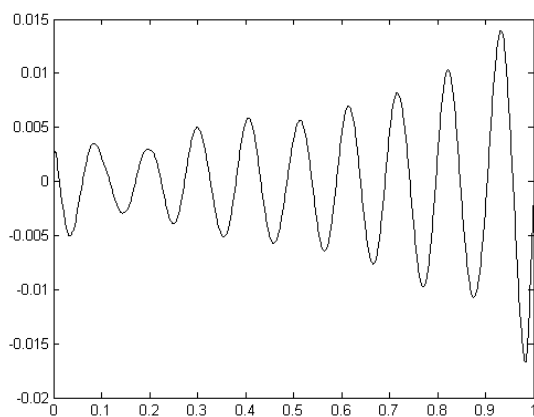


Рис. 2.63в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 17 дБ)

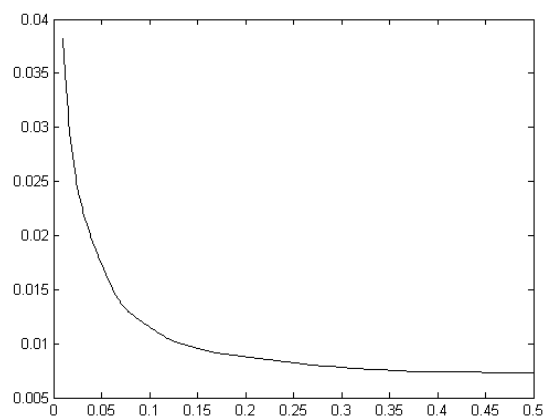


Рис. 2.63г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 17 дБ)

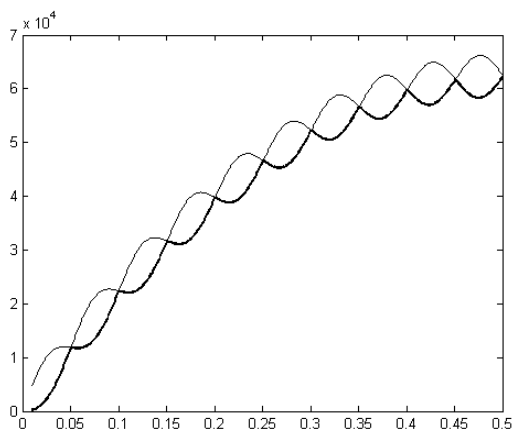


Рис. 2.64а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 9 дБ)

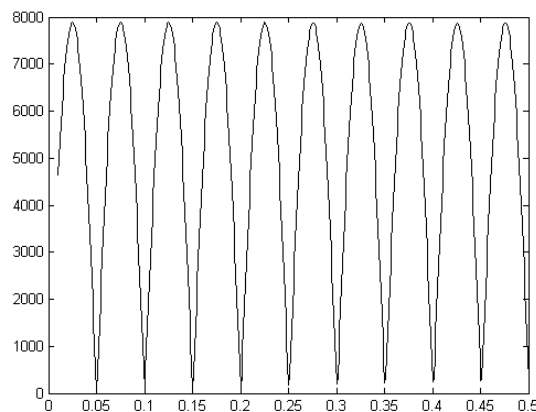


Рис. 2.64б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 9 дБ)

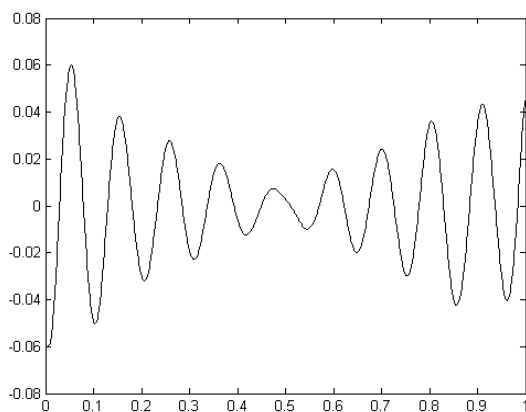


Рис. 2.64в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 9 дб)

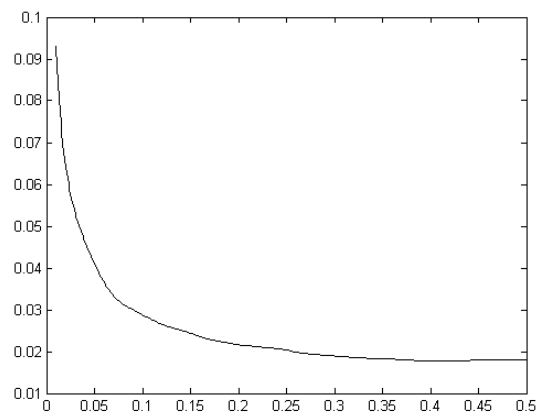


Рис. 2.64г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 9 дб)

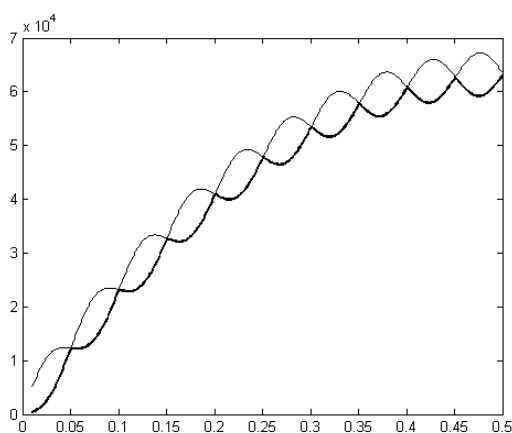


Рис. 2.65а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3 дб)

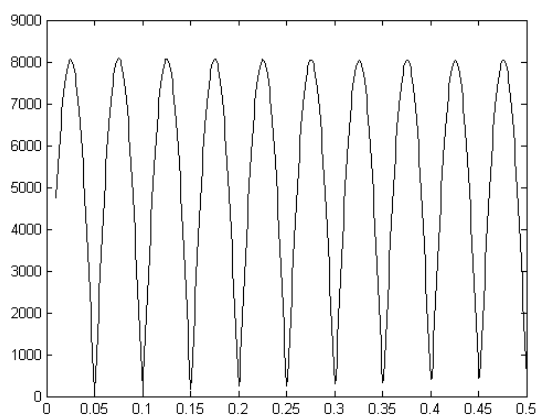


Рис. 2.65б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3 дб)

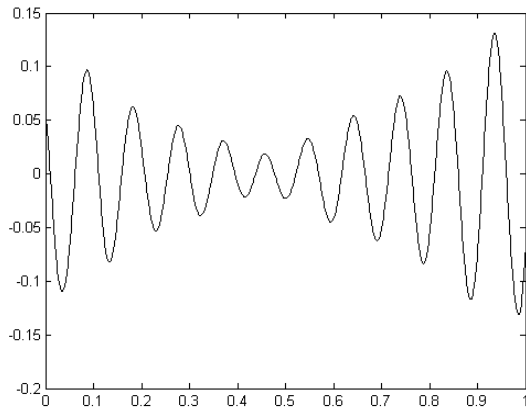


Рис. 2.65в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3 дб)

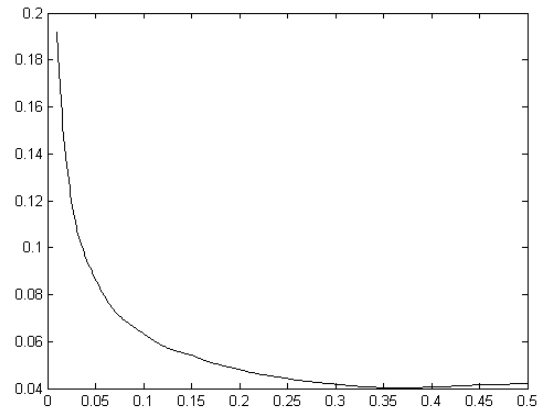


Рис. 2.65г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3 дб)

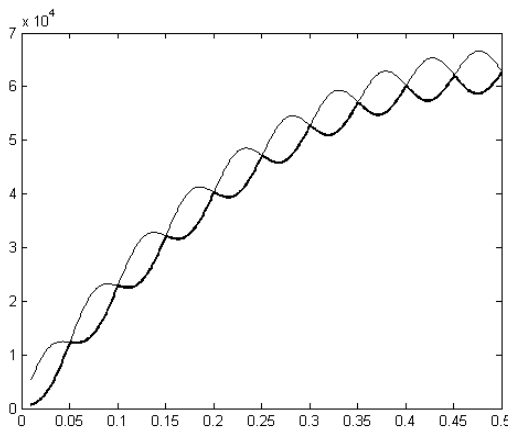


Рис. 2.66а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дб)

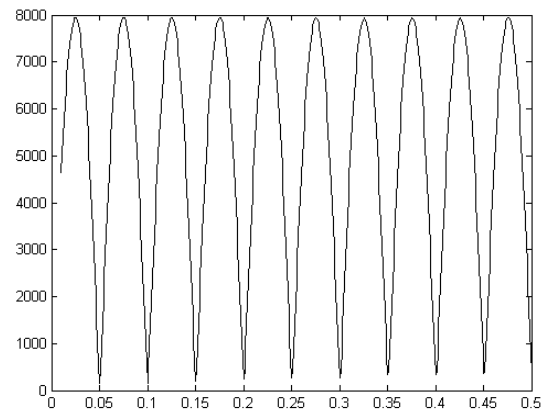


Рис. 2.66б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дб)

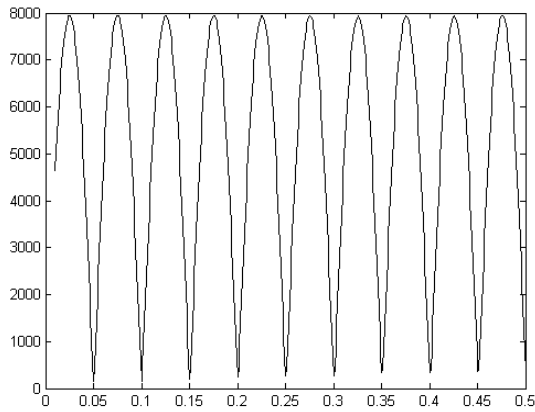


Рис. 2.66в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дБ)

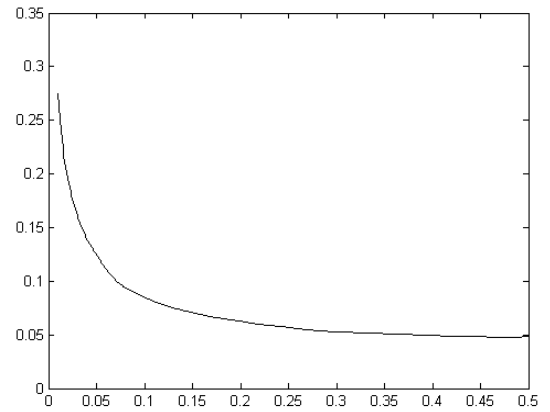


Рис. 2.66г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дБ)

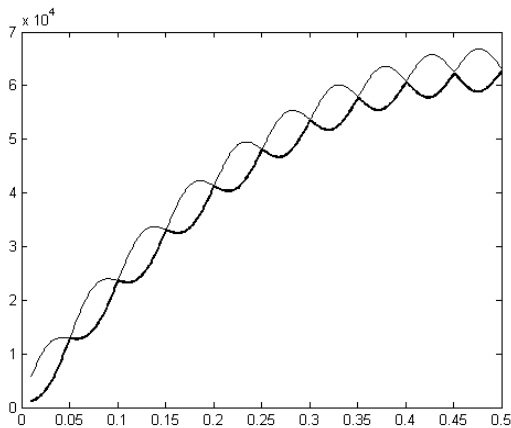


Рис. 2.67а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дБ)

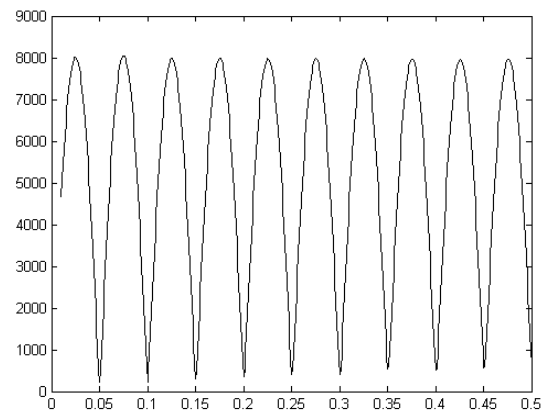


Рис. 2.67б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дБ)

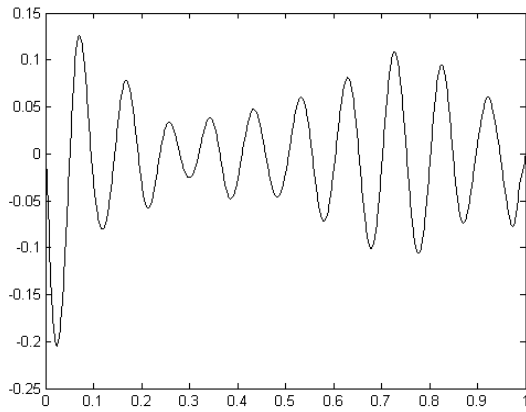


Рис. 2.67в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дб)

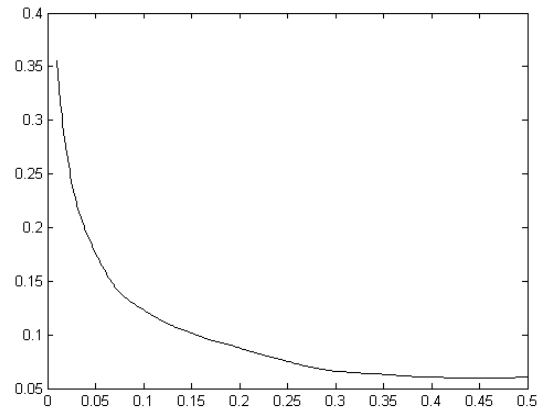


Рис. 2.67г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-0.4$  дб)

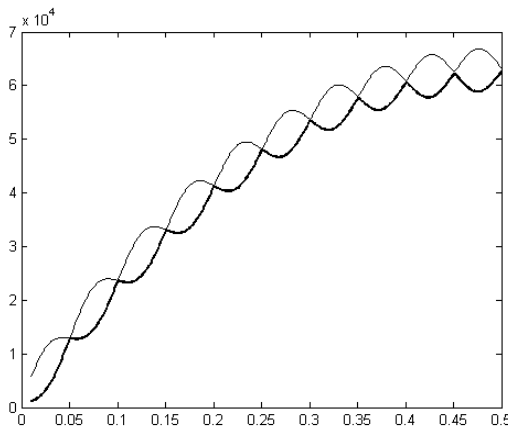


Рис. 2.68а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-3.0$  дб)

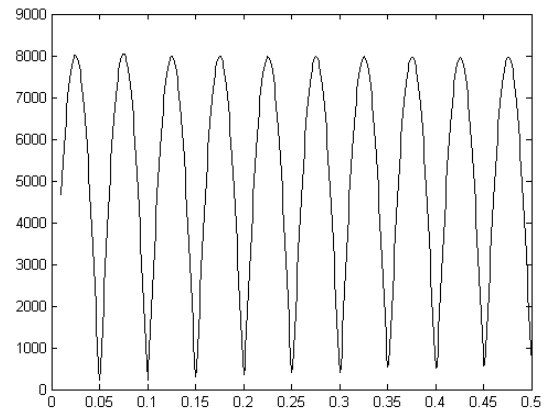


Рис. 2.68б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-3.0$  дб)

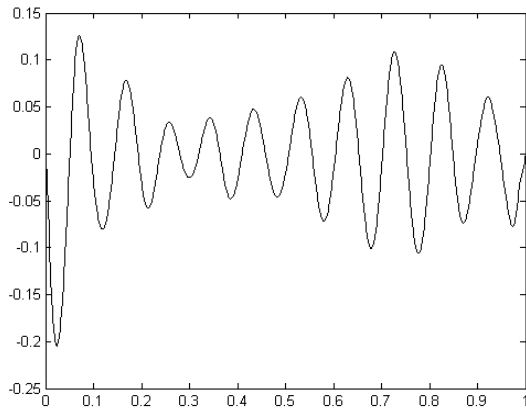


Рис. 2.68в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-3.0$  дБ)

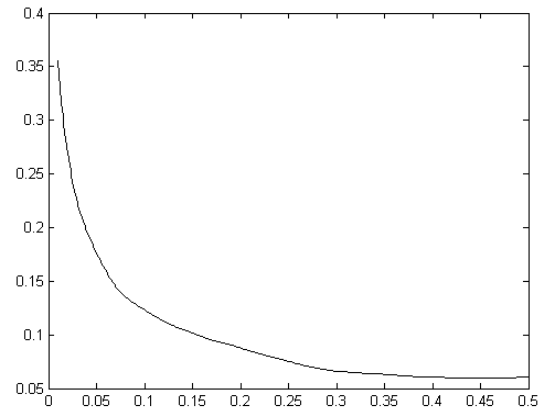


Рис. 2.68г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-3.0$  дБ)

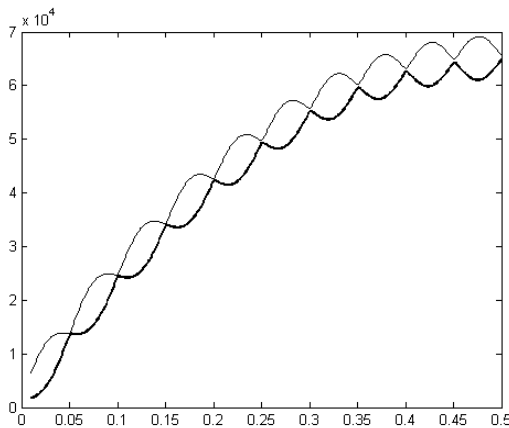


Рис. 2.69а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-5.0$  дБ)

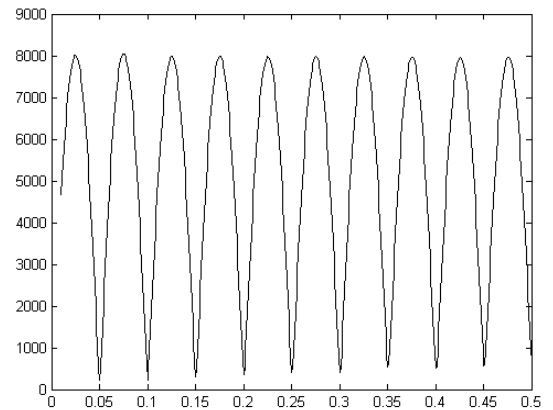


Рис. 2.69б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-5.0$  дБ)



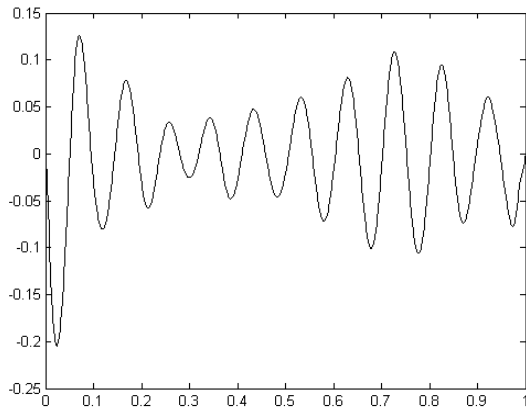


Рис. 2.69в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-5.0$  дб)

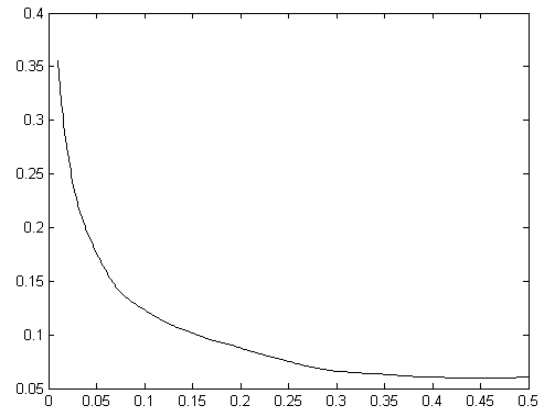


Рис. 2.69г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций SKO разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-5.0$  дб)

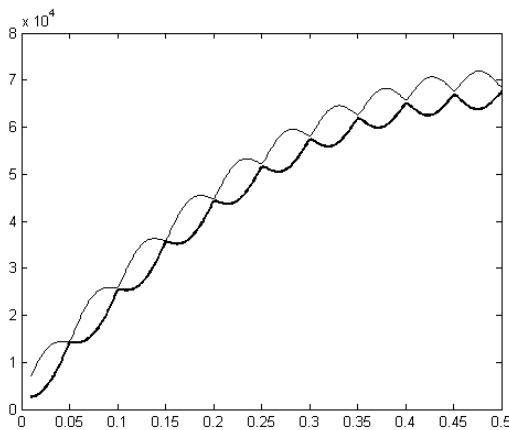


Рис. 2.70а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-7.0$  дб)

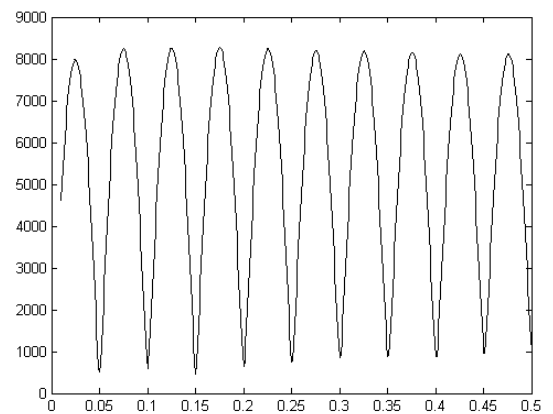


Рис. 2.70б. Зависимость разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-7.0$  дб)

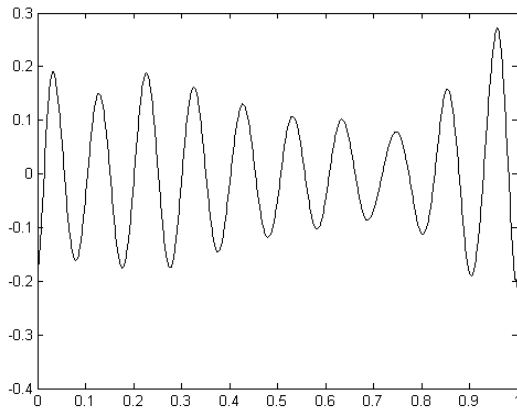


Рис. 2.70в. Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-7.0$  дБ)

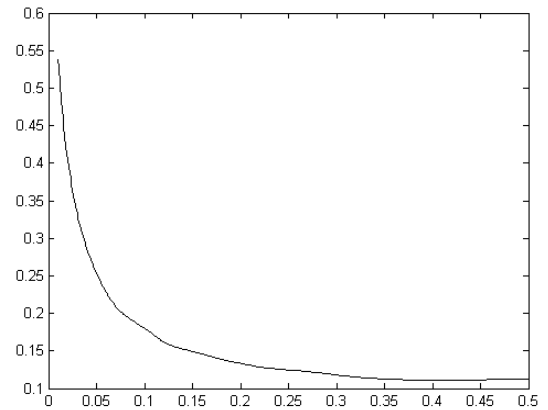


Рис. 2.70г. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-7.0$  дБ)

Из рис. 2.63–2.70 видно, что:

1) При уменьшении отношения сигнал/шум для значений параметра сдвига  $L$ , при которых выполняется условие

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots, 10, \quad (2.31)$$

происходит увеличение разности между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$ .

2) Для всего рассмотренного диапазона значений отношения сигнал/шум усредненная по ансамблю реализаций зависимость СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , монотонно убывает при увеличении параметра  $L \cdot \Delta t$  в диапазоне  $[0, 0.3]$  с и остается практически постоянной при  $L \cdot \Delta t > 0.3$  с.

Отметим, что приведенные выше выводы, сделанные по результатам анализа зависимостей рис. 2.63–2.70, кажутся противоречащими друг другу. С одной стороны, разность между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$  для значений параметра  $L \cdot \Delta t$ , удовлетворяющих условию (2.31), оказывается возрастающей при увеличении данного параметра. С другой стороны, СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , уменьшается при увеличении параметра  $L \cdot \Delta t$ . С нашей точки зрения, данный факт объясняется тем, что одновременно с увеличением абсо-

лютного значения рассматриваемой разности первого и второго собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$ , которая, как видно, из рис. 2.62г.–2.69г., может быть аппроксимирована линейной функцией ( $\sim L \cdot \Delta t$ ), происходит увеличение значений первого и второго собственных чисел по параболическому закону ( $\sim (L \cdot \Delta t)^2$ ). Следовательно, разность между первым и вторым собственными числами выборочной траекторной матрицы ВР, отнесенная к значению любого из обсуждаемых собственных чисел будет уменьшаться ( $\sim (L \cdot \Delta t)^{-1}$ ). Соответственно, относительная погрешность вычисленных значений собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA ВР  $F_N$  будет меньше, что и подтверждают соответствующие зависимости, представленные на рис. 2.63г.–2.70г.

Таким образом, в методе SSA для получения более точных значений периодической составляющей ВР вида «шум + периодическая составляющая» следует использовать значения параметра сдвига обеспечивающих максимально возможные для данного ряда значения параметра сдвига  $L$ .

### 2.3.3. Исследование разделимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и тренда

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР, представляющего собой сумму независимых отсчетов шума с равномерным законом распределения и детерминированного ВР, представляющего собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = \exp(-\alpha t)$ , вычисленные в узлах временной сетки  $t_i = \Delta t(i-1), i = \overline{1, N}, \Delta t = T_s / (N-1), T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(2)} = \exp(-\alpha t_i) = \exp(-\alpha \Delta t(i-1)) = \exp\left(-\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

На рис. 2.71–2.74 представлены типичные зависимости собственных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N$  от их номера при различных отношениях сигнал/(гауссов) шум (здесь  $\alpha = -0.8 \text{ с}^{-1}, T_s = 1 \text{ с}, N = 1000$ ).

Из рис. 2.71–2.74 видно, что в не зависимости от отношения сигнал/шум первое собственное число выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N$ , а, соответственно, и первая тройка сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  соответствуют компоненте ВР  $F_N^{(2)}$ . Разности между компонентой ВР  $F_N$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$ , напротив, оказываются зависящими от отношения сигнал/шум – уменьшение отношения сигнал/шум приводит к увеличению области значений обсуждаемой разности. При этом среднее значения рассматриваемых разностей оказываются близкими к нулю, что позволяет считать смещение относительно ВР  $F_N^{(2)}$  получаемой оценки тренда в рассмотренном диапазоне отношений сигнал/шум близкими к нулю.

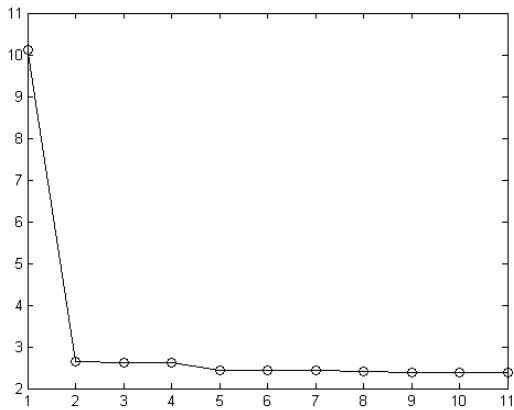


Рис. 2.71а. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 17 дб)

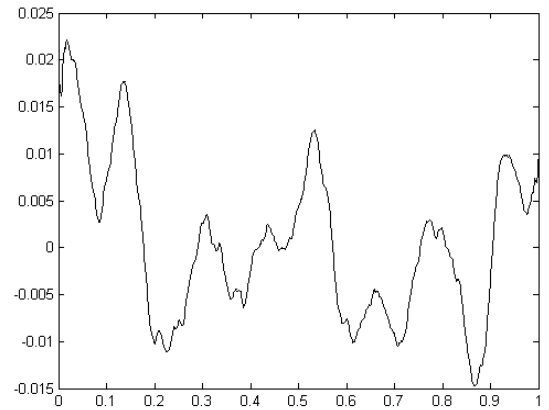


Рис. 2.71б. Разность между компонентой  $BP F_N$ , восстановленной по первой собственной тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы  $BP F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$  ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 17 дб)

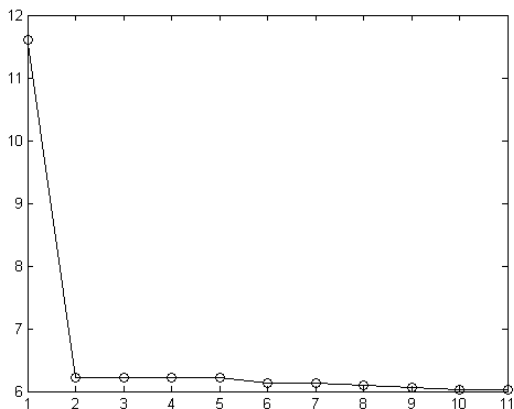


Рис. 2.72а. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется 3 дб)

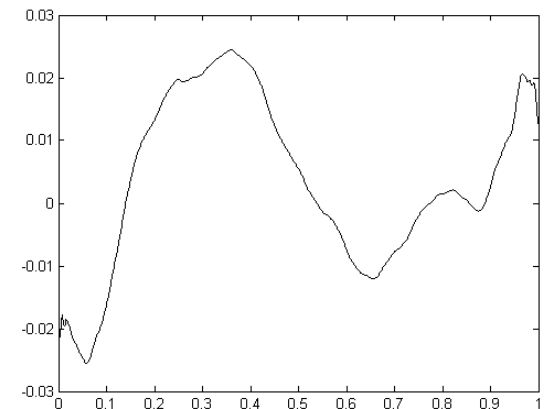


Рис. 2.72б. Разность между компонентой  $BP F_N$ , восстановленной по первой собственной тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы  $BP F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$  ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется -3 дб)

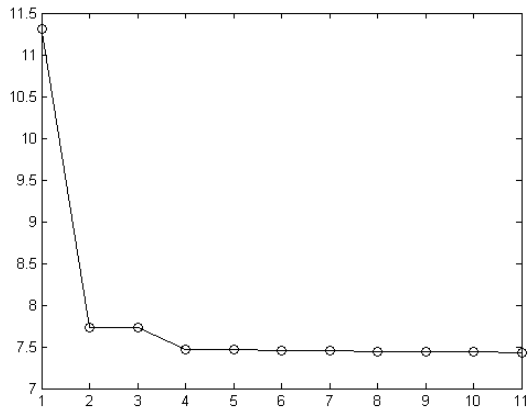


Рис. 2.73а. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется  $-3$  дб)

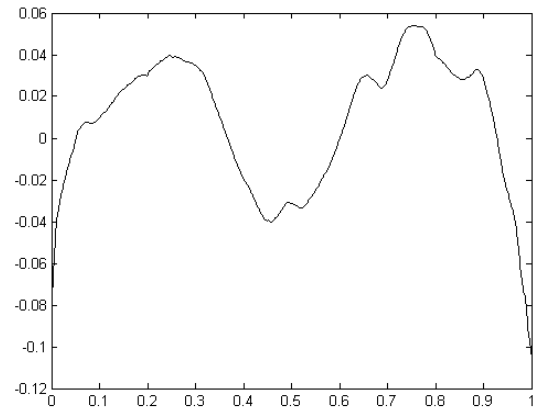


Рис. 2.73б. Разность между компонентой ВР  $F_N$ , восстановленной по первой собственной тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$  ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется  $-3$  дб)

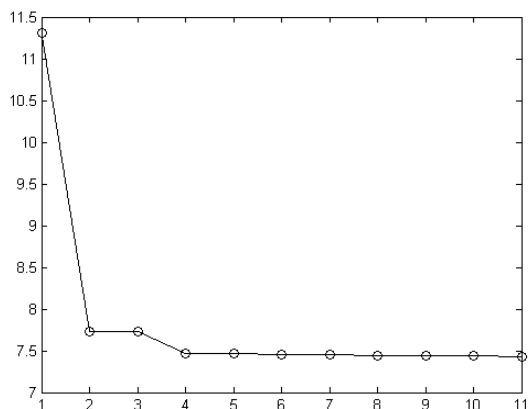


Рис. 2.74а. Зависимость логарифма собственных чисел выборочной траекторной матрицы от их номера ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется  $-6$  дб)

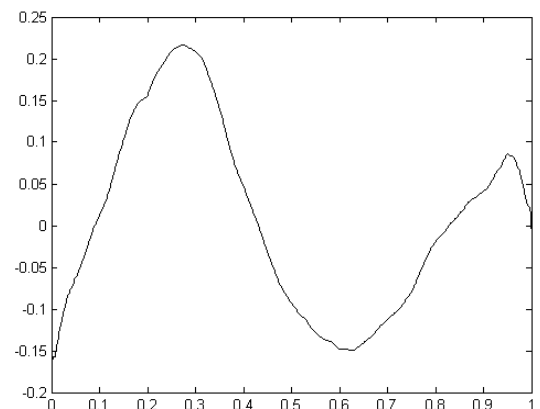


Рис. 2.74б. Разность между компонентой ВР  $F_N$ , восстановленной по первой собственной тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$  ( $L \cdot \Delta t = 0.5$ , отношение сигнал/шум равняется  $-6$  дб)

В связи с обнаружением зависимости разности между компонентой ВР  $F_N$ , восстановленной по первой собственной тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$ , было проведено исследование, в ходе которого было выполнено статистическое моделирование в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. В процессе моделирования при различных отношениях сигнал/шум были вычислены следующие зависимости, усреднённые по ансамблям реализаций: среднее значение разности

сти между компонентой ВР  $F_N$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , и рядом  $F_N^{(2)}$ , от значений параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – параметр сдвига, и, соответственно, зависимость СКО обсуждаемой разности от параметра  $L \cdot \Delta t$ . Полученные в ходе исследования результаты для случая  $\alpha = -0.8$ , Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ,  $Number\_of\_Trial = 100$  представлены на рис. 2.75–2.80.

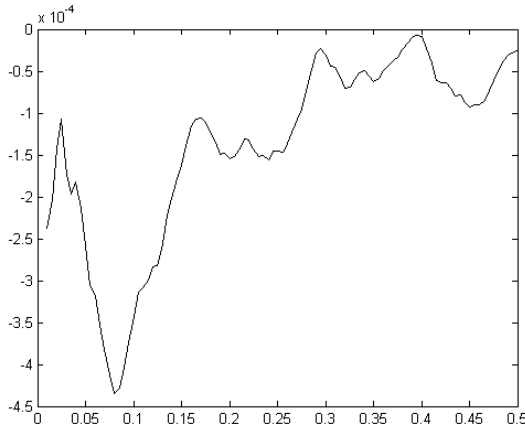


Рис. 2.75а. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$ , и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 17.0 дб)

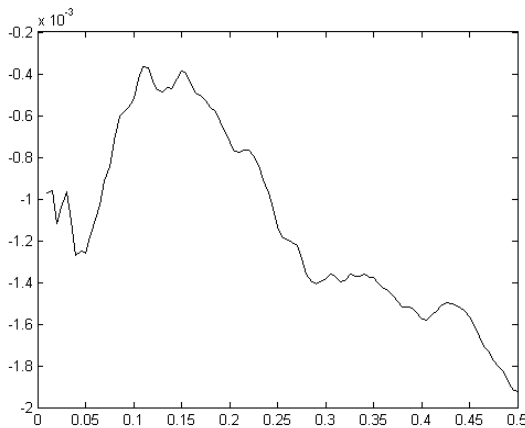


Рис. 2.76а. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$ , и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сиг-

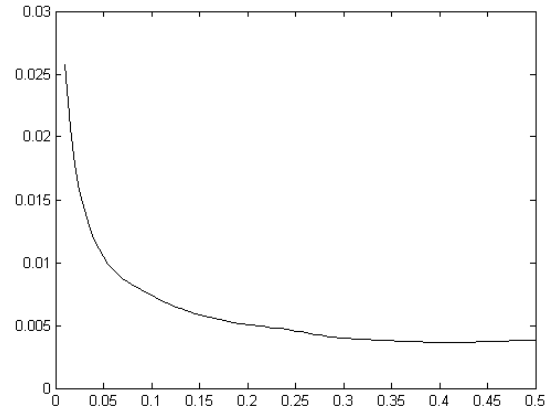


Рис. 2.75б. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$ , и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 17.0 дб)

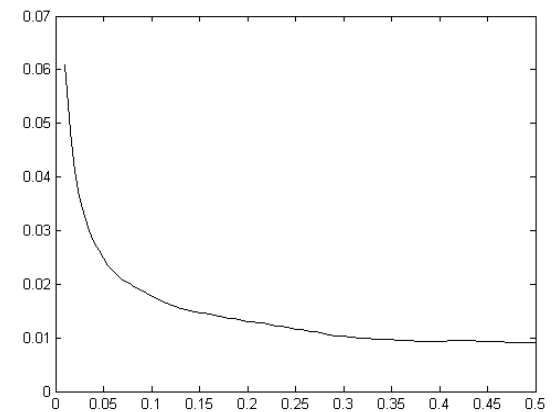


Рис. 2.76б. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$ , и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется

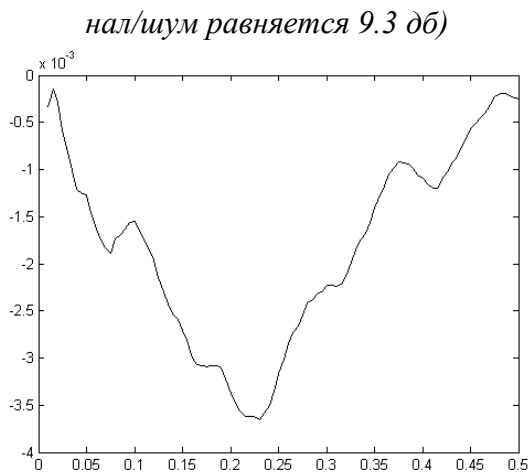


Рис. 2.77а. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3.4 дб)

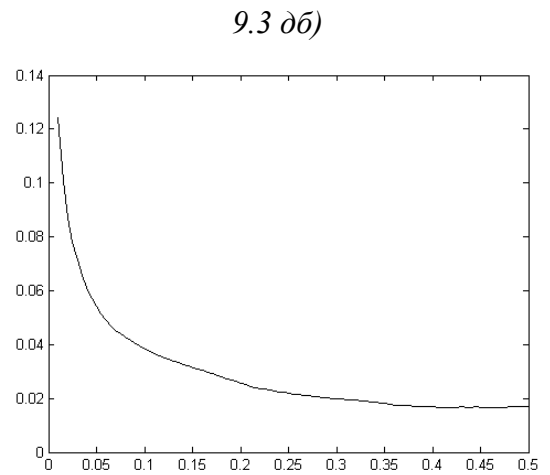


Рис. 2.77б. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3.4 дб)

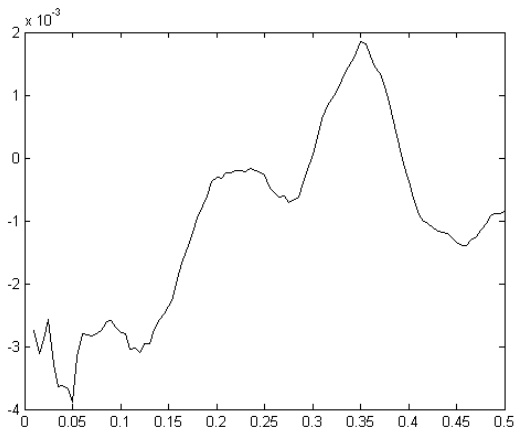


Рис. 2.78а. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3.4 дб)

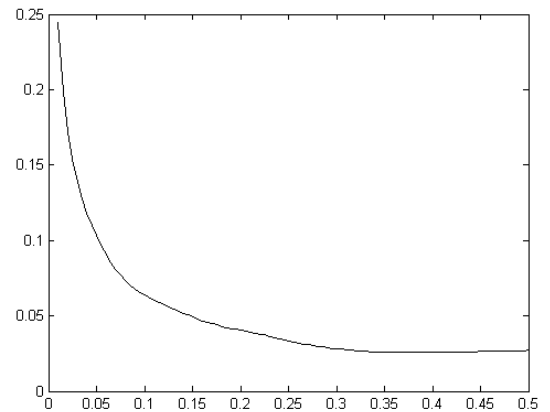


Рис. 2.78б. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется 3.4 дб)

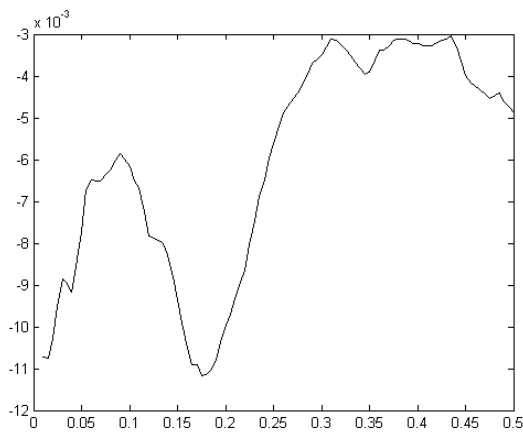


Рис. 2.79а. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-2.9$  дб)

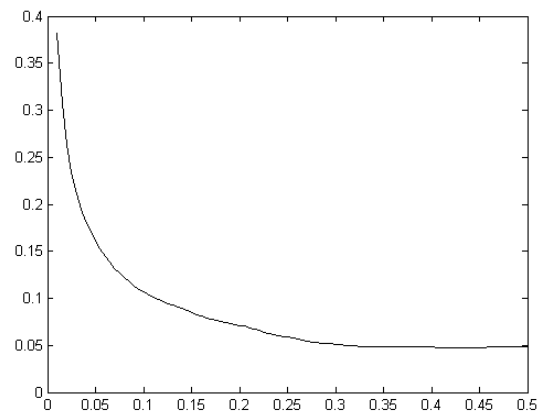


Рис. 2.79б. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-2.9$  дб)

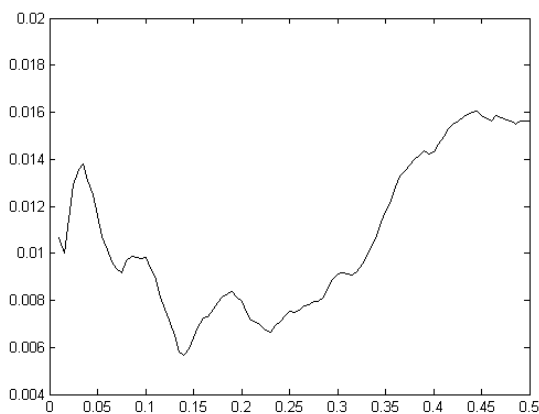


Рис. 2.80а. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-8.7$  дб)

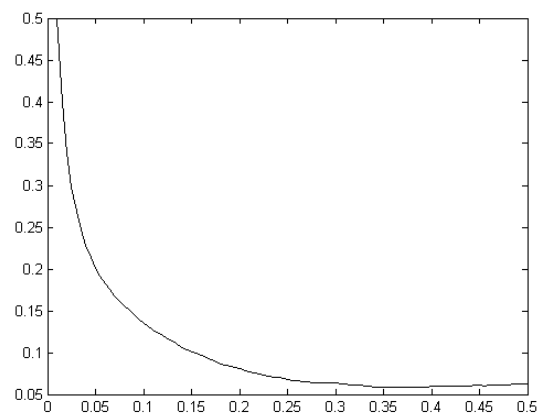


Рис. 2.80б. Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  от величины  $L \cdot \Delta t$  с (отношение сигнал/шум равняется  $-8.7$  дб)

Из рис. 2.75–2.80 видно, что:



1) Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , от параметра  $L \cdot \Delta t$  не описывается детерминированной функцией.

2) При уменьшении отношения сигнал/шум происходит увеличение диапазона возможных значений усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , от параметра  $L \cdot \Delta t$ . Однако, принимая во внимание, что данная величина оказывается малой в сравнении со средним значения ВР  $F_N^{(2)}$  (0.71), можно считать получаемые при этом оценки несмещенными.

3) Для всего рассмотренного диапазона значений отношения сигнал/шум усредненная по ансамблю реализаций зависимость СКО разности между точными значениями ВР  $F_N$  и соответствующими значениями компоненты  $F_N^{(2)}$ , восстановленной по первой и второй собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ , монотонно убывает при увеличении параметра  $L \cdot \Delta t$  в диапазоне  $[0, 0.3]$  с и остается практически постоянной при  $L \cdot \Delta t > 0.3$  с.

Следовательно, при анализе реальных ВР вида «шум + тренд» следует использовать такие параметры сдвига, чтобы выполнялось условие  $L \cdot \Delta t > 0.3$ .

## 2.4. Выводы

1. Впервые в методе SSA для исследования проблемы делимости ВР вида «шум + детерминированная составляющая» предложено использовать статистическое моделирование.

2. Результаты статистического моделирования свидетельствуют о делимости ВР вида «шум + const», «шум + периодическая составляющая», «шум + тренд» в не зависимости от вида функции распределения шума.

3. Даны научно обоснованные рекомендации по выбору для рассмотренных видов ВР значений сдвига  $L$ .

### Глава 3. Применение метода SSA для анализа и прогнозирования временных рядов

В данной главе рассмотрен опыт применения подхода, развитого в предыдущей главе, при использовании метода SSA для анализа и прогнозирования некоторых известных временных рядов, в том числе: ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа [117] и ВР, содержащего среднесуточные и среднечасовые значения цен на электроэнергию в [76].

#### 3.1. Анализ ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Число Вольфа  $R$  или относительное цюрихское число солнечных пятен является одним из главных индексов солнечной активности. Суточный индекс активности пятен  $R$ , определенный как

$$R = k(10g + s),$$

где  $S$  – число отдельных пятен,  $g$  – число групп пятен и  $k$  – фактор обсерватории (обычно меньший 1), учитывающий суммарный вклад условий наблюдений, тип телескопа, и приводящий наблюдаемые величины к стандартным цюрихским числам.

В настоящее время работу по созданию и распространению чисел Вольфа ведет Королевская обсерватория Бельгии (Royal Observatory of Belgium), на сайте [76] которой помещены таблицы и графики среднемесячных чисел Вольфа, начиная с 1749 г.

В связи с тем, что процессы, протекающие на Солнце, оказывают непосредственное влияние на геофизические и биологические процессы Земли [17, 34, 84, 85, 114], задача исследования временного ряда, описывающего динамику числа солнечных пятен, весьма актуальна. Это, в том числе подтверждается, продолжающимися в настоящее время активными поисками методов обработки данного временного ряда (см., например, [54, 63, 88]). Напомним, что основная трудность анализа рассматриваемого временного ряда обусловлена его нестационарностью. Отметим, что на сегодняшний день универсальных методов, пригодных для анализа частотно-временных характеристик нестационарных временных рядов, не существует.

Необходимо также отметить, особое место рассматриваемой задачи в истории развития методов спектрального оценивания [52], поскольку именно на ней проходили апробацию все известные на сегодняшний день методы частотного анализа временных сигналов (классические, параметрические, непараметрические). Ссылки на соответствующие оригинальные работы можно найти в [52].

Отметим, что ранее метода SSA к анализу ВР, содержащего значения чисел Вольфа за период с января 1749 г. по март 2008 г. ( $N = 3111$ ) (рис. 3.1), уже применялся [62]. В данной работе автором был использован рекомендованный в [20] размер окна сдвига  $L = 1556$ , обеспечивающий, как ожидалось, наиболее детальный анализ данного ВР. (Отметим, что в целом, полученные результаты

оказались согласованными с результатами работы [63], в которой для исследования обсуждаемого ВР использовался вейвлет-анализ [9, 16].

В связи с необходимостью проведения сравнительного анализа результатов, полученных в [62], с соответствующими результатами, полученными при использовании методики выделения ГК на основе анализа разностей собственных чисел выборочной траекторной матрицы, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от размера окна сдвига, представляется целесообразным привести самостоятельно полученные результаты для ВР, содержащего значения чисел Вольфа за период с января 1749 г. по май 2012 г. ( $N = 3162, L = 1581$ ).

Зависимость квадратного корня, извлекаемого из собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР от его номера, а также мгновенные значения первых 24-ти собственных векторов выборочной траекторной матрицы ВР, объясняющие 92.0% его дисперсии, представлены на рис. 3.2, 3.3, соответственно.

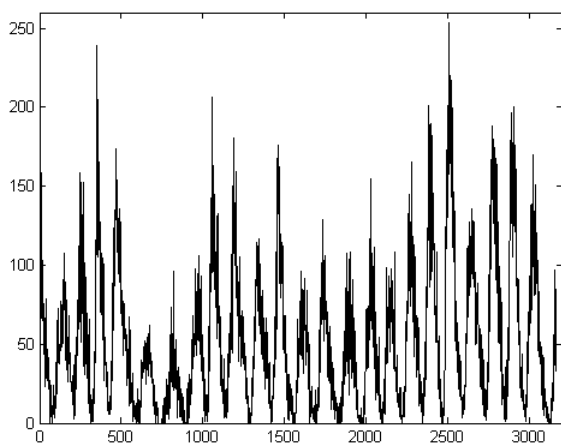


Рис. 3.1. Зависимость мгновенных среднемесячных значений чисел Вольфа от времени в период с января 1749 г. по май 2012 г.

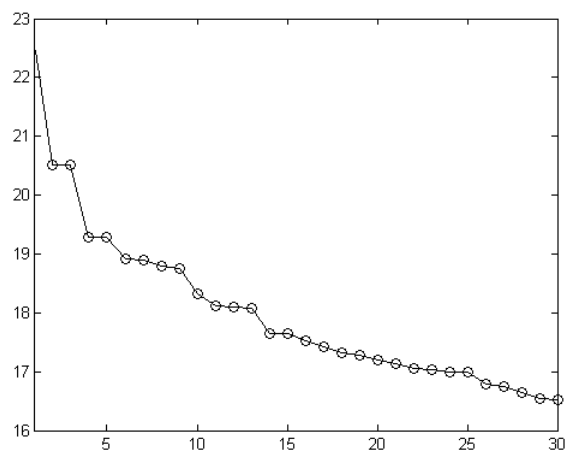


Рис. 3.2. Зависимость логарифма собственного числа выборочной траекторной матрицы ВР, содержащего мгновенные среднемесячные значения чисел Вольфа от времени период с января 1749 г. по май 2012 г., от его номера

Из рис. 3.2, 3.3 видно, что если принимать во внимание близость последовательных значений собственных чисел (соответственно, близость дисперсий, объясняемых соответствующим вектором), а также «степень похожести» собственных векторов друг на друга, то становится понятно, что таковых пар оказывается весьма много, например, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, 11–12 и т.д. Причем, с уменьшением значения собственного значения, появляются собственные векторы периодическая компоненты которых имеют частоты, значения которых противоречат физическим представлениям о процессах протекающих на Солнце (например, у собственных векторов № 20–23 период гармонической составляющей оказывается равным  $\approx 5,8$  года). Данное свидетельствует, что для обоснованного выбора собственных векторов исследуемого ВР требуются привлечение дополнительных критериев.

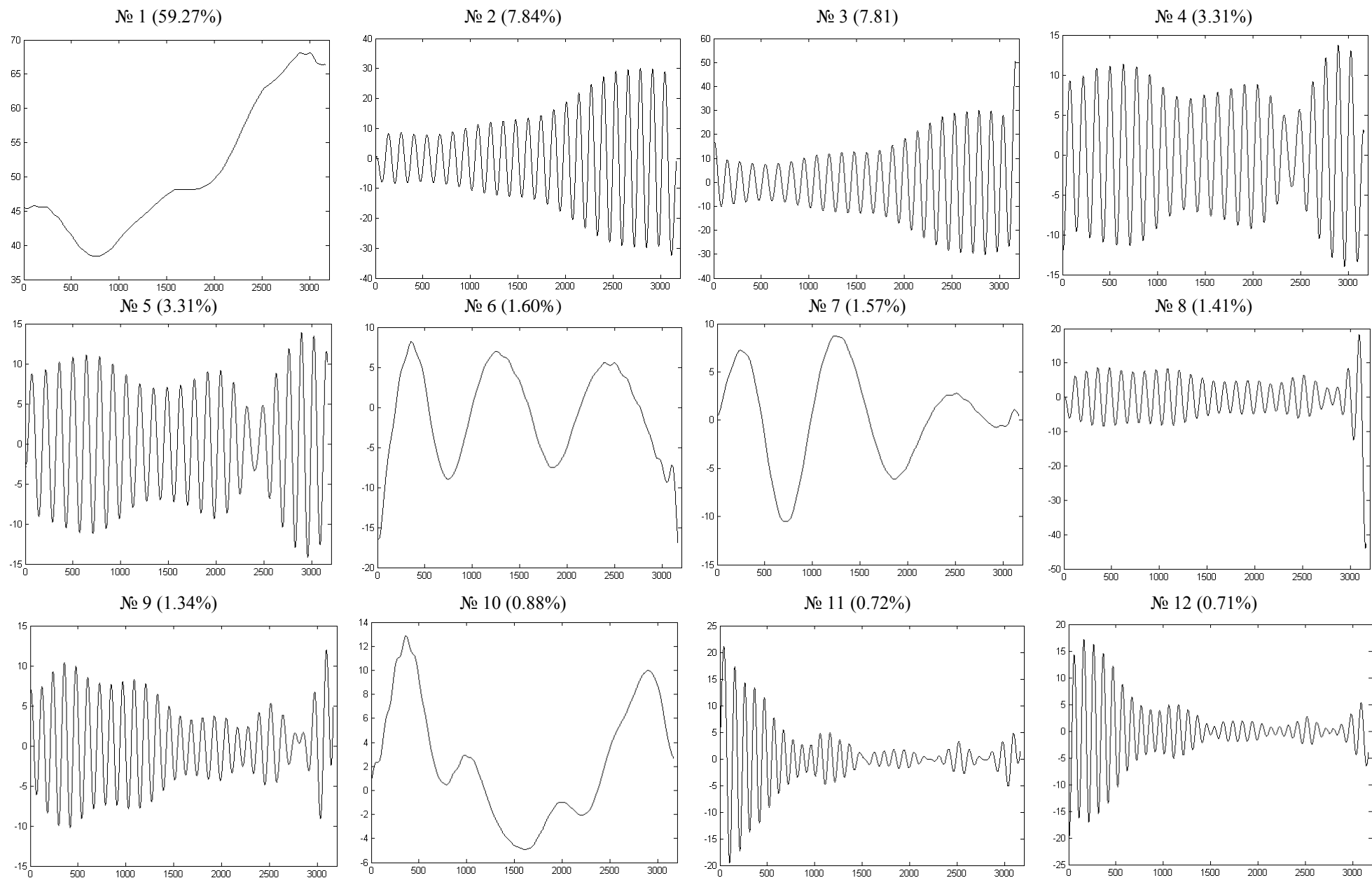


Рис. 3.3. Визуализация собственных векторов выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР (начало)

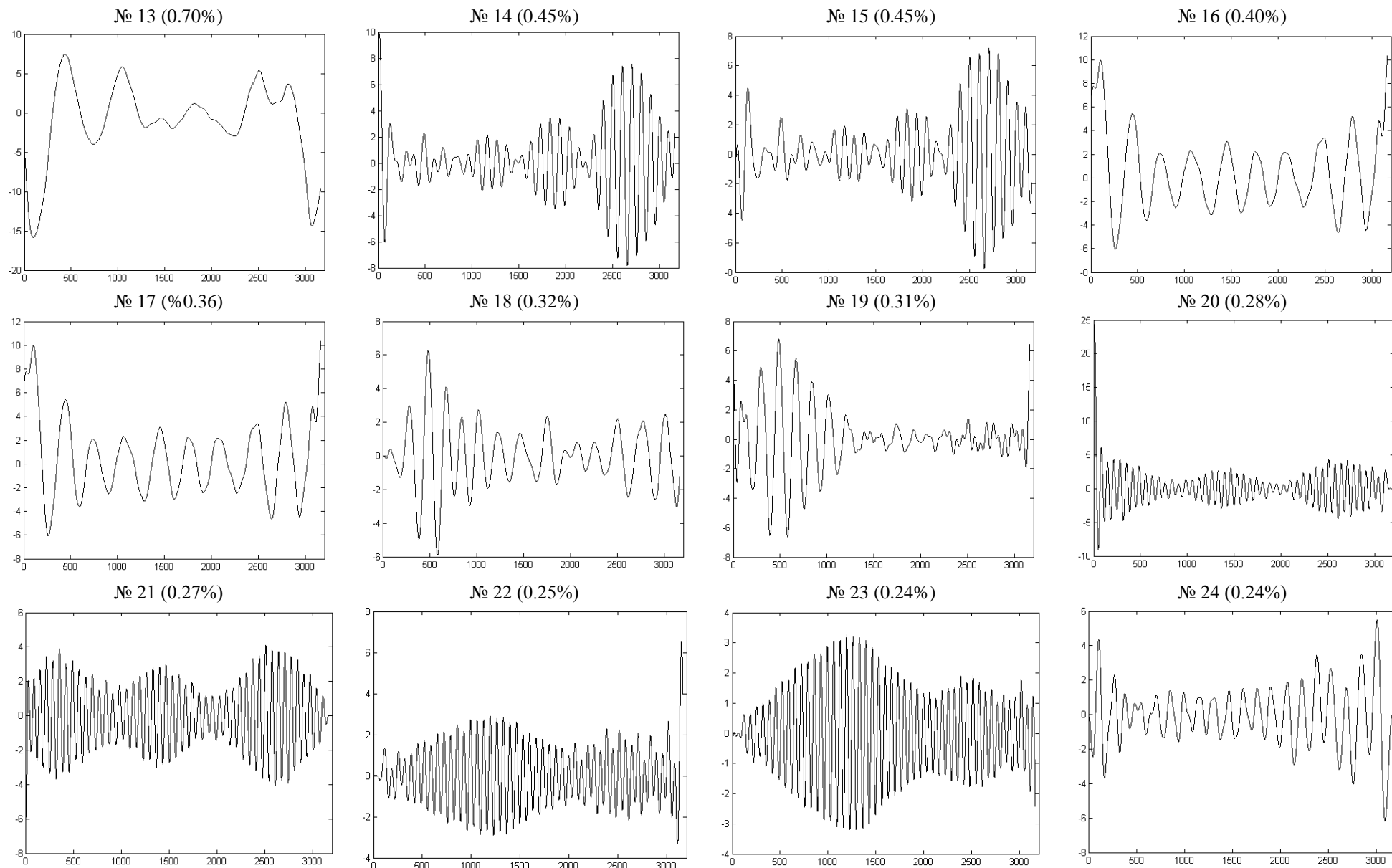


Рис. 3.3. Визуализация собственных векторов выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР (окончание)

Принимая во внимание результаты исследования особенностей собственных чисел выборочной траекторной матрицы ВР, приведенные в Главе 2, понятно, что в качестве дополнительного критерия выбора собственных векторов для их последующей группировки, можно использовать зависимости разностей между последовательными собственными числами от размера окна сдвига  $L$ . Данные зависимости, вычисленные для исследуемого ВР, представлены на рис. 3.4. Анализ рис. 3.4 позволяет сделать вывод о том, что описанным в Главе 2 свойствам зависимостей разностей собственных чисел выборочной траекторной матрицы, номера которых отличаются друг от друга на единицу, отвечают следующие собственные числа: № 1, № 2–3, № 4–5, № 6–7; № 8–9, объясняющие  $\approx 86,8\%$  дисперсии анализируемого ВР. При этом, оказывается возможным, используя обсуждаемые зависимости, выбирать размер окна сдвига  $L$ , так чтобы оно соответствовало одному из минимальных значений зависимости разностей между последовательными собственными числами от размера окна сдвига  $L$ , что обеспечит, как было показано в Главе 2, наименьшую погрешность восстановления соответствующей компоненты анализируемого ВР.

Отметим, что используя предложенный в работе подход, оказывается возможным существенно сократить количество ГК, выделенных ранее в [62] (см. табл. 3.1). (Значения периодов гармоник, соответствующих максимумам спектральной плотности мощности при этом не изменяются).

Таблица 3.1. Значения периодов максимальных гармоник периодограмм главных компонент, выделенных в [62]

№ ГК	Период, месяц	Период, год	Доля объясняемой дисперсии, %
2,3	130	10.83	15.60
4,5	141	11.75	4.70
8,9	119	9.92	2.60
11,12,14,15	95	7.92	2.40
18,19	183	15,25	0.70
20,21,22,23	68	5.77	1.10
24,25	155	12.92	0.45
30,31	66	5.46	0.28

Так как собственные векторы, соответствующие собственным числам выборочной траекторной матрицы № 6, 7, могут быть описаны медленно изменяющимися во времени функциями, поэтому их естественно объединить с трендом (собственный вектор, соответствующий собственному числу № 1) (рис. 3.5). Из рис. 3.5 видно, что в изучаемом ВР присутствует «низкочастотная» составляющая (результат группировки и восстановления компонент № 1, 6, 7), объясняющая 63,5% общей дисперсии временного ряда, которая может быть классифицирована как «вековая» (точнее 80–100 летняя) составляющая. Отметим, что ее период (его оценка может быть получена как длительность временного интервала, между последовательными максимумами рассматриваемой зависимости) обнаруживает тенденцию к увеличению с течением времени: с 1778 г. по

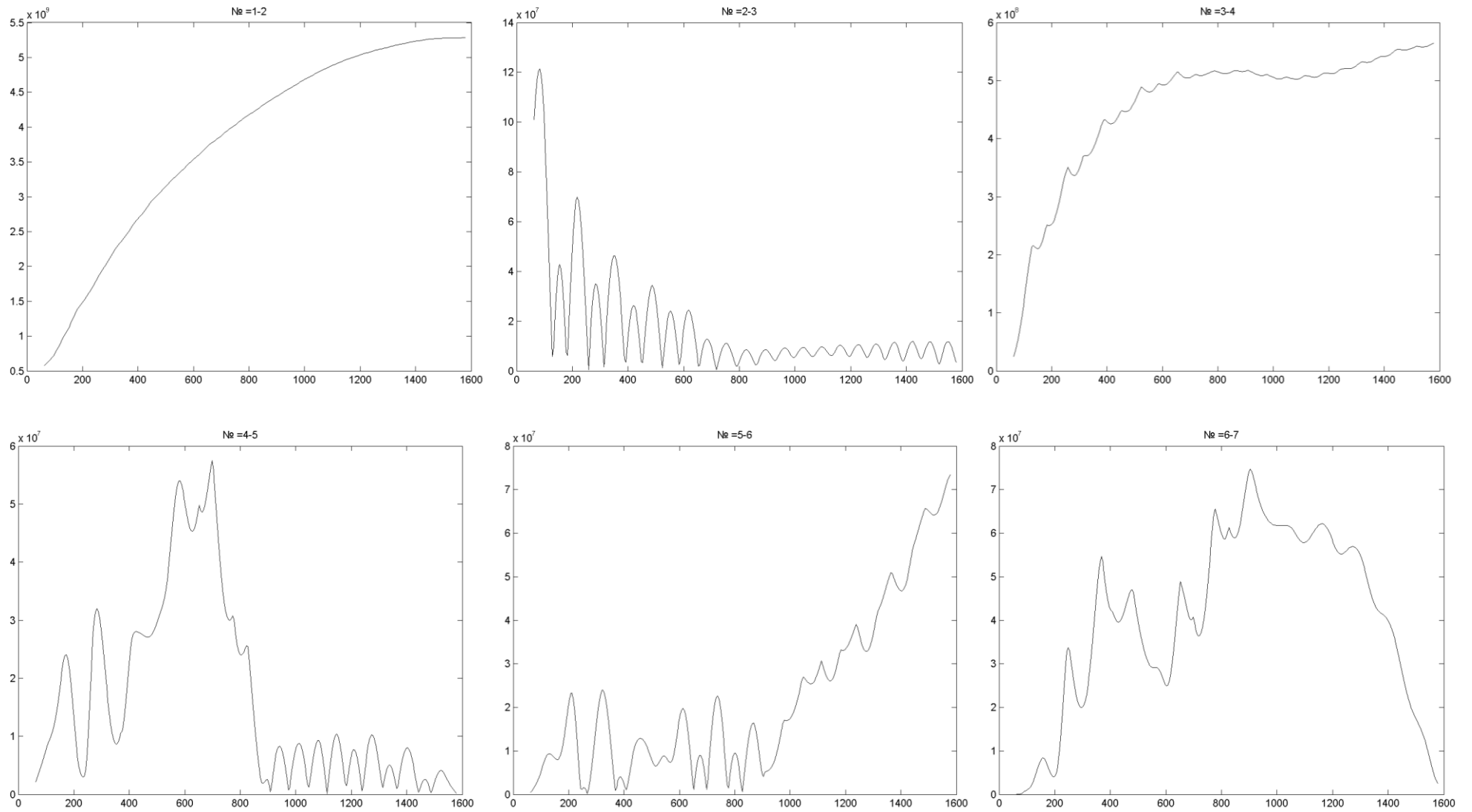


Рис. 3.4. Разности между последовательными собственными значениями выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР (начало)

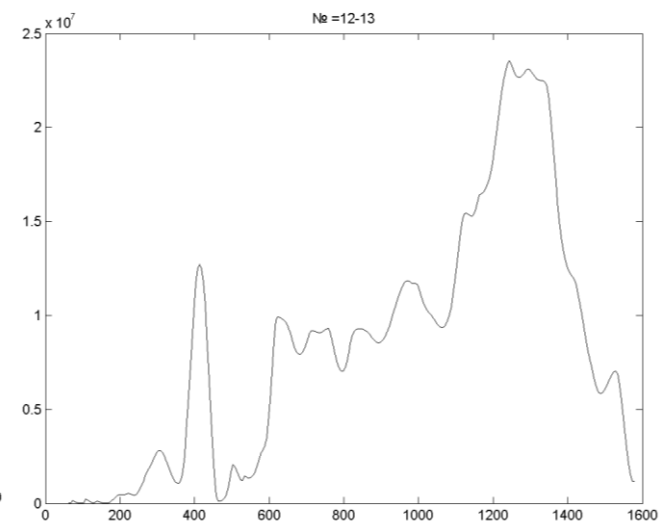
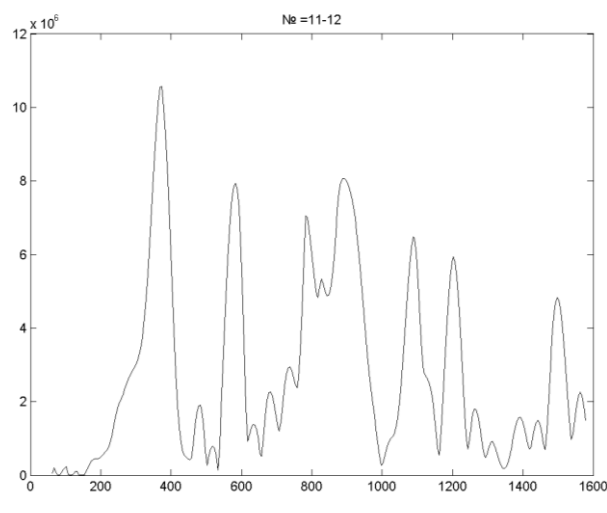
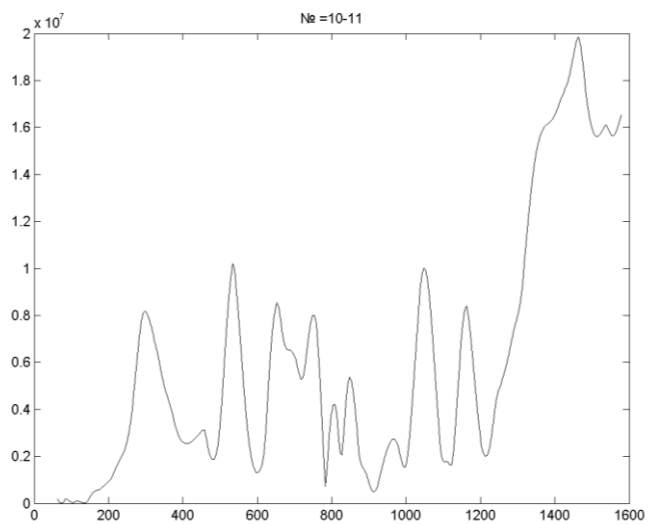
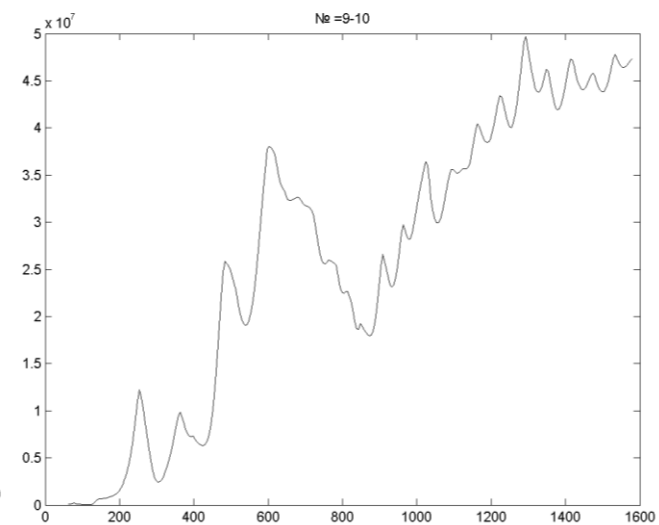
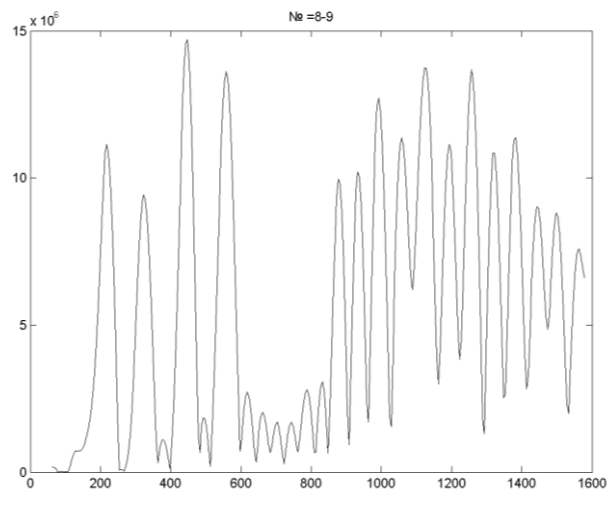
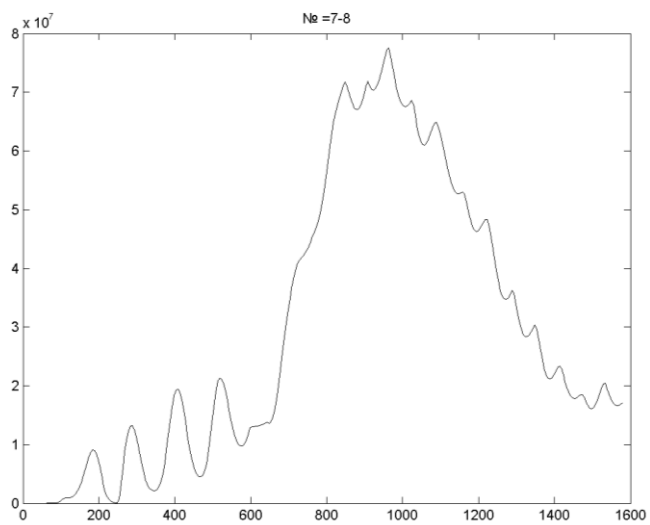


Рис. 3.4. Разности между последовательными собственными значениями выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР (продолжение)



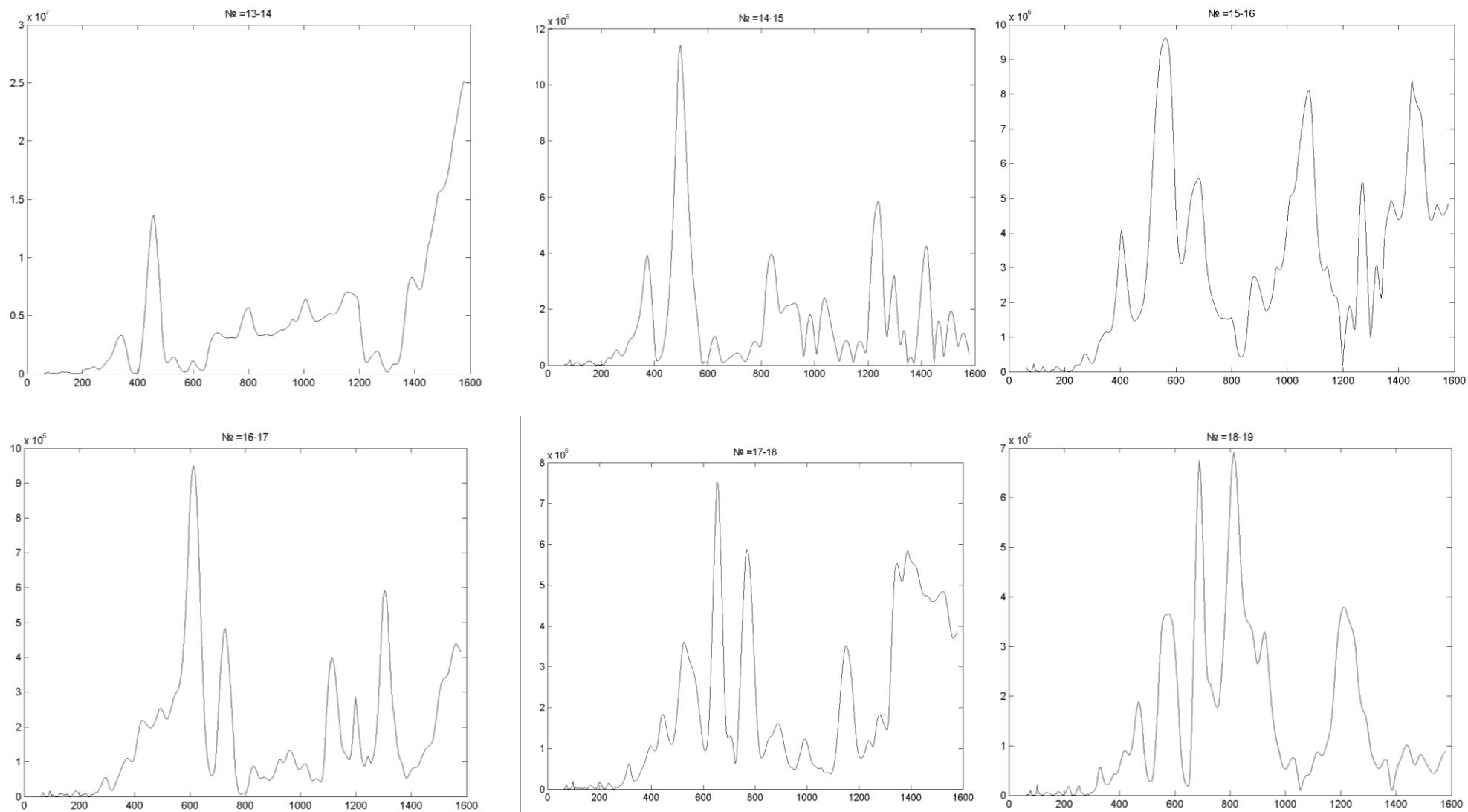


Рис. 3.4. Разности между последовательными собственными значениями выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР (продолжение)

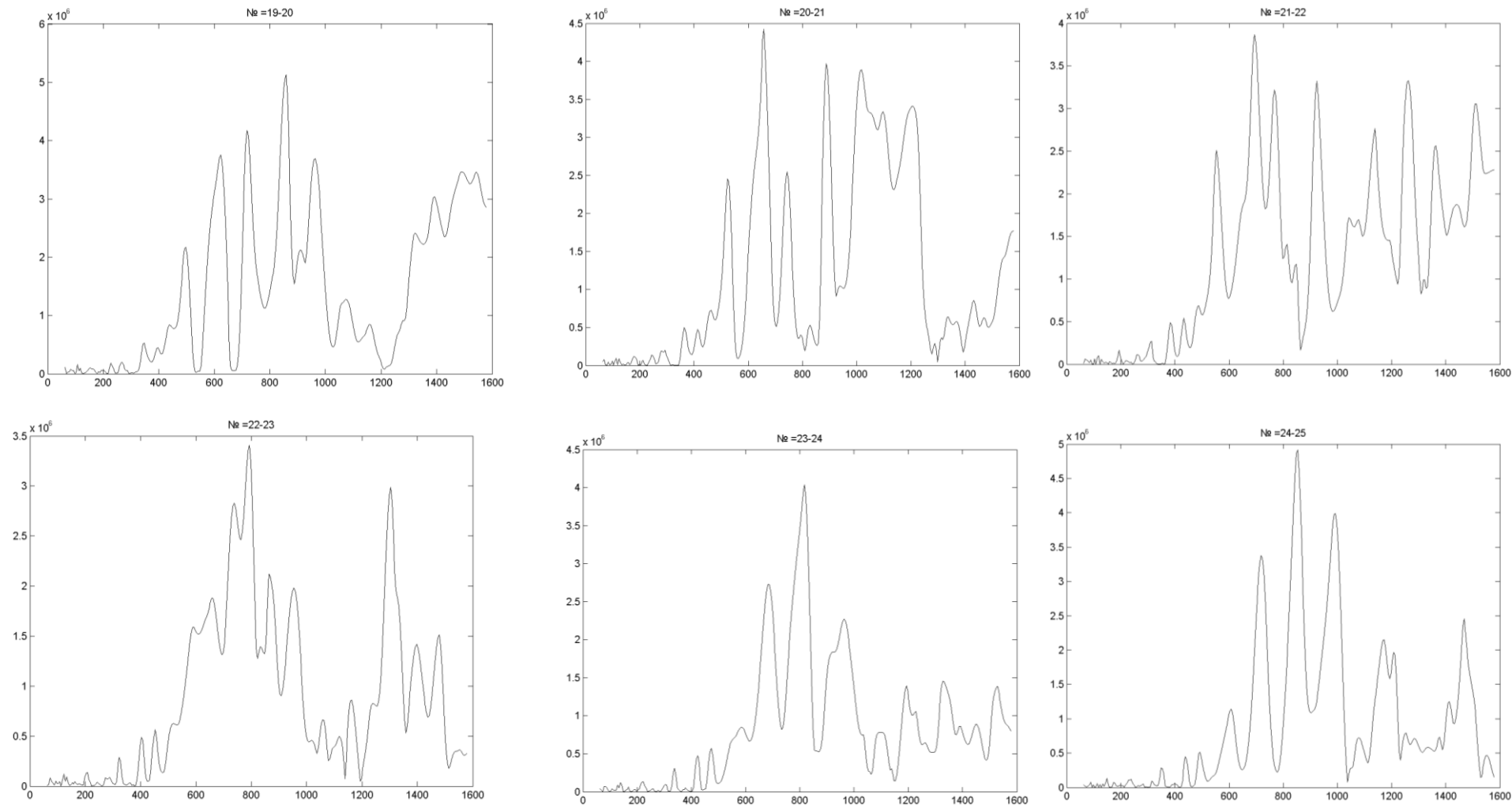
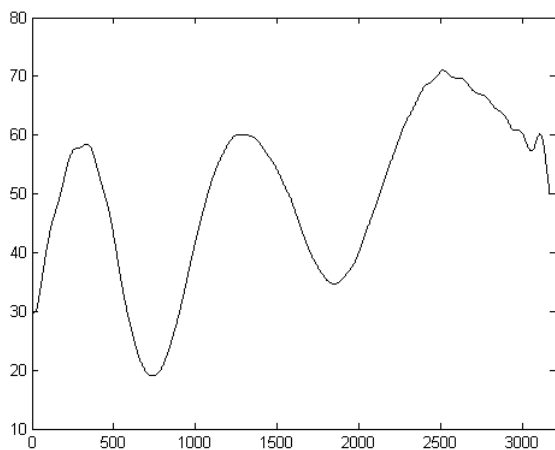


Рис. 3.4. Разности между последовательными собственными значениями выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР (окончание)

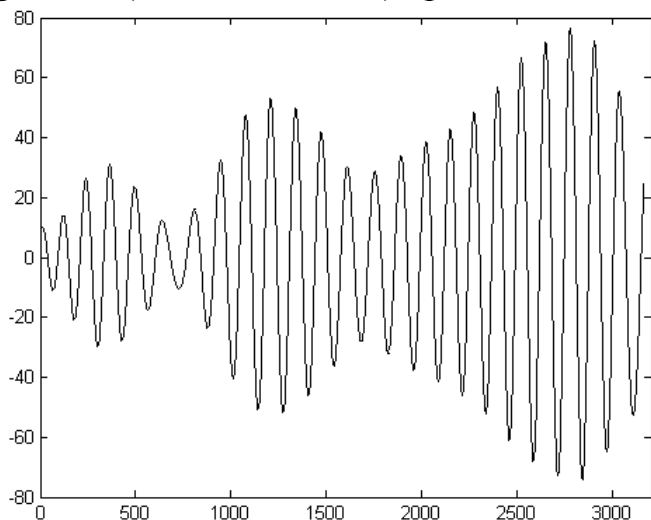


*Рис. 3.5. Зависимость мгновенных значений составляющей анализируемого ВР, полученная группировкой собственных векторов № 1, 6, 7*

1850 г. равнялся  $\approx 72$  года, а с 1850 г. по 1980 г. –  $\approx 125$  лет. Кроме того, следует отметить, что происходит изменение максимального значения рассматриваемой зависимости, равного 71 году в 1778 г., 59 – в 1850 г., и 76 – в 1980 г., соответственно. Полученные результаты позволяют сделать предположение о присутствии в рассматриваемой зависимости периодической составляющей, которая ответственна за амплитудную модуляцию. Период модулирующей функции равняется  $\approx 200$  лет.

Отметим, что полученные результаты вполне согласуются с ранее описанными в [8] циклами солнечной активности, в частности, выделены: 200-летний цикл (цикл Зюсса), долгопериодический цикл с периодом 80–90 лет (цикл Гляйсберга), а также 11-летний цикл (Швабе-Вольфа).

Зависимость мгновенных значений составляющей анализируемого ВР от времени, полученная группировкой собственных векторов, соответствующих собственным числам № 2–3, 4–5, 8–9, представлены на рис. 3.6. Зависимость мгновенных значений ВР, полученного в результате группировки собственных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA № 1, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, а также разность между сгруппированным и анализируемым временными рядами (остатки модели) представлена на рис. 3.7.



*Рис. 3.6. Зависимость мгновенных значений составляющей анализируемого ВР, полученная группировкой собственных векторов № 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9*

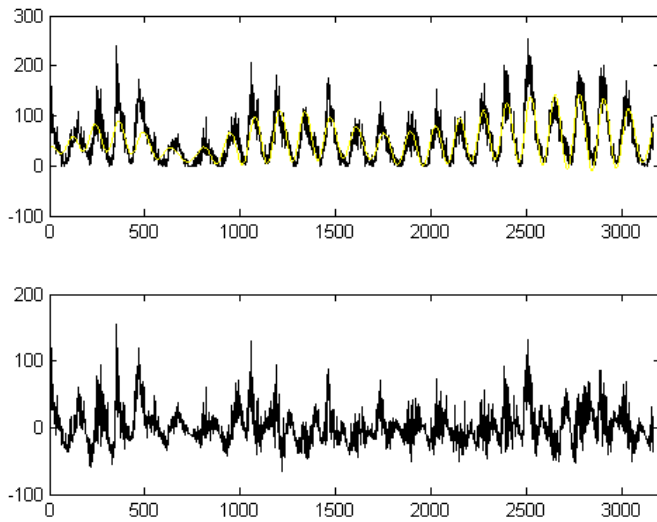


Рис. 3.7. Зависимость мгновенных значений ВР, полученного в результате группировки собственных векторов выборочной автокорреляционной матрицы метода SSA № 1, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9 (вверху) от времени; разность между сгруппированным и анализируемым временными рядами (внизу)

Анализ ВР, представленного на рис. 3.6, позволяет предположить, что для математического описания данного ВР может быть использована следующая математическая модель, представляющая собой сигнал с одновременной амплитудной и фазовой модуляцией

$$u(t) = A(t) \cos \left( \omega_0 t + \int_0^t \Delta\omega(\xi) d\xi + \varphi_0 \right), \quad (3.1)$$

где  $A(t)$  – функция, описывающая амплитудную модуляцию;  $\omega_0$ , – циклическая частота несущей;  $\Delta\omega(\xi)$  – функция, описывающая закон изменения частоты;  $\int_0^t \Delta\omega(\xi) d\xi$  – функция, описывающая фазовую модуляцию функции  $u(t)$ ,  $\varphi_0$ , – начальная фаза.

В [74] показано, что для нахождения законов изменения частоты (периода) подобных сигналов можно использовать следующие алгоритмы:

1. Алгоритм, основанный на изменении временных интервалов, соответствующих изменению фазы анализируемого сигнала на  $2\pi$  радиан (периодомерный алгоритм).

2. Алгоритм, основанный на понятии мгновенная частота аналитического сигнала.

Напомним, что аналитический сигнал  $z(t)$ , соответствующий сигналу  $u(t)$ , определяется как [15,102]:

$$z(t) = u(t) + i\hat{u}(t), \quad (3.2)$$

где  $\hat{u}(t)$  – сигнал, сопряженный к исходному по Гильберту:

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\pi t} \otimes u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

$i$  – мнимая единица,  $\otimes$  – оператор свертки. Быстрый алгоритм вычисления аналитического сигнала обсуждался ранее в Главе 2.

Мгновенная частота аналитического сигнала  $f(t)$  определяется как производная от фазы комплекснозначной функции  $z(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctan \left[ \frac{\hat{u}(t)}{u(t)} \right] = \frac{\hat{u}'(t)u(t) - \hat{u}(t)u'(t)}{u(t)^2 + \hat{u}(t)^2}. \quad (3.3)$$

Физическая содержательность МЧ сигнала, определяемой как мгновенная частота аналитического сигнала, продемонстрирована на примере дискретного частотно-модулированного сигнала конечной длительности с монотонно возрастающим законом изменения частоты в [73]. Данная величина представляет собой сумму двух детерминированных зависимостей  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ . Здесь  $f_1(t)$  – «истинный» закон изменения частоты, однозначно соответствующий определению мгновенной частоты сигнала, вводимой как частота, соответствующая максимуму мгновенного спектра сигнала [51];  $f_2(t)$  – некоторая периодическая составляющая, появление которой обусловлено вычислением преобразования Гильберта на временном интервале конечной длительности.

Зависимости периода ВР, полученного группировкой собственных векторов выборочной траекторной матрицы № 2–3, 4–5, 8–9, найденные с помощью описанных выше алгоритмов, представлены на рис. 3.8. (Зависимость «мгновенного» периода ВР от времени, вычисленная в соответствии с методом мгновенной частоты аналитического сигнала, для уменьшения шумов, возникающих в результате процедуры численного дифференцирования (см. (3.3)), была подвергнута процедуре скользящего сглаживания по 5 точкам).

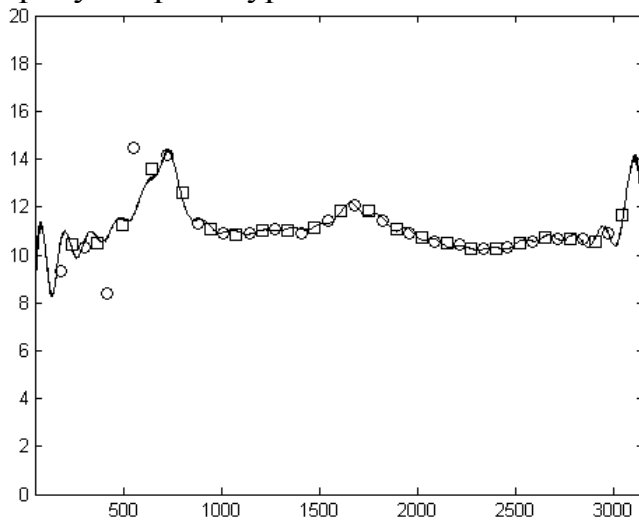


Рис. 3.8. Закон изменения частоты ВР, представленного на рис. 3.6 (○ – зависимость «мгновенного» периода ВР, оцененное как значение временного интервала между последовательными максимумами ВР; □ – зависимость «мгновенного» периода ВР, оцененное как значение временного интервала между последовательными минимумами ВР; сплошная линия – метод мгновенной частоты аналитического сигнала)

Из рис. 3.8 видно, что законы изменения периодов во времени, определенные с помощью описанных выше алгоритмов, достаточно хорошо согласуются друг с другом. Минимальное значение периода «одиннадцатилетнего» цикла, равное  $\approx 8$  годам, было достигнуто в 1763 г., максимальное, равное  $\approx 13.6$  года, – в 1800 гг. Последующие минимумы периода «одиннадцатилетнего» цикла, равные 10.6, 10.2 и 10.5 года были достигнуты в 1842–1843 гг., 1938–1939 гг., 1995–1996 гг., соответственно. Последующие максимумы периода «одиннадцатилетнего» цикла, равные 11.8 и 10.8 года были достигнуты в 1887–1888 гг. и 1972–1973 гг., соответственно. Отметим, что имеющие место увеличения периодов «одиннадцатилетнего» цикла на концах интервала наблюдения могут ока-

заться «краевыми» эффектами, присущим алгоритмам, использованных для анализа рассматриваемого ВР.

Таким образом, обсуждаемый ВР, адекватно описывается с помощью математической модели (3.1). Отметим, что, используя зависимость «мгновенных» значений «одиннадцатилетнего» периода от времени, можно делать прогноз об изменении периода «одиннадцатилетнего» цикла.

В тоже время необходимо отметить, что несмотря на то, что, как видно из рис. 3.8 видно, ВР, восстановленный по собственным векторам выборочной траекторной матрицы исходного ВР № 1, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, обеспечивает достаточно хорошее качество его аппроксимации, распределение остатков модели остатков модели оказывается отличной от нормального закона  $N(\mu, \sigma)$  (кривой Гаусса) (рис. 3.9)

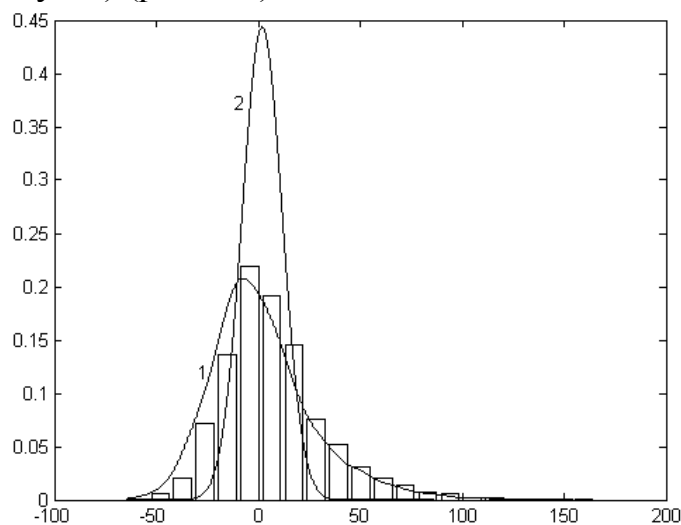


Рис. 3.9. Распределение ВР, представленного на рис. 3.7 (внизу): прямоугольники – гистограмма распределения; кривая № 1 – плотность распределения, восстановленная с помощью аппроксимации Парзена-Розенблатта [49, 79, 83, 89]; кривая № 2 – плотность нормального распределения  $\lambda$ , параметры которого  $\mu$ ,  $\sigma$  вычислены в соответствии с принципом максимального правдоподобия [13]

Для количественного подтверждения отличия между распределением ВР, представленного на рис. 3.7 (внизу), и нормального закона  $N(\mu, \sigma)$ , параметры которого  $\mu$ ,  $\sigma$  вычислены в соответствии с принципом максимального правдоподобия, был использован критерий согласия Колмогорова, позволяющий проверить сложную гипотезу  $H_0 : F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , где вектор параметров  $\hat{\theta}$  – оценивается по той же выборке, по которой определяется согласие. Здесь мы использовали методику компьютерного анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшую себя при моделировании распределений статистик критериев, реализующейся следующей последовательностью действий [49, 77, 78]:

1. Расчет значения критерия Колмогорова для имеющейся выборки  $S_{\text{exp}}$ .
2. Генерация в соответствии с законом распределения  $F(x, \hat{\theta})$   $N$  выборок такого же объема  $n$ , как и выборка, для которой проверяется гипотеза  $H_0 : F(x) = F(x, \hat{\theta})$ .
2. Вычисление для каждой из  $N$  сгенерированных выборок значения статистики Колмогорова  $S_1, S_2, \dots, S_N$ .

3. Определение закона распределения случайной последовательности  $S_k, k = \overline{1, N} \ G_N(S_n|H_0)$ .

4. Нахождение по распределению  $G_N(S_n|H_0)$ . значения критерия для заданного уровня доверительной вероятности  $\lambda$  соответствующего значения критерия  $S_\lambda^*$ .

5. При выполнении условия  $S_{\text{exp}} < S_\lambda^*$  принятие гипотезы  $H_0 : F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , либо ее отклонение в противоположном случае.

Результаты применения данной методики к ВР, представленному на рис. 3.7 (внизу) приведены на рис. 3.10. Из рис. 3.10 видно, что  $S_{\text{exp}} > S_{0.95}^*$  (а также и  $S_{0.9995}^*$ ), что позволяет отклонить гипотезу  $H_0 : F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , о том распределение рассматриваемого ВР является нормальным.

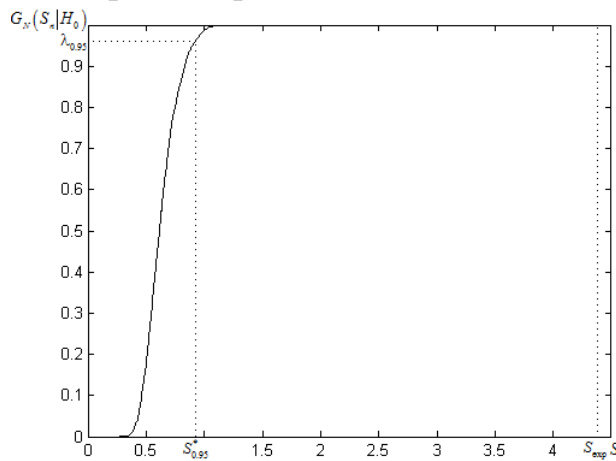


Рис. 3.10. Распределение статистики Колмогорова для ВР, представленного на рис. 3.7 (внизу), построенное по результатам статистического моделирования ( $N = 1000$ )

Таким образом, несмотря на согласованность результатов анализа ВР, содержащего среднесезонные значения чисел Вольфа, с современными представлениями о частотно-временных характеристиках данного ВР [62], анализ статистических свойств построенной SSA-модели анализируемого ВР, позволяет сделать вывод о том, что провести полную декомпозицию анализируемого ВР, разделив его на детерминированную и случайную составляющие, не удалось. Данный результат можно объяснить, используя результаты SSA-анализа модельных сигналов, приведенные в Главе 2, где показано, что точное разделение составляющих анализируемого ВР возможно только при выполнении соответствующих соотношений между частотой составляющей конкретной составляющей и размером величины сдвига  $L$ . В том случае, когда ВР, представляет собой мгновенные отсчеты суммы периодических функций с различными (как правило, некратными) частотами, возникает ситуация, в которой при конкретном значении сдвига  $L$  для одной или нескольких составляющих условия их строго разделения выполняться не будут. В подобных случаях часть составляющих, присутствующих в анализируемом ВР, разделение которых оказывается невозможным, будут отнесены к ряду остатков SSA-модели, как и произошло в рассмотренном в данном разделе случае.

Описанную выше особенность метода SSA следует принимать во внимание при его использовании для прогнозирования значений ВР.

### 3.2. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Теоретические обоснования возможности использования метода SSA для прогнозирования ВР рассматривались в работах многих авторов (см., например, [20, 22, 26, 33, 45, 48, 67, 69, 91, 97, 98, 106, 107] и др.), там же приведены примеры прогнозирования некоторых ВР. Здесь необходимо напомнить, что решение задачи прогнозирования ВР требует априорного задания следующих параметров метода SSA: длины отрезка ВР, используемого для прогнозирования значений ВР, размера окна сдвига  $L$ , числа ГК, используемых для прогнозирования. В тоже время конкретных рекомендаций по их выбору в научной литературе обнаружить не удастся. В этой связи представляется целесообразным провести самостоятельное изучение данного вопроса на примере ВР, имеющих практическую значимость.

Для решения поставленной задачи автором в пакете MATLAB была разработана программная реализация алгоритма прогнозирования ВР методом SSA. Ее работоспособность подтверждают результаты прогнозирования различных детерминированных ВР. В качестве примера на рис. 3.11 приведены результаты прогнозирования ВР, представляющего собой отсчеты функции

$$u(t) = \sin(t) + \sin(4t), \quad (3.4)$$

вычисленные на интервале  $[0, 4\pi]$  в узлах координатной сетки  $t_i = \frac{4\pi}{N} i, i = \overline{1, N}$ ,

$N = 160$ , на 100 точек. Для вычисления прогноза использовалось окно сдвига  $L = 80$  и, следуя результатам, полученным в Главе 2, собственные тройки сингулярного разложения траекторной матрицы № 1–4.

#### 1. Выбор длины временного окна, используемого в задаче прогнозирования ВР, содержащего значения чисел Вольфа

Предваряя анализ полученных результатов, отметим, что наряду с известными методами рекуррентного и векторного прогнозирования [20], оказывается возможным предложить использовать в рассматриваемой задаче еще один альтернативный алгоритм прогнозирования, реализуемый следующей последовательностью действий:

1. Получить ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$ , аппроксимирующий анализируемый ВР  $F_N^{(1)}$ , используя набор собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ ,  $i \in I = (j_1, \dots, j_r)$ , из которого исключены собственные тройки, соответствующие шумовой составляющей исходного ВР.

2. Вычислить коэффициенты сплайна, аппроксимирующего ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$ .

3. Вычислить, используя соответствующие коэффициенты сплайна, прогнозируемые значения анализируемого ВР.



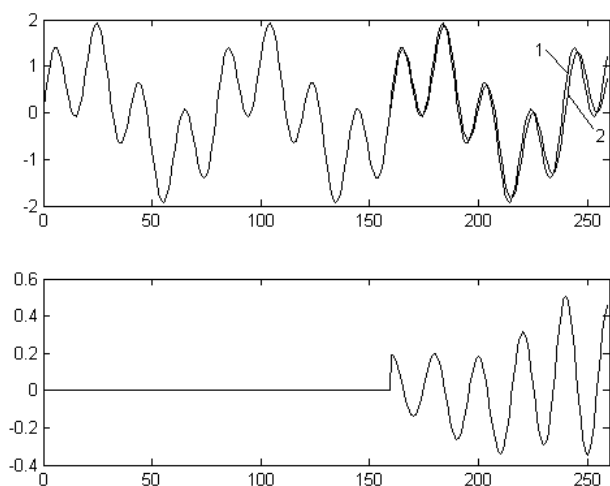


Рис. 3.11. К иллюстрации работоспособности программной реализации алгоритма прогнозирования методом SSA (сверху: 1 – исходный ВР; 2 – прогнозируемые значения; снизу: разность между исходными и прогнозируемыми значениями)

В связи с тем, что алгоритм векторного прогнозирования оказывается более чувствительным чем рекурсивный алгоритм прогнозирования к качеству разделения ряда  $F_N^{(1)}$  на информативную и шумовую составляющие [22], которая для ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, оказывается недостаточно высокой, далее мы проводим сравнение спрогнозированных значений ВР с помощью рекуррентного и предложенного нами алгоритмами.

Рассмотрим результаты прогнозирования изучаемого ВР, полученные при исследовании проблемы выбора размера окна  $N_{wind}$  (части ВР, используемого для прогнозирования), представленные на рис. 3.12–3.16 и в табл. 3.2. Здесь правый конец отрезка ВР  $F_N^{(1)}$ , использованного для прогнозирования был зафиксирован в произвольно выбранной точке ( $N_{end} = 1800$ ), и варьировались значения параметра  $N_{wind}$  и параметра сдвига  $L = N_{wind}/2$ . (Здесь для вычисления прогнозируемых значений на основе аппроксимирующего ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$  использовался кубический полином.)

Анализ зависимостей представленных на рис. 3.12–3.16 и в табл. 3.2 показывает:

1) увеличение размера числа собственных троек, используемых для вычисления значений аппроксимирующего полинома, приводит к увеличению точности прогнозируемых значений;

2) отклонения спрогнозированных значений, вычисляемых как с помощью рекурсивного алгоритма, так и с помощью алгоритма прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома, от истинных при  $N_{wind} \geq 200$  оказываются практически независимыми от размера окна сдвига, поэтому в дальнейшем анализе мы используем следующие значения параметров методов SSA  $N_{wind} > 200$ ,  $L = N_{wind}/2$ .

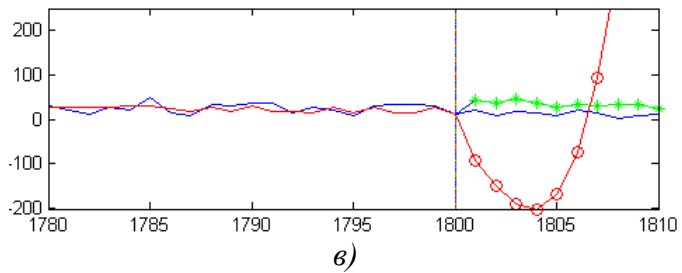
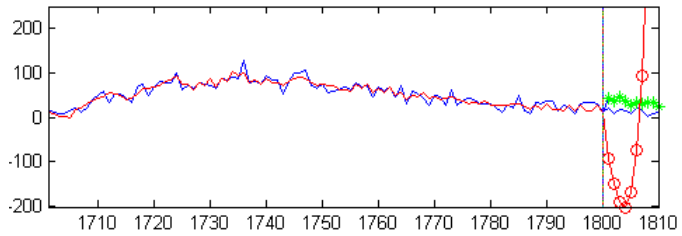
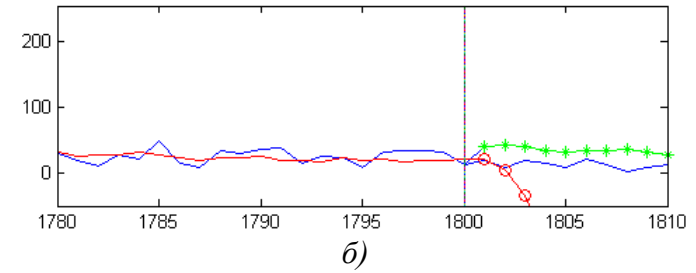
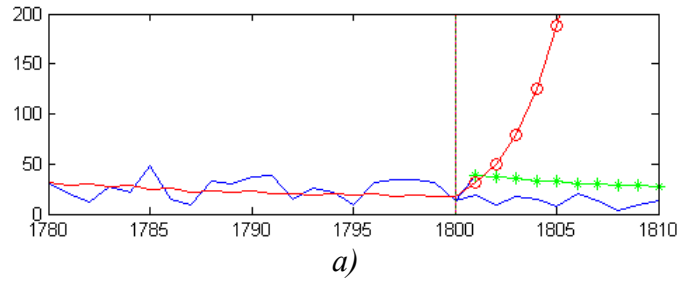
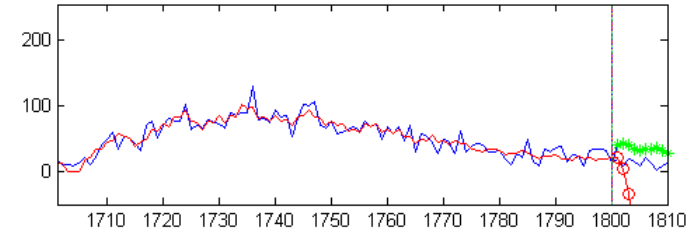
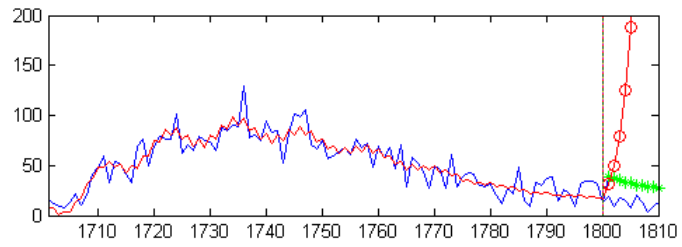
Затем для трех произвольно выбранных точек ВР, содержащего значения среднемесячных чисел Вольфа, для каждой из первых пяти прогнозируемых с помощью рекурсивного алгоритма и алгоритма прогнозирования по восстановленному ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$ .  $c \geq \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  были вычислены отклонения между точными и спрогнозированными значениями. Также были вычислены значения

критерия согласия Колмогорова ( $S_{\text{exp}}$ ) (табл. 3.3–3.5) и соответствующие распределения статистики, примеры которых представлены рис. 3.17. (Здесь было принято во внимание, что одним из показателей качества аппроксимации ВР  $F_N^{(1)}$  рядом  $\tilde{F}_N^{(1)}$  является соответствие распределения остатков (ряда  $F_N^{(1)} - \tilde{F}_N^{(1)}$ ) нормальному закону распределения  $N(\mu, \omega)$  для каждого из рассмотренного набора собственных троек.)

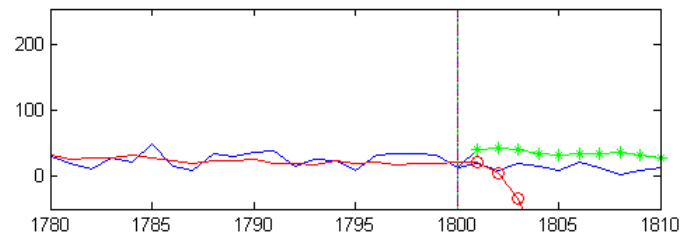
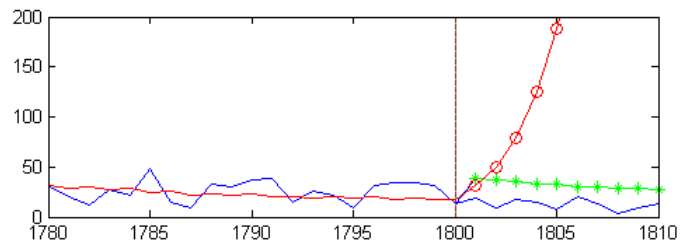
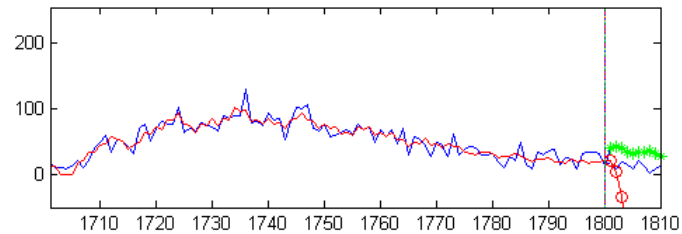
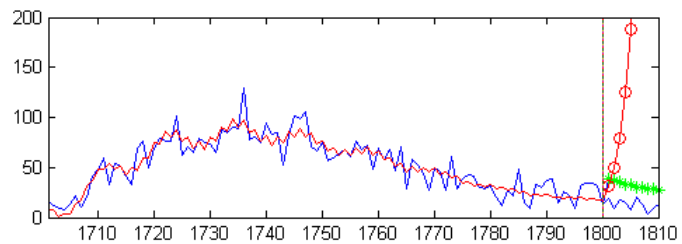
Таблица 3.2. Погрешности первых трех прогнозируемых значений ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Группируемые компоненты	$L$	$N_{\text{wind}}$	Погрешность рекуррентного алгоритма метода SSA			Погрешность прогноза по аппроксимирующему ряду $\tilde{F}_N^{(1)}$		
			Номер прогнозируемой точки			Номер прогнозируемой точки		
			1	2	3	1	2	3
1–5	50	100	18	27	17	11	40	61
1–7	50	100	22	34	22	2	5	52
1–9	50	100	22	29	27	113	160	210
1–5	100	200	7	20	14	3	15	11
1–7	100	200	9	19	11	7	1	9
1–9	100	200	9	17	9	12	6	15
1–5	150	300	16	26	16	13	4	13
1–7	150	300	11	19	8	3	23	35
1–9	150	300	7	16	4	2	10	10
1–5	200	400	47	59	52	12	0	7
1–7	200	400	38	49	41	4	7	3
1–9	200	400	7	16	4	2	10	10

Из табл. 3.3–3.5 видно, что в каждом из рассмотренных случаев погрешность прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, оказывается меньше, чем при использовании рекурсивного алгоритма прогнозирования. Кроме того, из табл. 3.3–3.4 видно, что минимальному значению погрешности прогноза первой прогнозируемой точки по аппроксимирующему ряду  $\tilde{F}_N^{(1)}$  соответствует минимальное значение критерия Колмогорова  $S_{\text{exp}}$ . Это позволяет предположить, что выявленное свойство можно использовать для выбора собственных троек, обеспечивающих наименьшую погрешность прогноза первой прогнозируемой точки по аппроксимирующему ряду  $\tilde{F}_N^{(1)}$ . Однако данные, представленные в табл. 3.5, не подтверждают сформулированной выше гипотезы. В тоже время понятно, что поскольку в рассматриваемом случае речь идет о прогнозировании ВР, представляющего собой смесь детерминированной и случайной составляющих, для подтверждения или отклонения данной гипотезы требуется проведение более тщательного анализа.

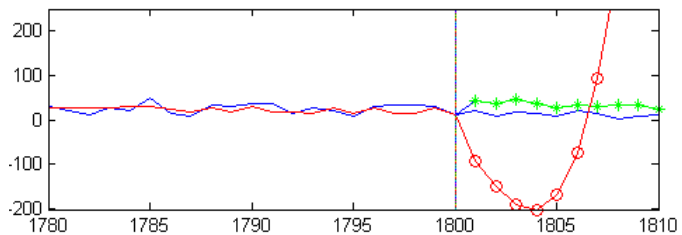
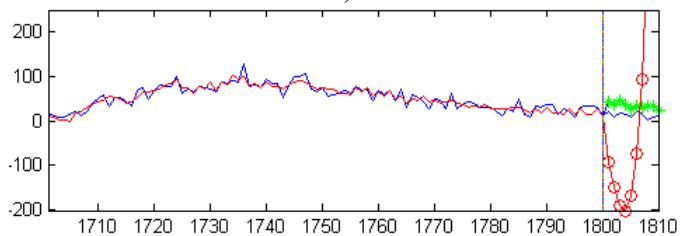


*Рис. 3.12. Результаты прогнозирования ВР  $F_N^{(1)}$  в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему ВР (o):  $N_{wind} = 100, L = 50$ ;  
*a)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ;  
 в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$**



a)

б)



в)

Рис. 3.13. Результаты прогнозирования ВР  $F_N^{(1)}$  в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему ВР ( $\circ$ ):  $N_{wind} = 200, L = 100$ ;

a)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ;

в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$

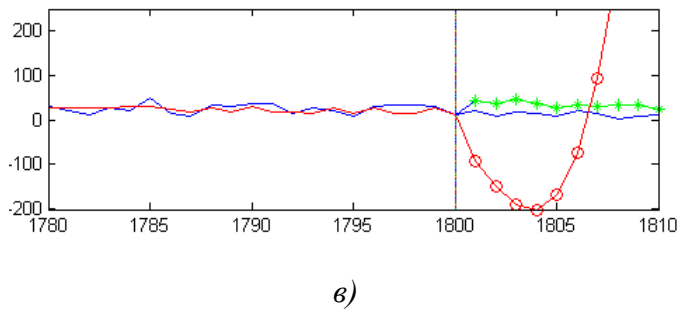
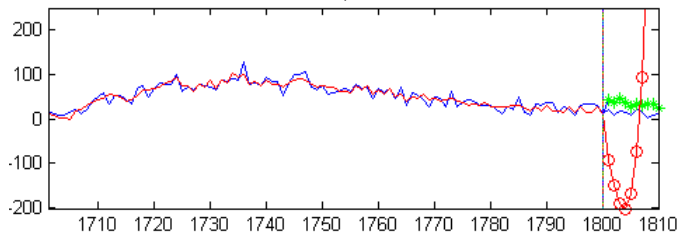
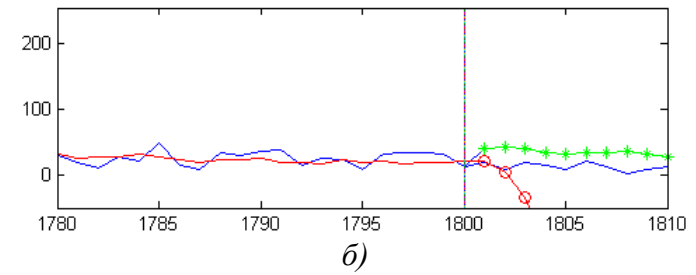
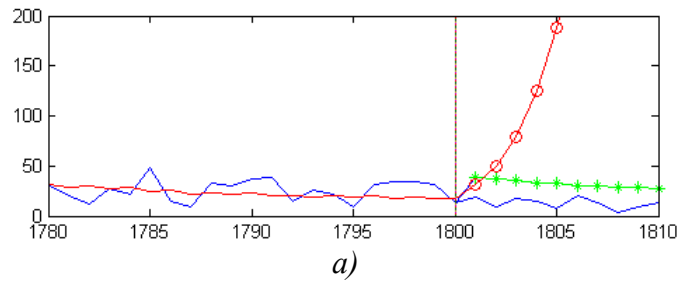
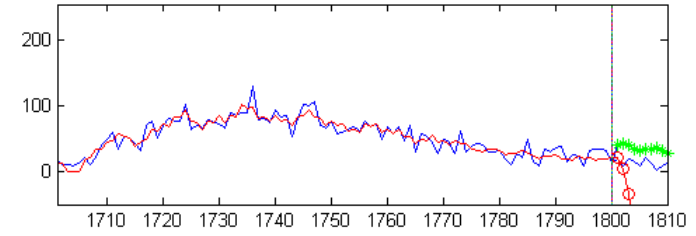
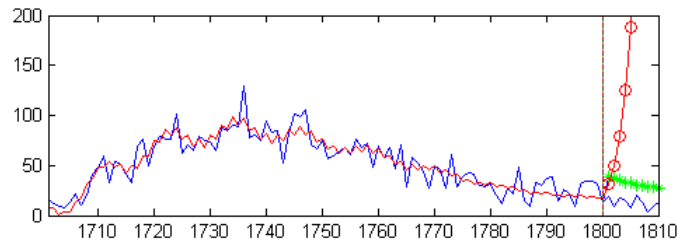


Рис. 3.14. Результаты прогнозирования ВР  $F_N^{(1)}$  в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему ВР ( $\circ$ ):  $N_{wind} = 200, L = 100$ ; а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$

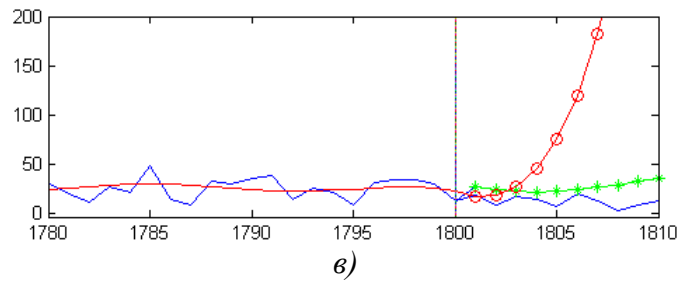
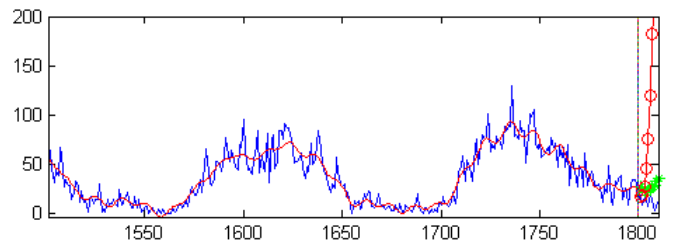
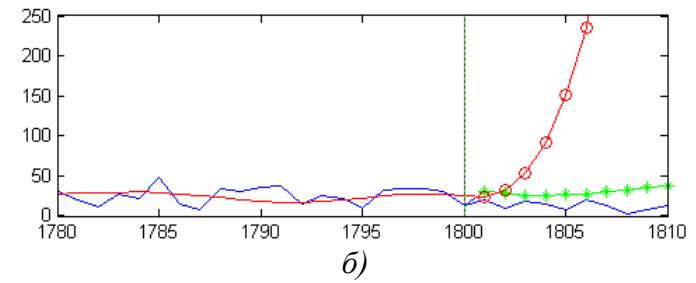
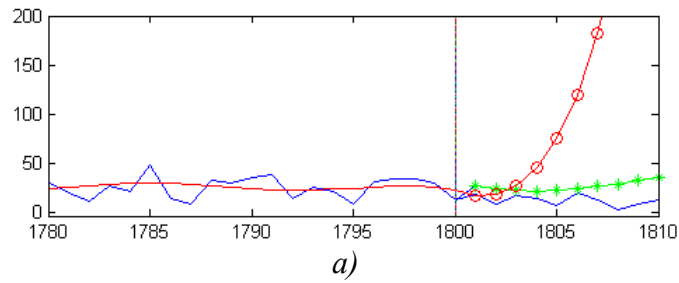
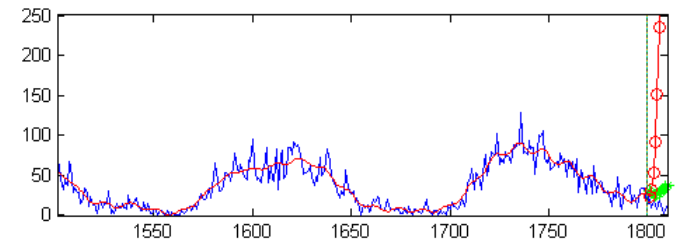
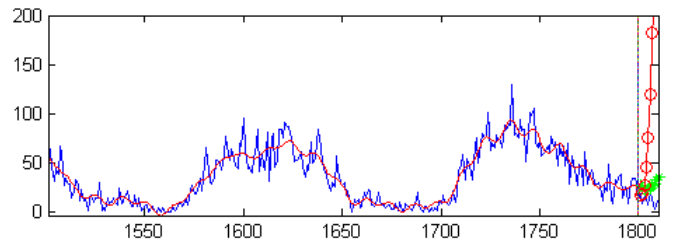
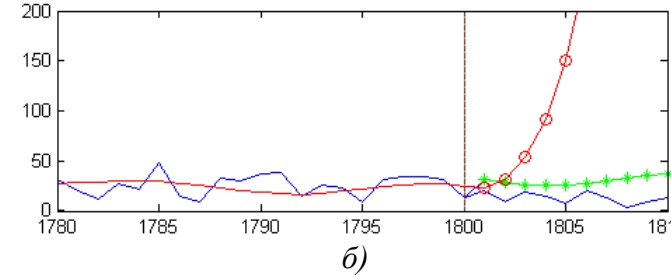
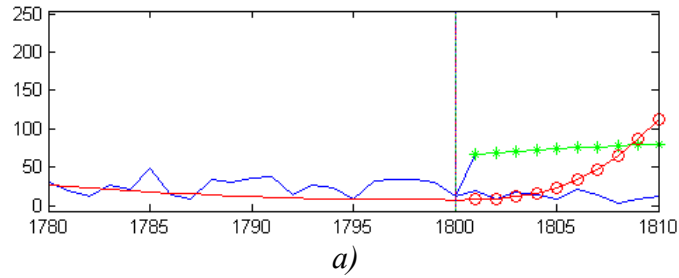
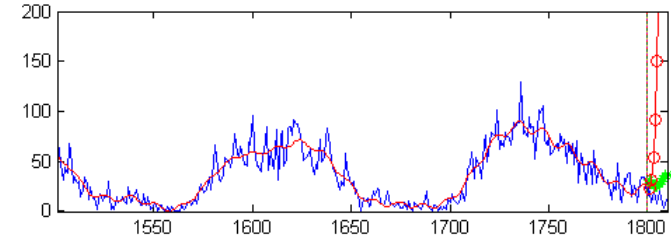
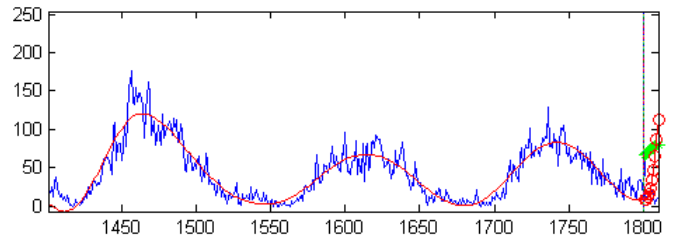
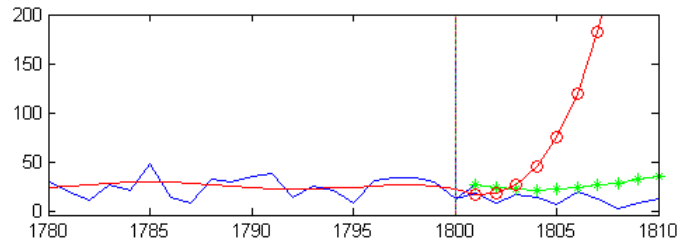
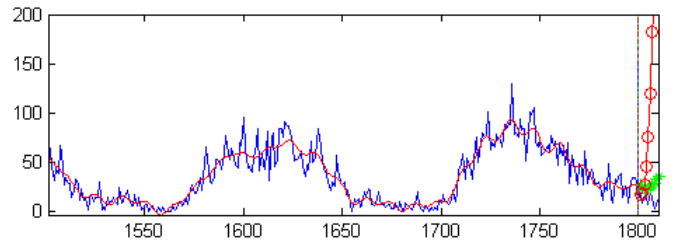


Рис. 3.15. Результаты прогнозирования ВР  $F_N^{(1)}$  в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по аппроксимирующему ВР полиному ( $\circ$ ):  $N_{wind} = 300, L = 150$ ;  
*a)*  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; *а)*  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ;  
*б)*  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; *в)*  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$



a)

б)



в)

Рис. 3.16. Результаты прогнозирования ВР  $F_N^{(1)}$  в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по аппроксимирующему ВР полиному ( $\circ$ ):  $N_{wind} = 400, L = 200$ ;  
 а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ;  
 в)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; г)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$

Таблица 3.3. Погрешности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ( $N_{wind} = 300, L = 150, N_{start} = 360$ )

Группируемые компоненты	$S_{exp}$	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
		Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-5	1.45	118	167	117	141	131	47	4	52	45	84
1-7	1.22	120	177	134	163	155	10	79	48	91	99
1-9	1.29	109	173	136	168	162	20	89	60	106	120
1-11	1.41	103	167	130	163	158	16	84	54	98	111
1-13	1.25	111	176	140	174	169	14	82	51	94	105
1-15	1.36	88	150	111	145	142	17	86	56	100	109
1-17	1.33	97	154	103	128	121	19	32	128	312	654

Таблица 3.4. Погрешности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ( $N_{wind} = 300, L = 150, N_{start} = 1360$ )

Группируемые компоненты	$S_{exp}$	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
		Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-5	1.44	2	20	11	3	9	10	30	19	7	9
1-7	1.56	0	22	13	5	11	10	29	18	5	7
1-9	1.11	1	21	13	4	10	9	27	14	1	3
1-11	1.02	9	27	14	2	4	1	23	14	5	12
1-13	1.07	0	22	13	5	11	9	26	10	9	16
1-15	1.50	0	22	14	6	13	12	29	15	3	9
1-17	1.51	1	22	14	6	12	13	32	19	4	2

Таблица 3.5. Погрешности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ( $N_{wind} = 300, L = 150, N_{start} = 2360$ )

Группируемые компоненты	$S_{exp}$	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
		Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-5	1.07	15	50	28	11	33	10	22	1	19	4
1-7	1.06	14	48	26	8	30	12	24	6	4	29
1-9	1.19	14	49	27	10	32	11	23	2	14	12
1-11	1.16	14	48	27	10	33	10	20	6	28	10
1-13	1.11	9	41	19	6	33	22	5	26	51	38
1-15	0.96	10	39	18	6	33	24	1	34	64	55
1-17	1.02	10	40	19	8	35	20	5	23	43	18



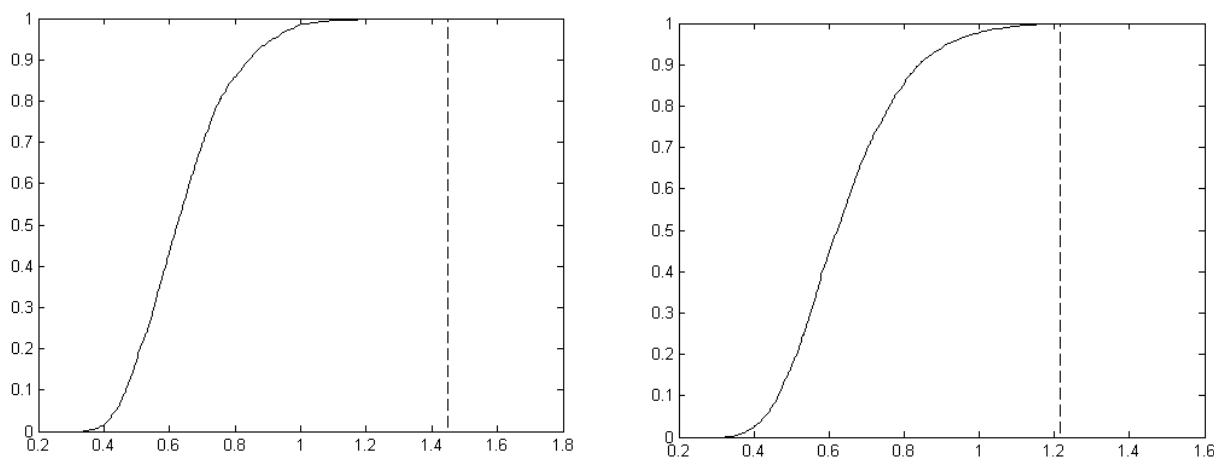


Рис. 3.17. Распределение статистики Колмогорова  $S_{\text{exp}}$  для следующих значений параметров аппроксимации ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа:  $N_{\text{wind}} = 300, L = 150, N_{\text{start}} = 360$ , собственные тройки № 1–5 (слева) и № 1–7 (справа)

## 2. Исследование погрешностей прогноза ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Для изучения зависимости точности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа в соответствии с рекурсивным алгоритмом и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему анализируемый ВР (ряд  $\tilde{F}_N^{(1)}$ ), был использован алгоритм, описанный ниже на псевдокоде.

### Алгоритм 3.1

**Назначение:** Исследование точности прогнозирования ВР

**Вход:**

$F$  (вектор, содержащий значения анализируемого ВР)

$N_p$  (длина вектора  $F$ )

$N_{\text{wind}}$  (размер отрезка анализируемого ВР, используемого для прогнозирования)

$Start$  (точка начального положения окна прогнозирования)

$x_{\text{Start}} = Start$  (номер начальной точки скользящего окна)

$x_{\text{End}} = x_{\text{Start}} + Start - 1$  (номер последней точки скользящего окна)

$x = F(x_{\text{Start}}:x_{\text{End}})$  (вектор, содержащий значения, на основе которых вычисляются значения аппроксимирующего полинома)

$In$  (вектор, содержащий номера группируемых троек собственных сингулярного разложения траекторной матрицы вектора)

$N_i$  (длина вектора  $In$ )

$L$  (размер сдвига)

$L_p$  (число прогнозируемых точек)

**Выход:**

матрица  $Z_z$  размерности  $(N_p - \text{End} - L_p) \cdot N_i \times 2 \cdot L_p$

**Инициализация:**

$Km1 = N_p - \text{End} - L_p$ ;

```

Km = (Np - End - Lp) · Ni;
k = 1;
for j = 1 : Km1
    for i = 1 : Ni
        m = In(i);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % LP спрогнозированных значений в соответствии с рекурсивным
        % алгоритмом
        Z1 = SSA_rekurs(x, L, x_Start, x_End, Lp, 1:m);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % LP спрогнозированных значений
        % по аппроксимирующему ряду  $\tilde{F}_N^{(1)}$  в соответствии
        % с рекурсивным алгоритмом
        Z2 = SSA_appr(x, L, x_Start, x_End, Lp, 1:m);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % LP спрогнозированных значений
        % по аппроксимирующему ряду  $\tilde{F}_N^{(1)}$  в соответствии
        % с новым алгоритмом
        Zz(k, 1:2·Lp) = augment(Z1, Z2);
        k = k + 1;
    end;
    x_Start = x_Start + 1;
    x_End = x_End + 1;
end;

```

---

Для представления зависимостей, о вычисленных в соответствии с алгоритмом 3.1, на рис. 3.17–3.18 приведены абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями первой прогнозируемой точки (остатки) и их распределения (гистограммы и аппроксимирующая кривая, построенная по Парзену-Розенблатту [79, 83]). Здесь для прогнозирования в соответствии с рекурсивным алгоритмом использовались собственные тройки № 1–5. Эти же собственные тройки были использованы для вычисления значений аппроксимирующего полинома, значения которого далее экстраполировались с помощью кубического сплайна. Из рис. 3.17–3.18 видно, что у обоих алгоритмов точность прогнозирования оказывается зависящей от локальных особенностей анализируемого ряда, которые априори неизвестны. В тоже время в рассматриваемом случае качество прогнозирования на основе использования аппроксимирующего полинома оказывается выше, так как максимальные значения отклонений между истинными и спрогнозированными значениями, у данного алгоритма оказываются более чем в два раза меньше, а отсчетов с малыми значениями погрешностей, напротив, почти в два раза больше.

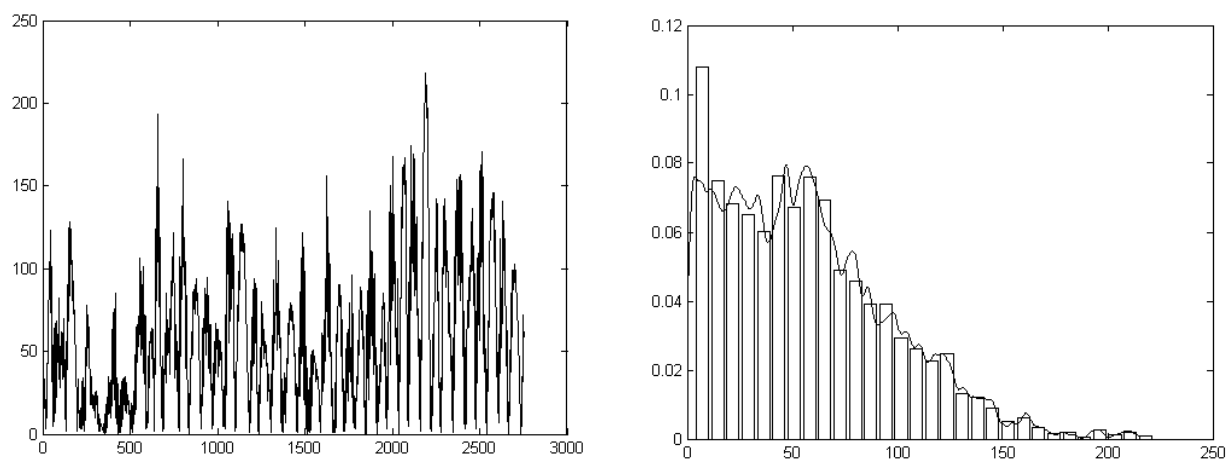


Рис. 3.17. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с рекурсивным алгоритмом (слева) и распределение остатков (справа)

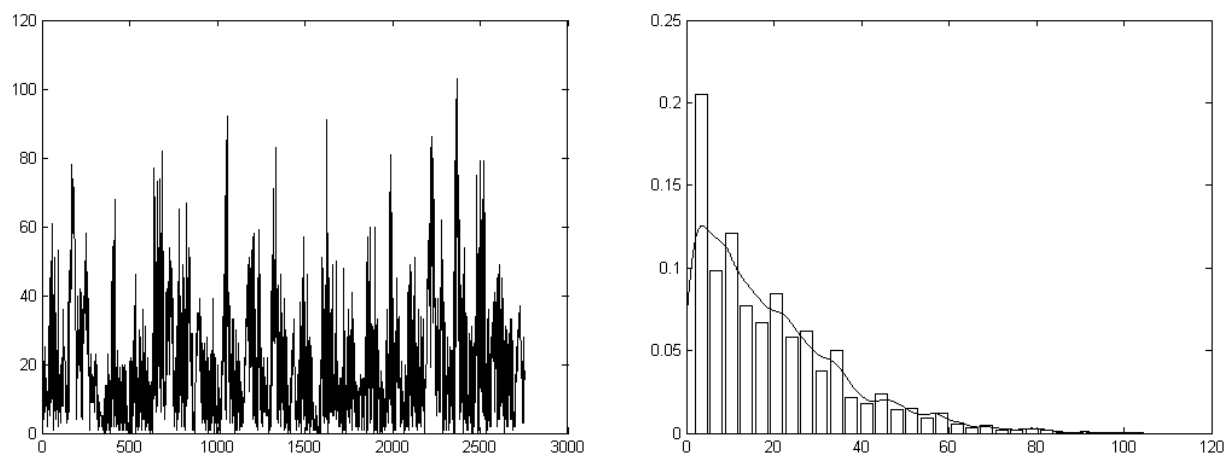


Рис. 3.18. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с рекурсивным алгоритмом прогнозирования и с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа)

Для удобства дальнейшего анализа для каждой из пяти прогнозируемых точек и заданным значениям номеров группируемых собственных троек были вычислены средние и среднеквадратические отклонения ВР, содержащих абсолютные значения разностей между истинными и спрогнозированными значениями ВР (остатков) (табл. 3.6).

Из табл. 3.6 видно:

1) алгоритм прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома при прогнозировании вперед на 1–3 точки оказывается в два-три раза точнее рекурсивного алгоритма;

2) при прогнозировании на 4–5 точек вперед увеличение числа собственных троек, используемых для вычисления значений аппроксимирующего полинома метод прогнозирования, приводит к увеличению погрешности прогноза данного метода;

3) для практического использования метода прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома требуются рекомендации по выбору числа собственных троек;

4) погрешность рекурсивного алгоритма в рассмотренном диапазоне параметров оказывается независимой от количества группируемых собственных троек и числа прогнозируемых точек.

Таблица 3.6. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков спрогнозированных значений

Группируемые компоненты	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
	Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1–5	58±40	59±40	59±40	59±40	60±40	20±16	21±17	22±18	23±21	25±26
1–7	60±41	59±41	60±40	60±40	60±40	18±14	20±17	23±22	28±33	36±53
1–9	60±41	60±41	60±40	60±40	60±40	17±14	20±18	26±24	36±50	52±84
1–11	60±41	60±41	60±40	60±40	60±40	17±15	22±21	31±39	47±71	63±95
1–13	60±42	60±41	60±40	60±40	60±41	18±16	24±25	37±49	60±93	78±120
1–15	60±42	60±41	60±41	60±41	59±41	19±17	27±29	45±60	76±115	98±135

Таким образом, полученные результаты позволяют дать обоснованные рекомендации по выбору метода прогнозирования: при краткосрочном прогнозировании следует использовать алгоритм, основанный на использовании аппроксимирующего полинома, при долгосрочном – рекурсивный алгоритм метода SSA. В тоже время следует отдавать отчет в том, что точность прогнозирования может оказаться относительно не высокой, на основании подобных прогнозов можно давать скорее качественные нежели количественные прогнозы о долгосрочных тенденциях изменения анализируемого ВР.

### 3. Выбор количества собственных троек при прогнозировании на основе аппроксимирующего полинома

Для обоснованного выбора числа собственных троек, используемых для группировки и, соответственно, вычисления значений аппроксимирующего полинома (ряд  $\tilde{F}_N^{(1)}$ ) был использован алгоритм, описанный ниже на псевдокоде.

#### Алгоритм 3.2

**Назначение:** Нахождение набора собственных троек, рекомендуемых для прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома

**Вход:**

*F* (вектор, содержащий значения анализируемого ВР)

*Np* (длина вектора *F*)

*Nwind* (размер отрезка анализируемого ВР, используемого для прогнозирования)

*Start* (точка начального положения окна прогнозирования)

*x\_Start* = *Start* (номер начальной точки скользящего окна)

*x\_End* = *x\_Start* + *Start* – 1 (номер последней точки скользящего окна)

*x* = *F*(*x\_Start*:*x\_End*:) (вектор, содержащий значения, на основе которых вычисляются значения аппроксимирующего полинома)

*In* (вектор, содержащий номера группируемых троек собственных сингулярного разложения траекторной матрицы вектора)

$N_i$  (длина вектора  $In$ )  
 $L$  (размер сдвига)  
 $L_p$  (число прогнозируемых точек)

**Выход:**

матрица  $Zz$  размерности  $(N_p - End - L_p) \cdot N_i \times 2 \cdot L_p$

**Инициализация:**

```

Km1=Np - End- Lp;
Km = (Np - End - Lp)·Ni;
k = 1;
for j = 1 : Km1
    for i = 1 : Ni
        m = In(i);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % разности между исходным и аппроксимирующим его ВР
        Z = SSA_res(x, L, x_Start, x_End, Lp, 1:m);
        % вычисление критерия Колмогорова в предположении, что
        % остатки распределены по нормальному закону для каждого
        % сочетания собственных троек
        [mu,sigma] = normfit(Z); % вычисление параметров
                                % нормального распределения

        z=sort(Z);
        Nn=length(z);
        S=std(z);
        S=sqrt((Nn-1)/Nn)*S;
        Dn_plus=[];
        Dn_minus=[];
        for is=1:Nn
            Dn_plus(is)=is/Nn-normcdf(z(is),mu,sigma);
            Dn_minus(is)=normcdf(z(is),mu,sigma) - (is-1)/Nn;
        end;
        D1=max(Dn_plus);
        D2=max(Dn_minus);
        Dn=max(D1,D2);
        Sk(i,1)=m;
        Sk(i,2)=(6*Nn*Dn+1)/(6*sqrt(Nn));
        k = k + 1;
    end;
    [Smin I]=min(Sk(:,2),[],1);
    Z2=SSA_appr(x,L,x_Start,x_End,Lp,1:In(I),false);
    Zz2(j,1:Lp)=Z2;
    Zz2(j,Lp+1)=In(I);
    Zz2(j,Lp+2)=Smin;
    x_Start=x_Start+1;
    x_End=x_End+1;

```

end;

Для представления о зависимостях, вычисленных в соответствии с алгоритмом 3.1, на рис. 3.19–3.23 приведены абсолютные значения разностей

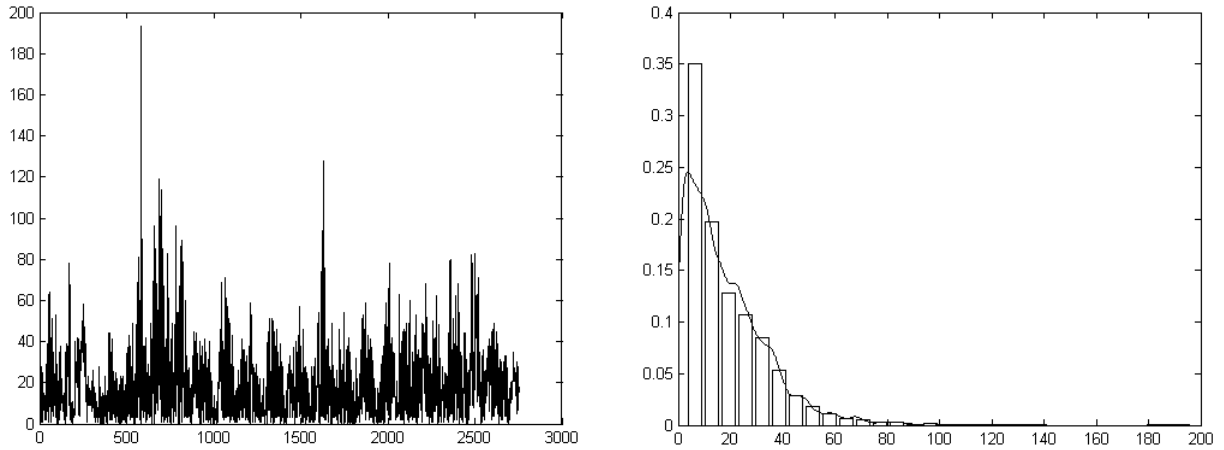


Рис. 3.19. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (первая прогнозируемая точка)

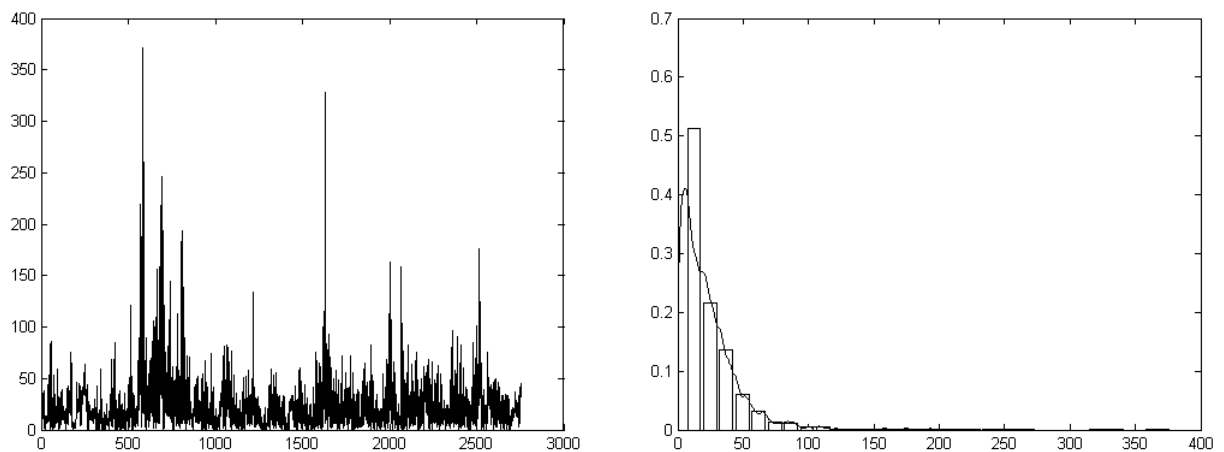
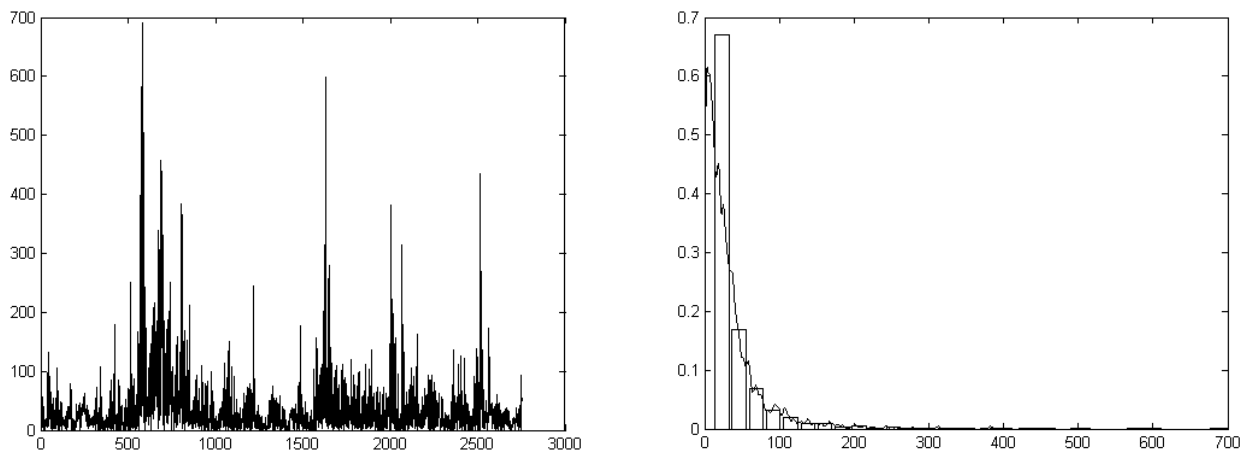
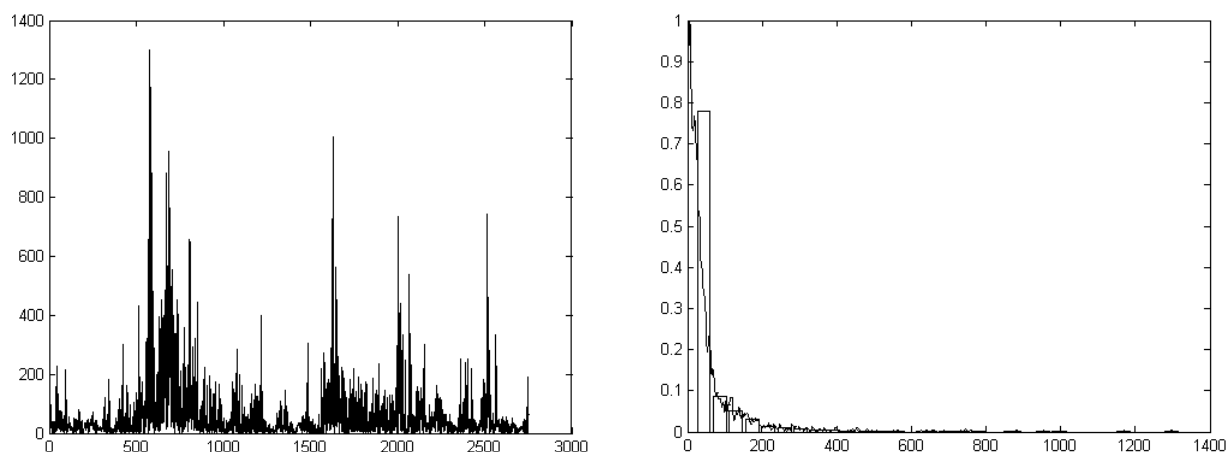


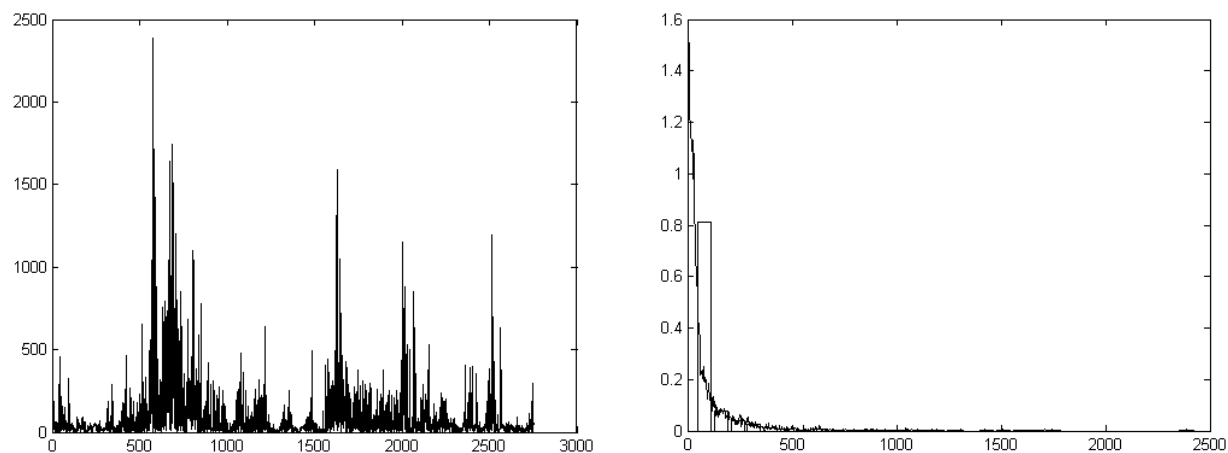
Рис. 3.20. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (вторая прогнозируемая точка)



*Рис. 3.21. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (третья прогнозируемая точка)*



*Рис. 3.22. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (четвертая прогнозируемая точка)*



*Рис. 3.23. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (пятая прогнозируемая точка)*

между фактическими и спрогнозированными значениями первой прогнозируемой точки (остатки) и их распределения (гистограммы и аппроксимирующая кривая, построенная по Парзену-Розенблатту [83]). Здесь для вычисления значений аппроксимирующего полинома и далее прогнозирования сего использовались собственные тройки, соответствующие минимальному значению критерия Колмогорова.

Средние значения разностей между истинными и спрогнозированными значениями анализируемого ВР, в рассматриваемых случаях для первой, второй, третьей, четвертой, и пятой прогнозируемых точек составили: 19, 24, 36, 57, 86, соответственно. Сравнивая эти результаты с данными табл. 3.6, видим, что отклонения прогнозных значений для первой и второй спрогнозированных точек оказываются близкими к аналогичным величинам табл. 3.6. Данный результат позволяет сделать вывод о том, что для рассматриваемого ВР предложенный критерий выбора собственных троек, используемых для вычисления

значений аппроксимирующего полинома, позволяет получать достоверные результаты. Также следует отметить, работоспособность предложенного критерия для двух первых прогнозируемых точек подтверждает ранее сделанный вывод о том, что алгоритм прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома следует использовать для краткосрочных прогнозов.

В заключение рассмотрения проблем, возникающих при использовании метода SSA прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, отметим, что оценки точности прогнозируемых значений, полученные на основе сравнения известных и спрогнозированных значений, можно использовать для оценки погрешности прогнозируемых значений, в тех случаях, когда соответствующие им значения анализируемых ВР неизвестны.

### **3.3. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности**

Современный рынок оптовый рынок электрической мощности (ОРЭМ) имеет следующую структуру: часть электроэнергии покупается по регулируемым договорам, цены и объемы по которым фиксируются на весь год в начале года. Эти цены регулируются администратором торговой системы (АТС). (В 2007 г. данный вид закупок составлял 80–90% общего объема рынка ОРЭМ.) В настоящее время доля данного вида закупок последовательно уменьшается. Предусмотрено, что в 2012 г. она должна упасть до нуля. Оставшиеся объемы электроэнергии и мощности покупаются на рынке на сутки вперед (РВС). Отмеченные обстоятельства являются экономическим стимулом более качественного планирования энергопотребления и энергопроизводства на сутки вперед, являющегося необходимым условием извлечения максимальной прибыли из краткосрочных договоров.

Дополнительный интерес к статистическим и частотно-временным свойствам временных рядов (ВР), содержащих среднесуточные и почасовые цены на РВС, вызваны их практической важностью для оптимизации стратегии управления и снижения рисков реально функционирующих производственных систем.

Однако обсуждаемые ВР оказываются трудно прогнозируемыми вследствие большого количества факторов, оказывающих на них влияние: объемов производства и потребления электроэнергии, графиков ремонтов генерирующего и сетевого оборудования, погодных условия, состава генерирующего оборудования, уровня водности, ценовых стратегий участников и т.п. (Например, совместная генерация тепловой и электрической энергии на ТЭЦ напрямую зависит от температуры окружающего воздуха [64], определяющей, в соответствии с нормативными требованиями, количество сжигаемого топлива и режимы работы турбин.)

Как следствие, точность результатов прогнозирования среднесуточных и часовых значений цен на рынке ОРЭМ, размещенных на сайте [76] оказывается относительно невысокой. Например, в 2010 г., как показывает анализ разности между спрогнозированными и фактическими значениями, представленной на



рис. 3.23: 40% часовых прогнозов имели точность ниже 10%, 28% часовых прогнозов – 5–10%, 32% часовых прогнозов – выше 5% (рис. 3.24).

Данный результат оказывается несколько неожиданным, в особенности, принимая во внимание, что почасовые цены на электроэнергию в конкретной энергосистеме, наряду со случайной составляющей, определяется большим количеством детерминированных процессов, которые потенциально, могут быть описаны в рамках тех или иных математических моделей. В этой связи представляется целесообразным проведение целенаправленных исследований особенностей рассматриваемых ВР, без учета которых дальнейшее совершенствование прогностических моделей представляется невозможным.

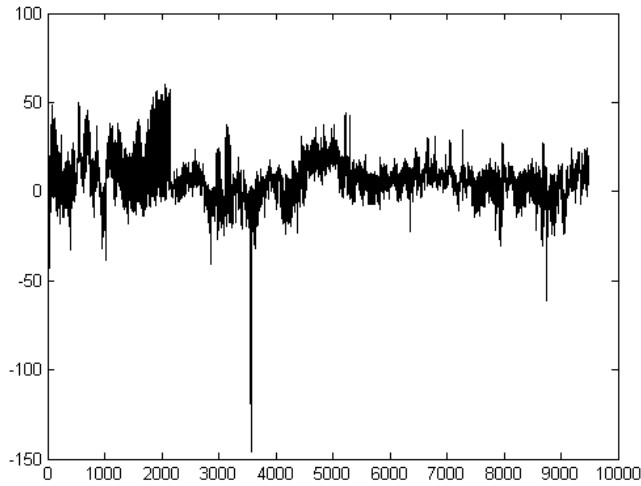


Рис. 3.24. Визуализация ВР, содержащего значения относительной погрешности прогноза часовых значений цены на электроэнергию (в %) в 2010 г. от времени (начало отсчета – 0 час. 1 января 2010 г., период дискретизации ВР – 1 час)

## 1. Частотный анализ временных рядов, содержащих часовые значения цен на ОРЭМ

Рассмотрим ВР, образованные из индексов часовых цен на ОРЭМ по европейской ценовой зоне России в период с 1 марта 2009 г. по 25 марта 2011 г., сформированных по данным [76] (рис. 3.25). Количество членов временного ряда  $N = 18981$ .

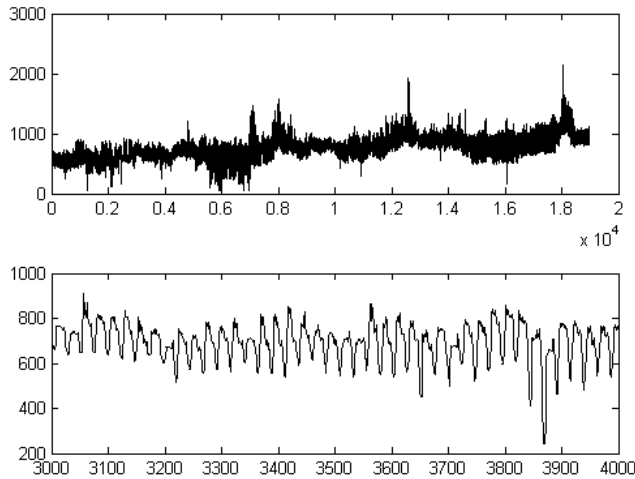


Рис. 3.25. Визуализация ВР, содержащий значения часовых цен на электроэнергию (руб./Мвт·час) в период с 1.03.2009 по 31.05.2011 гг. от времени (начало отсчета – 0 час. 1 марта 2009 г., период дискретизации ВР – 1 час) (сверху – исходный ВР, снизу – фрагмент ВР)

Анализ зависимостей, представленных на рис. 3.25, позволяет предположить, что они представляют собой некоторую линейную комбинацию тренда  $(f_1(t))$ , нескольких периодических составляющих  $f_2(t) = \sum_{i=1}^K f_{2i}(t)$ , а также случайных составляющих  $f_3(t)$ :

$$u_i = f_1(t_i) + \sum_{i=1}^K f_{2i}(t_i) + f_3(t_i). \quad (3.5)$$

Для подтверждения данного предположения на первом шаге была проверена гипотеза о возможности описания тренда линейной зависимостью. Для этого с помощью метода наименьших квадратов была найдена линейная аппроксимация рассматриваемого ФВР:

$$u(t) = 0,018074 \cdot t + 585,304209,$$

который далее был удален из ВР. ФВР, получившийся после удаления линейного тренда, и его гистограмма представлены на рис. 3.26.

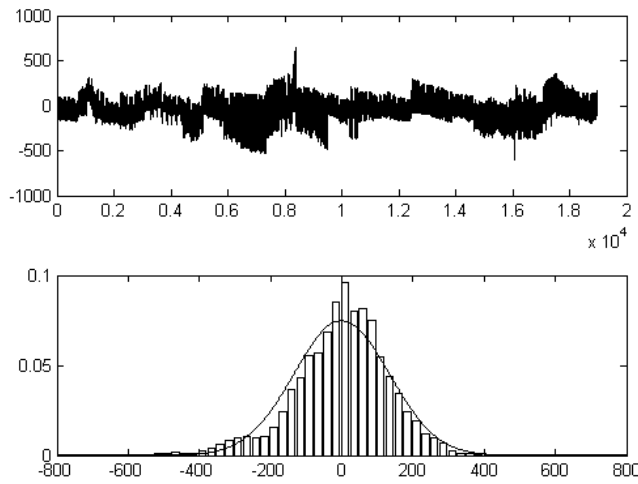


Рис. 3.26. Визуализация ФВР с исключенным линейным трендом (сверху – анализируемый ВР, снизу – гистограмма данного ВР)

Проверка распределения остатков по критериям Колмогорова-Смирнова (значение критерия 0.04905) и Лиллиеформа показала, что вероятность ошибки при отклонении гипотезы о согласии данного распределения нормальному распределению не превышает 0.01 (соответственно, критический уровень равен 0.05). Следовательно, распределение остатков ВР с удаленным линейным трендом оказывается отличным от нормального. Данный результат, с нашей точки зрения, объясняется следующими причинами:

- 1) функция  $f_1(t)$  оказывается нелинейной;
- 2) в ФВР с удаленным линейным трендом присутствуют детерминированные периодические составляющие

$$f_2(t) = \sum_{i=1}^K f_{2i}(t).$$

Для проверки предположения о наличии в рассматриваемом ВР детерминированных периодических составляющих было использовано оконное преобразование Фурье, предложенное Д. Габором [102]. (Напомним, что данное преобразование зависит от следующего набора параметров: размера скользящего окна  $W$ , величины перекрытия текущего и предыдущего окон  $W_0$ , а также количества точек  $Nf$ , по которым вычисляются коэффициенты ряда Фурье.) Применение данного преобразования к ВР позволяет получить на последовательных временных интервалах набор спектров (следуя [51], «мгновенных» спектров). Для стационарного ВР форма данных спектров, как очевидно, будет одинаковой.

Для нестационарного временного ряда наличие набора мгновенных спектров позволяет вычислить средний спектр

$$|\bar{S}_n| = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[ |S_{k,n}| / \max(|S_{k,n}|) \right],$$

где  $n$  – номер спектральной гармоники,  $n = \overline{1, N}$ ,  $N$  – число спектральных гармоник,  $k = \overline{1, K}$ ,  $K$  – число мгновенных спектров, и использовать в качестве количественно показателя «степени стационарности» ВР максимальное отклонение между средним и мгновенными спектрами:

$$\max \left[ \left( \left\| \bar{S}_n - S_{n,k} \right\| \right) \right].$$

На рис. 3.27 представлены усредненные мгновенные спектры ФВР для различных значений скользящего окна  $W$  (величина перекрытия соседних окон  $W_0 = 0.8W$ , длина преобразования Фурье  $Nf = 4W$ ). Здесь выбор размера окна выбирался кратным количеству отсчетов ВР, приходящихся на временной интервал длительностью 31 день.

Значения выбранного количественного показателя «степени нестационарности» ФВР представлены в табл. 3.6.

Из рис. 3.27 видно, что форма мгновенных спектров ФВР с удаленным линейным трендом при изменении в выбранном диапазоне размера окна оказывается подобной – основной вклад в энергию спектра вносят гармоники, частоты кратны  $24/m$  час,  $m = 1, 2, \dots$ . Увеличение размера окна  $W$ , с одной стороны, приводит к появлению дополнительных спектральных составляющих (в том числе, удастся выделить составляющую с периодом, равным 1 неделя) и уменьшает, как видно, из табл. 3.6, вариабельность мгновенных спектров, с другой.

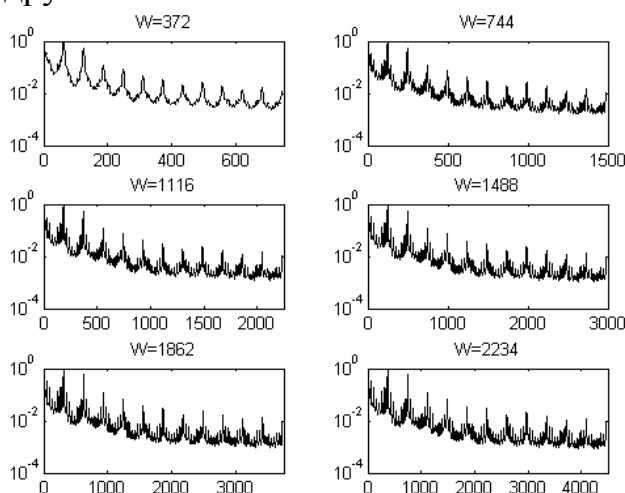


Рис. 3.27 Усредненные мгновенные спектры ФВР с удаленным линейным трендом (ось абсцисс – номер гармоники  $n$ , ось ординат –  $\log |\bar{S}_n|$ )

Таблица 3.6 К оценке устойчивости мгновенных спектров ФВР с удаленным линейным трендом

$W$	372	744	1116	1488	1862	2234
Критерий, %	4.9	3.5	2.6	2.3	2.1	1.9

Таким образом, полученные результаты позволяют классифицировать ФВР на временных интервалах длительностью от полумесяца до трех месяцев как «квазистационарный» и использовать для его описания математическую модель (3.5). При этом для оценки параметров линейного тренда целесообразно использовать временные интервалы длительностью один год и более. Получен-

ные оценки длительности интервалов «квазистационарности» анализируемого ВР будем использовать при прогнозировании его значений.

## 2. Анализ результатов обработки ВР, содержащего часовые значения цен на ОПЭМ, методом SSA

Рассмотрим результаты анализа и прогнозирования ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию в период с 1 марта 2009 г. по 31 декабря 2011 г. (длина анализируемого ВР  $N = 18831$ ). Далее, основываясь на результатах, полученных в Главе 2, мы будем использовать:

1) зависимости разностей собственных значений выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от размера окна сдвига  $L$ ;

2) также зависимости мгновенных значений восстановленных ГК по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР ( $L = 300$ );

3) зависимость нормированной спектральной плотности мощности восстановленных ГК по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР ( $L = 300$ ) от частоты.

Выбранные характеристики для изучаемого ВР представлены на рис. 3.28–3.36. Из рис. 3.28 видно, что периодическими оказываются ГК, полученные группировкой следующих собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы: № 2–3, № 4–5. Периоды данных ГК и объясняемые ими дисперсии анализируемого ВР, приведены в табл. 3.7.

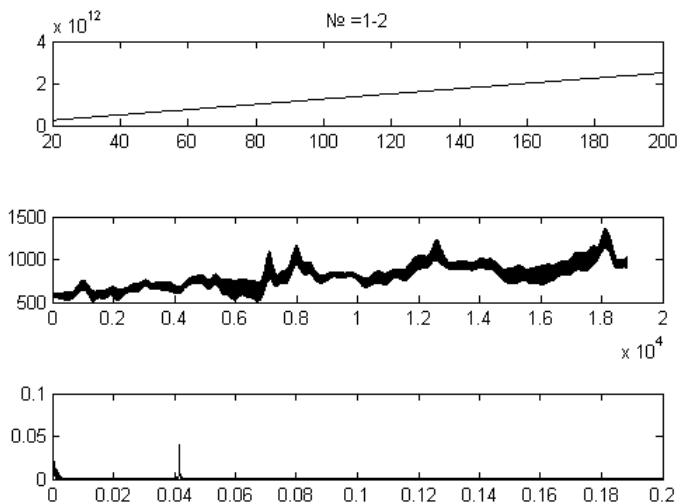


Рис. 3.28. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 1, 2 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 1, 2; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 1, 2

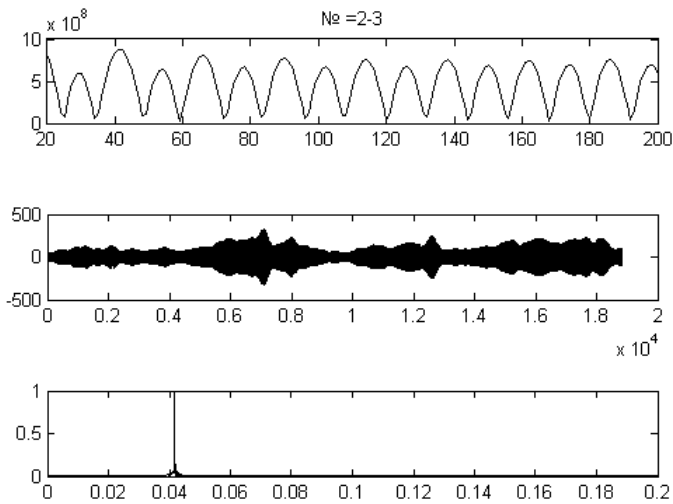


Рис. 3.29. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 2,3 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 2, 3; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 2, 3

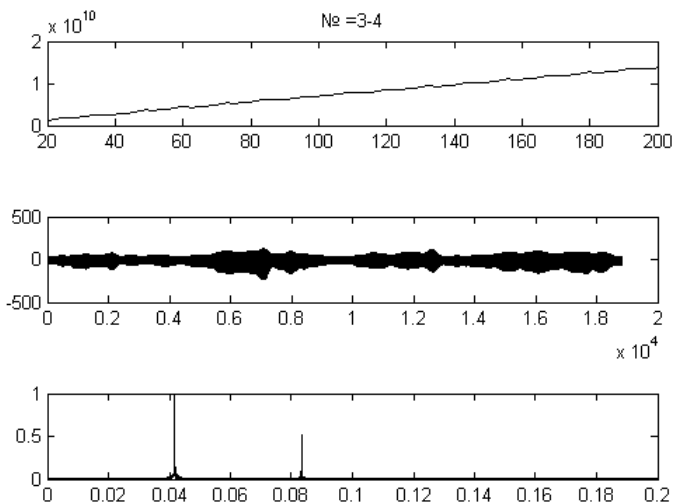


Рис. 3.30. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 3,4 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 3,4; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 3,4

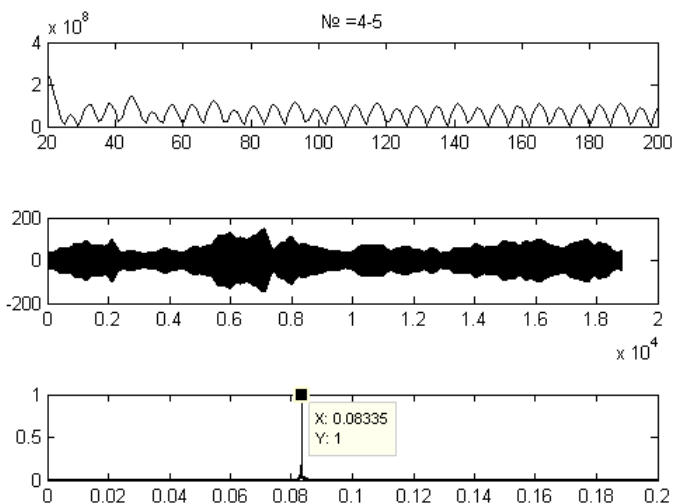


Рис. 3.31. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 4, 5 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 4, 5; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 4, 5

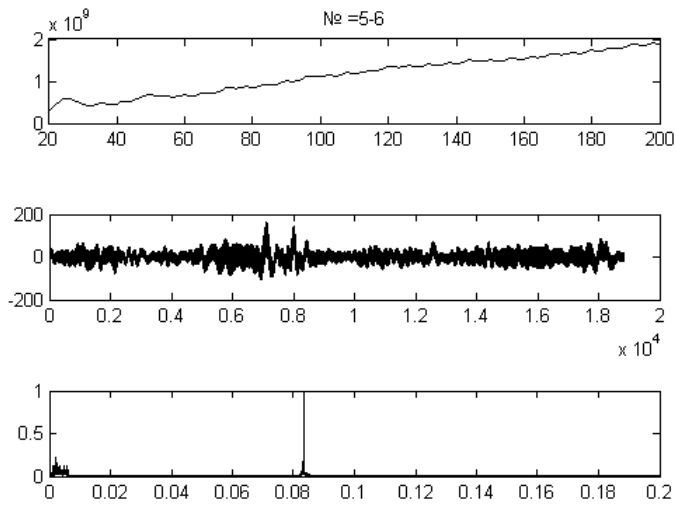


Рис. 3.32. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 5,6; от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 5, 6; снизу: нормированная спектральная плотность мощности : ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 5, 6

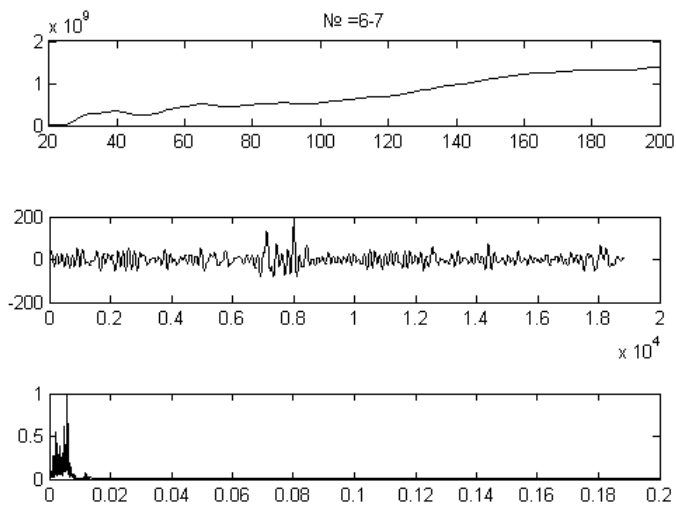


Рис. 3.33. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 6, 7 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 6, 7; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 6, 7

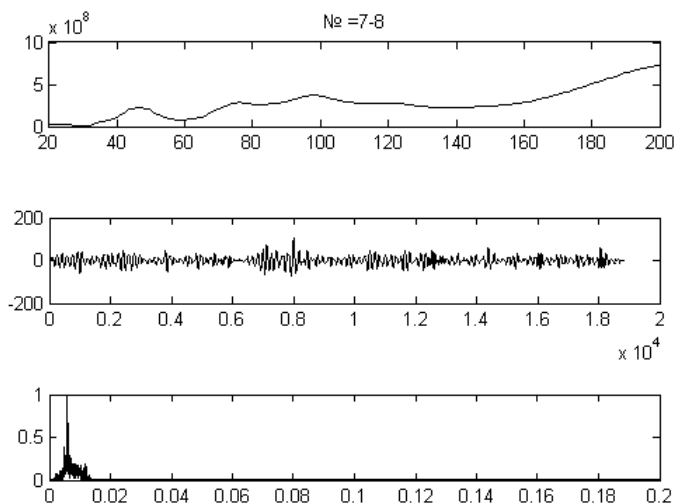


Рис. 3.34. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 7, 8 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 7, 8; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 7, 8

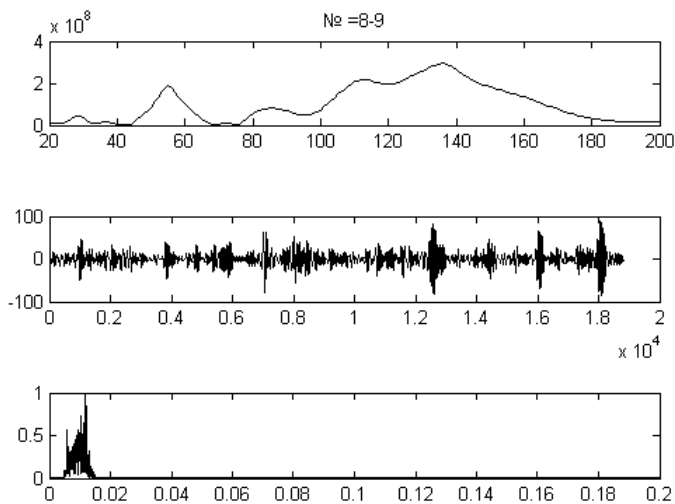


Рис. 3.35. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 8, 9 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 8, 9; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 8, 9

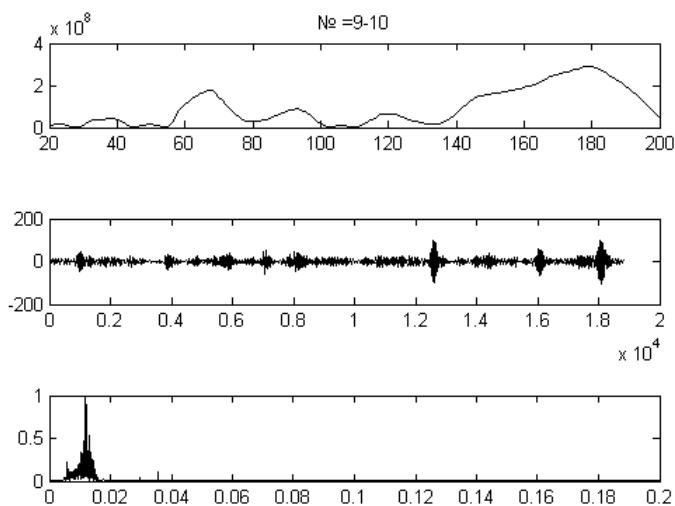


Рис. 3.36. Сверху: зависимость разности между собственными числами № 9, 10 от размера параметра сдвига  $L$ ; в середине: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 9, 10; снизу: нормированная спектральная плотность мощности: ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы № 9, 10

Таблица 3.7. Количественные характеристики сгруппированных ГК, оказывающихся периодическими

Номера сгруппированных собственных троек	Период	Объясняемая дисперсия
2–3	24 час	1,46%
4–5	12 час	0,39%

Первая ГК, объясняющая 97,31% дисперсии анализируемого ВР, является трендом, представленным на рис. 3.37. Из рис. 3.37 видно, что данный тренд является сложной функцией времени, устранить которую из исходного ряда с помощью процедуры вычисления первых и т.д. разностей не представляется возможной.

Следует отметить, что ГК, восстановленная по собственным тройкам сингулярного разложения № 1–5 анализируемого ВР, объясняют 99,1% его дисперсии. Разности между исходным ВР и данной ГК (остатки модели), а также распределение остатков и нормальное распределение  $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ , где  $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$  оцениваются по ряду остатков в соответствии принципом максимального правдоподобия и предположением о нормальности их распределения, представлены на рис. 3.38.

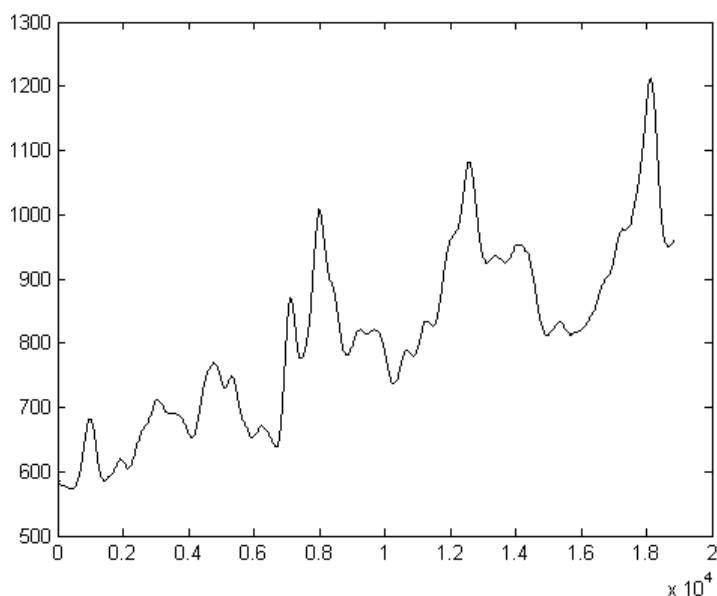


Рис. 3.37. ГК, восстановленная по собственной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР № 1

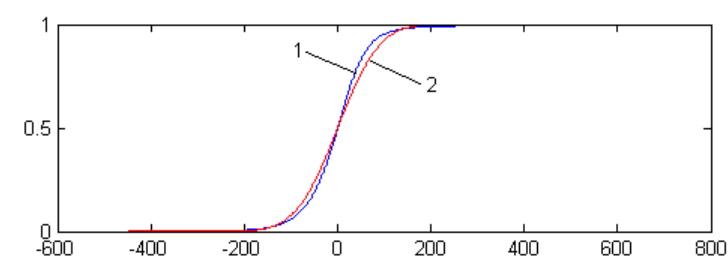
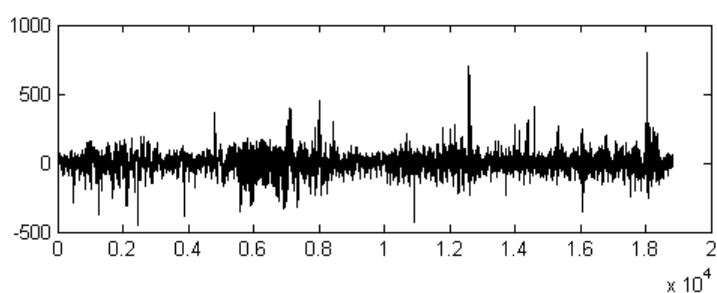


Рис. 3.38. Вверху: разность между исходным ВР и ГК, восстановленной по собственным тройкам сингулярного разложения № 1–5 анализируемого ВР (остатки); внизу: распределение остатков модели (1 – экспериментальная функция распределения; 2 – распределение  $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ )

Анализ форм экспериментального и теоретического распределений, представленных на рис. 3.38, позволяет выдвинуть гипотезу о том, что остатки модели распределены по нормальному закону  $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , являющуюся сложной. Для ее проверки, как и ранее было использовано статистическое моделирование, результаты которого позволили получить для рассматриваемого случая значение статистики Колмогорова  $S_{\text{exp}}$ , оказавшееся равным 9.68, и ее распределение (рис. 3.39).

Из рис. 3.39, видно, что  $S_{\text{exp}} > S_{0.995} = 1.083$ , поэтому гипотеза о  $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , отклоняется. Данный результат свидетельствует о том, что математическая модель, построенной группировкой ГК собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы № 1–5 анализируемого ВР, не является совершенной, поэтому вопрос о их выборе требует дополнительного исследования.



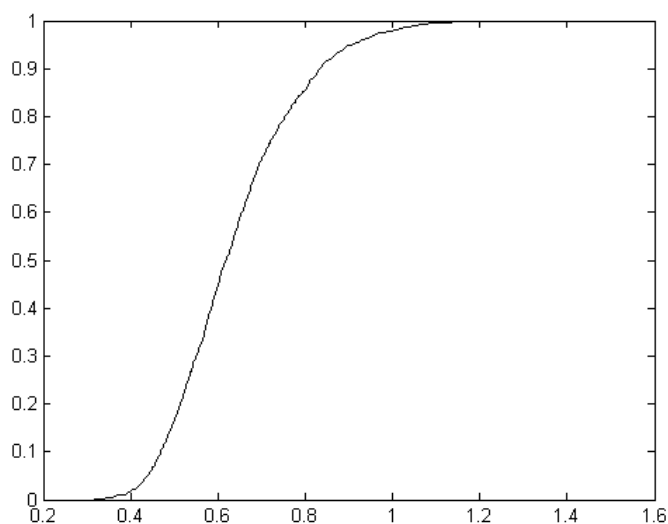


Рис. 3.39. Распределение статистики критерия Колмогорова для ряда остатков

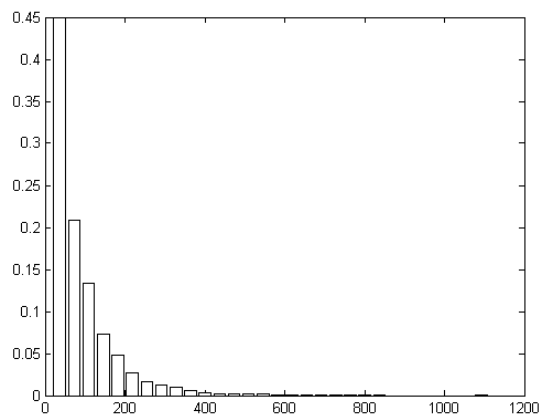
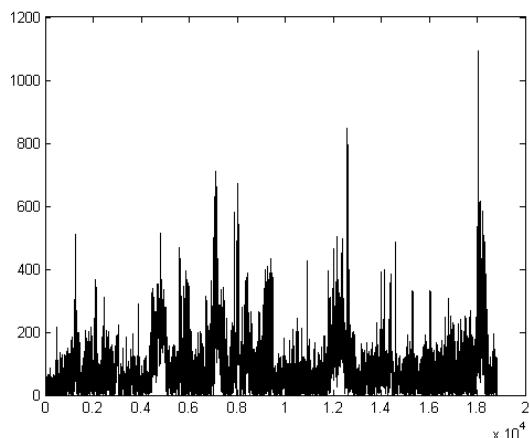
### 3. Исследование точности прогнозирования ВР, содержащего часовые значения цен на ОРЭМ

В связи с тем, что на сайте [76], выкладываются как фактические часовые значения часовых цен на электроэнергию на ОРЭМ, так и соответствующие прогнозируемые значения, представляется целесообразным провести сравнение абсолютных значений разностей между известными и точными значениями анализируемого ВР (остатков) с помощью следующих алгоритмов прогнозирования:

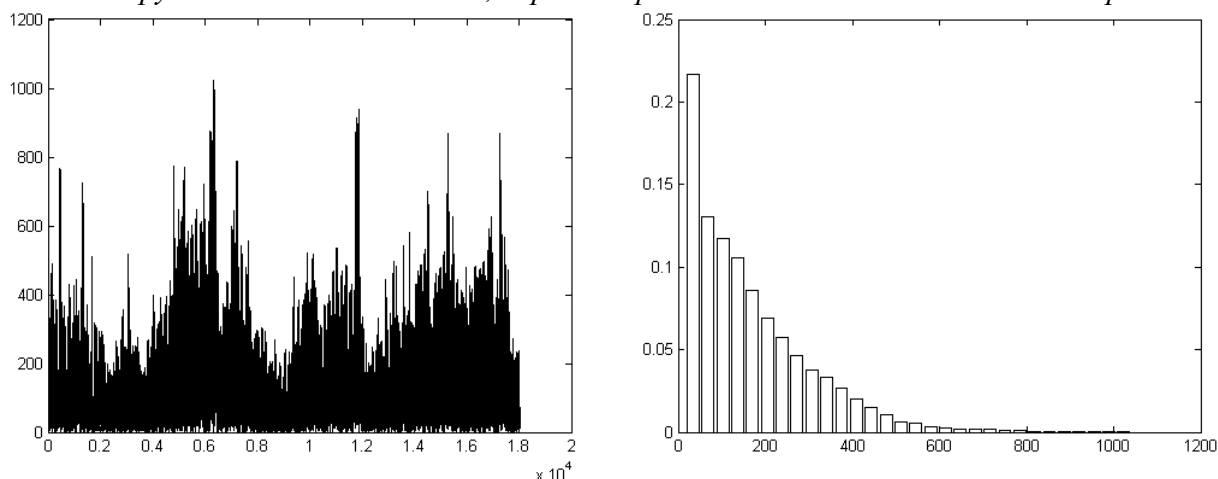
- 1) алгоритм, используемый компанией, поддерживающий сайт [76] (который, однако, посетителям сайта остается неизвестным);
- 2) рекурсивный алгоритм прогнозирования метода SSA;
- 3) алгоритм прогнозирования, основанный на использовании аппроксимирующего исходный ВР полинома, значения которого вычисляются в соответствии с методом SSA.

Далее, для краткости, будем обозначать данные алгоритмы прогнозирования АлПр № 1, № 2, № 3, соответственно.

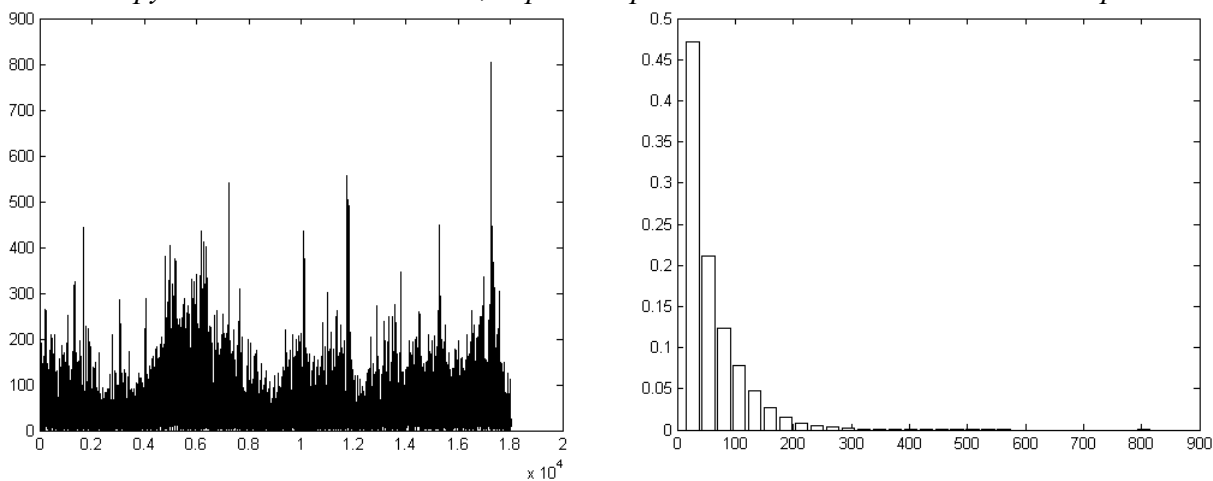
Временной ряд, содержащий абсолютные мгновенные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями в соответствии с АлПр № 1, а также гистограмма их распределения представлены на рис. 3.40. Здесь среднее значение ряда остатков оказалось равным 89, среднеквадратическое отклонение – 90.



*Рис. 3.40. Абсолютные значения разностей между фактическими значениями анализируемого ВР и значениями, спрогнозированными в соответствии с АлПр № 2*



*Рис. 3.41. Абсолютные значения разностей между фактическими значениями анализируемого ВР и значениями, спрогнозированными в соответствии с АлПр № 3*



*Рис. 3.42. Абсолютные значения разностей между фактическими значениями анализируемого ВР и значениями, спрогнозированными в соответствии с АлПр № 3*

Для изучения зависимостей точности прогнозирования ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ, с помощью рекурсивного алгоритма и с помощью алгоритма прогнозирования по полиному, аппроксимирующему анализируемый ВР (ряд  $\tilde{F}_N^{(1)}$ ), был использован алгоритм 3.1. Для представления о точности прогнозирования, вычисленных в соответствии с АлПр № 1, на рис. 3.41–3.42 приведены абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями первой прогнозируемой точки (остатки). Здесь для прогнозирования в соответствии с АлПр № 2 использовались собственные тройки № 1–5. Эти же собственные тройки были использованы для вычисления прогнозируемых значений с помощью АлПр № 3. Из рис. 3.40–3.42 видно, что у обоих алгоритмов точность прогнозирования оказывается зависящей от локальных особенностей анализируемого ряда, которые априори неизвестны. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков, представленных на рис. 3.41, 3.42, составили 158 и 139, 58 и 55, соответственно. Таким образом, в рассматриваемом случае качество прогнозирования

на основе АлПр № 3 оказывается наилучшим из всех рассмотренных алгоритмов, а точность АлПр № 2, напротив оказывается ниже, чем у АлПр № 1.

Таблица 3.8. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков спрогнозированных значений в соответствии с алгоритмом № 2

Группируемые компоненты	Номер прогнозируемой точки				
	1	2	3	4	5
1–5	165±139	164±137	165±138	167±140	169±141
1–7	167±142	173±147	180±151	185±155	189±158
1–9	168±142	175±148	179±152	181±154	181±154
1–11	171±142	167±140	165±140	165±140	166±141
1–13	171±142	182±152	185±155	182±152	180±151
1–15	171±143	179±151	180±154	178±152	178±151

Таблица 3.9. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков спрогнозированных значений в соответствии с алгоритмом № 3

Группируемые компоненты	Номер прогнозируемой точки				
	1	2	3	4	5
1–5	58±55	94±93	94±93	295±350	479±593
1–7	51±51	93±98	93±98	308±382	502±648
1–9	53±55	101±112	101±112	343±443	559±752
1–11	57±62	114±134	114±134	390±533	636±906
1–13	61±68	125±148	125±148	433±586	708±996
1–15	66±76	135±162	135±162	470±638	774±1086

Для удобства дальнейшего анализа для каждой из пяти прогнозируемых точек и заданным значениям номеров группируемых собственных троек были вычислены средние и среднеквадратические отклонения ВР, содержащих абсолютные значения остатков для АлПр № 2 и № 3 (табл. 3.8, 3.9).

Из табл. 3.8, 3.9 видно:

1) наибольшую точность прогнозирования точки № 2 из рассмотренных алгоритмов имеет АлПр № 3;

2) точность прогнозирования первой точки в соответствии с АлПр № 3 оказывается максимальной, когда значения аппроксимирующего полинома вычисляются на основе группировки ГК № 1–7;

3) точность АлПр № 3 для второй и далее прогнозируемых точек оказывается ниже, чем у алгоритма № 1;

4) точность прогнозирования в соответствии с АлПр № 2 оказывается минимальной из всех рассмотренных выше алгоритмов прогнозирования.

Таким образом, можно рекомендовать использовать для прогнозирования значений часовых цен на электроэнергию на ОРЭМ на один час вперед алгоритм, основанный на использовании аппроксимирующего полинома, значения которого вычисляются группировкой ГК № 1–7, вычисляемых для отрезка анализируемого ВР длина  $N_{wind} = 800$  и значения сдвига  $L = 40$ .

### 3.4. Выводы

1. Результаты применения метода SSA для анализа ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ, содержащие 3161 и 18981 отсчет, соответственно, показывают эффективность, предложенного в Главе 2 подхода к идентификации собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы данных ВР, с помощью зависимости разности собственных чисел, номера которых отличаются друг от друга на единицу.

2. Результаты анализа данных ВР, полученные с помощью метода SSA, не противоречат результатам, полученным другими известными методами анализа ВР, в том числе спектрального анализа и вейвлет-анализа.

3. Результаты применения метода SSA для прогнозирования изученных ВР, показывают, что данный метод является скорее инструментом краткосрочного прогнозирования, чем долгосрочного прогнозирования.

4. Продемонстрирована целесообразность использования для краткосрочного прогнозирования ВР аппроксимирующего полинома, значения которого вычисляются в соответствии с методом SSA.

5. Показано, что при прогнозировании ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, на основе использования значений аппроксимирующего полинома, следует выбирать собственные тройки сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР из условия обеспечения минимального значения критерия Колмогорова ряда остатков (разностей между исходным ВР и аппроксимирующим полиномом), а при прогнозировании ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ, следует использовать собственные тройки № 1–7.

6. На основе анализа экспериментальных данных даны рекомендации по выбору параметров метода SSA в задаче прогнозирования изученных ВР: размера скользящего окна  $N_{wind}$ , размера окна сдвига  $L$ , количества используемых собственных троек сингулярного разложения траекторной матрицы.

8. Предложенные подходы к анализу и прогнозированию являются универсальными и могут быть использованы для любых ВР.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Исследованы особенности собственных чисел траекторной матрицы метода SSA временных рядов вида  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$  (как для детерминированных, так и случайных временных рядов), результаты которого свидетельствуют о целесообразности использования при выборе параметров метода SSA временных рядов, содержащих значения разностей между последовательными собственными числами, вычисляемыми для последовательных значений параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – параметр сдвига,  $\Delta t$  – шаг временной сетки, соответствующей анализируемому временному ряду.

2) Проведена экспериментальная апробация предложенных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных временных рядов, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности.

3) Предложено использовать для прогнозирования нестационарных временных рядов сплайн-интерполяцию аппроксимирующего низкочастотную составляющую анализируемого временного ряда полинома, значения которого вычисляются в соответствии с методом SSA.

4) Предложен алгоритм оценки точности прогнозирования нестационарных временных рядов методом SSA.

5) Получены оценки точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности, подтверждающие преимущества предложенного в работе метода краткосрочного прогнозирования нестационарных временных рядов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики. Т. 1. [Текст]/ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян // М.: Юнити, 1998. – 656 с.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Т 2. [Текст]/ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян // М.: Юнити, 1998. – 432 с.
3. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: Справ. изд. [Текст] / С. А. Айвазян, И. С. Енюхов, Д. Ж. Мешалкин // М.: Финансы и статистика, 1983. –471 с.
4. Александров Ф.И. Разработка программного комплекса выделения и прогноза аддитивных компонент временных рядов в рамках подхода «Гусеница». Автореф. дисс.... канд. физ.-мат. наук. –СПб, 2006. –150 с.
5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Пер. с англ. [Текст] / Т. Андерсон // М.: Мир, 1976. – 757 с.
6. Афанасьев В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование [Текст] / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев // М.: Финансы и статистика; Инфра-М, 2012. –320 с.
7. Барлетт С. Введение в теорию случайных процессов. [Текст] / С. Барлетт // М.: Иностранная литература, 1958. –384 с.
8. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. [Текст] / Дж. Бендат, А. Пирсол // М.: Мир, 1989. –540 с.
9. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. [Текст] / К. Блаттер // М.: Техносфера, 2004. –280 с.
10. Боровиков В.П. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде WINDOWS. Основы теории и интенсивная практика на компьютере [Текст] : учеб. пособие / В. П. Боровиков, Г. И. Ивченко // М. : Финансы и статистика, 2000. – 384 с.
11. Боровков А.А. Математическая статистика. [Текст] / А.А. Боровков// М.: Физматлит, 2007. –704 с.
12. Боровков А.А. Теория вероятностей. [Текст] / А. А. Боровков // М.: Наука, 1974. –432 с.
13. Бриллинджер Д. Временные ряды: обработка и теория. [Текст] / Д. Бриллинджер // М.: Мир, 1980. –536 с.
14. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. [Текст] / Б. Л. Ван дер Варден // М.: Иностранная литература, 1960. –435 с.
15. Вайнштейн Л.А., Разделение частот в теории колебаний и волн. [Текст] / Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман // М.: Наука, 1983. –288 с.
16. Вейвлет-анализ в примерах. [Текст] / О.В. Нагорнов и др. // М.: НИЯУ МИФИ, 2010. –120 с.
17. Виноградов Е.С. Колебания рождаемости одаренных людей в 11-летнем солнечном цикле. [Текст] / Е. С. Виноградов // Психол. журн., 1990. –Т. 11. –№ 2. –С.142–144.

18. Вохмянин С.В. Испытание алгоритма метода «Гусеница-SSA» для восстановления временного ряда. [Текст] / С. В. Вохмянин // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева, 2010. –№ 2. –С. 59–62.
19. Галактионов Ю.К. Опыт анализа методом главных компонент динамики численности животных [Текст] / Ю. К. Галактионов // Научн.-техн. бюл. СО ВАСХНИЛ: Прогноз и учет вредителей сельскохозяйственных культур . –Вып. 22. –Новосибирск, 1984. –С. 13–24.
20. Главные компоненты временных рядов. [Текст] / Под редакцией Д.Л. Данилова и А.А. Жиглявского // СПб.: Пресском, 2007. –308 с.
21. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. [Текст] / Н. Э. Голяндина // –СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. – 76 с.
22. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: прогноз временных рядов: Учеб. пособие. [Текст]/ Н. Э. Голяндина // – СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. – 52 с.
23. Грешилов А.А. Математические методы построения прогнозов [Текст] / А.А. Грешилов, В.А. Стакун, А.А. Стакун. – М. : Радио и связь, 1997. –112 с.
24. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента. [Текст] / Н. Джонсон, Ф. Лион // М.: Мир, 1980. –516 с.
25. Дубровская Л.И. Прогнозирование временных рядов в пакете STATISTICA [Текст] : метод. указания / Л.И. Дубровская // Томск : ТГУ, 2004. – 32 с.
26. Жданов В.Ю. Прогнозирование акций Газпрома с помощью сингулярного спектрального анализа. [Электронный ресурс] / В. Ю. Жданов // URL: <http://beintrend.ru/2010-11-22-15-35-42>
27. Елисеева И.И. Общая теория статистики. [Текст] / И. И. Елисеева, М. М. Юзбашев // –М.: Финансы и статистика, 2004. – 656 с.
28. Ефимов В.М. Анализ и прогноз временных рядов методом главных компонент. [Текст] / В. М. Ефимов, Ю. К. Галактионов, Н. Ф. Шушпанова // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. –71 с.
29. Ефимов В.М. Некоторые закономерности динамики урожайности зерновых культур в Новосибирской области. [Текст] / В. М. Ефимов, Ю. К. Галактионов, С. М. Гусев // Доклады ВАСХНИЛ. –1983. –№ 4. –С. 10–11.
30. Ефимов В.М. Исследование ритмической структуры геофизических рядов методом главных компонент. [Текст] / В. М. Ефимов, Д. В. Речкин // Научн.-техн. бюл. СО ВАСХНИЛ: Долгосрочное прогнозирование гидрометеорологических условий. –Вып. 36. –Новосибирск, 1985. –С. 29–31.
31. Ефимов В.М. Обработка временных рядов методом главных компонент. [Текст] / В. М. Ефимов // Научн.-техн. бюл. СО ВАСХНИЛ: Прогноз и учет вредителей сельскохозяйственных культур. –Вып. 22. –Новосибирск, 1984. –С. 32–40.
32. Ефимов В.М. Разложение на главные компоненты динамики заготовок шкурок млекопитающих и их интерпретация. [Текст] / В. М. Ефимов, Ю. К. Га-

лактионов // –Экология горных млекопитающих: Информационные материалы. –Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 41–43.

33. Захарова О.В. Методы прогнозирования динамики экспортных процессов. [Текст] / О. В. Захарова // ВІСНИК Донбаської державної машинобудівної академії, 2006. –№ 1Е (6). –С. 311–316.

34. Зотов Л.В. Вращение Земли: анализ вариаций и прогнозирование. Дисс. канд. ... физ.-мат. наук. –М., 2005. –182 с.

35. Каган А.М. Характеризационные задачи математической статистики. [Текст] / А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао // М.: Наука, 1972. –656 с.

36. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 1–4. [Текст] / Г. Г. Канторович // Экономический журнал ВШЭ, 2002. № 1. – С. 85–115.

37. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 5–7. [Текст] / Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 2. –С. 251–273.

38. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 5–9. [Текст] / Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 3. –С. 379–401.

39. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 10–13. [Текст] / Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 4. –С. 498–523.

40. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 14–16. [Текст] / Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 1. –С. 79–103.

41. Кендалл М. Дж. Временные ряды. [Текст] / М. Дж. Кендалл // М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.

42. Кендалл М. Дж. Многомерный статистический анализ и временные ряды. [Текст] / М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт // М.: Наука, 1976. – 736 с.

43. Кендалл М. Дж., Статистические выводы и связи. [Текст] / М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт // М.: Наука, 1973. – 900 с.

44. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. [Текст] / А.Н. Колмогоров // М.: Наука, 1974. –120 с.

45. Коломейко Ф.В., Сердобинцев С.П. Автоматизированная система прогнозирования пространственно-временного распределения объектов промышленного лова. [Текст] / Ф. В. Коломейко, С. П. Сердобинцев // Информационные технологии, 2009. –№ 3. –С. 82–85.

46. Компьютерный анализ и интерпретация эмпирических зависимостей. [Текст] / С. В. Поршнева и др. // М.: ООО «Бином-Пресс», 2009. –336 с.

47. Кремер Н.Ш. Эконометрика. [Текст] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко // М.: Юнити-Данта, 2002. –311 с.

48. Лабунец Н.Л., Лабунец Л.В. Прогнозирование объемов продаж компании методами структурного анализа данных. [Электронный ресурс] / Н. Л. Ла-



бунец, Л. В. Лабунец // URL: [www.labnet.ru/docs/retail/Reail\\_Tez\\_2009.pdf](http://www.labnet.ru/docs/retail/Reail_Tez_2009.pdf) (дата доступа 31.07.2012)

49. Лемешко Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова [Текст] // Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. –888 с.

50. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. [Текст] / Ю.П. Лукашин // – М.: Статистика, 2003. –415 с.

51. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. Пер. с франц. [Текст] / Ж. Макс // М.: Мир, 1983. –Т. 2. –256 с.

52. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. [Текст] / С. Л. Марпл // М.: Мир, 1990. –584 с.

53. Миллер Н.О. Сопоставление изменений широты Пулково с международными наблюдениями за 1904–2006 годы. [Текст] / Н. О. Миллер, Е. Я. Прудникова // Известия ГАО, 2009. –№ 219. –С. 223–231.

54. Наговицин Ю.А. Глобальная активность солнца на длительных временах. [Текст] /Ю. А. Наговицин // Астрофизический бюллетень, 2008. –Т. 63. –№ 1. –С. 45–48.

55. Осминин К.П. Алгоритмы построения статистик для анализа и прогнозирования нестационарных временных рядов. [Текст] / К. П. Осминин // Информационные технологии вычислительные системы, 2009. – № 1. С. 3–15.

56. Орлов А.И. Прикладная статистика. [Текст] / А. И. Орлов// М.: Издательство «Экзамен», 2006. – 672 с.

57. Орлов Ю.Н. Методика определения оптимального объема выборки для прогнозирования нестационарного временного ряда. [Текст] / Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2008. – № 3. – С. 3–13.

58. Осминин К.П. Нестационарные временные ряды: Методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. [Текст] / Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. –384 с.

59. Орлов Ю.Н. Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда [Текст] / Ю.Н. Орлов // Математическое моделирование, 2008. – № 9. – С. 23–33.

60. Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов. [Текст] / Р. Отнес, Л. Эноксон // М.: Мир, 1982. –432 с.

61. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. [Текст] / Дж. Поллард // –М.: Финансы и статистика, 1982. –344 с.

62. Поршнева С.В. Анализ динамики среднемесячных чисел Вольфа с помощью метода главных компонент. [Текст] / С. В. Поршнева // Электромагнитные волны и электронные системы, 2009. – № 6. – С. 21–29.

63. Поршнева С.В. Вейвлет-анализ динамики чисел Вольфа. [Текст] / С.В. Поршнева // Вестник ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. Проектирование и анализ радио-

технических и информационных систем: Серия радиотехническая. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. № 18 (48). – С. 63–73.

64. Поршнева С.В. Исследование методов анализа и прогнозирования технологической информации, собираемой информационными системами тепловых электрических станций [Текст] / С. В. Поршнева, И. В. Соломаха // – Екатеринбург: УрФУ, 2011. – 208 с.

65. Поршнева С.В. Исследование особенностей временных рядов, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности. [Текст] / С. В. Поршнева, Фоуад Рабая // Естественные и технические науки, 2012. – № 2. – С. 361–367.

66. Поршнева С.В. Исследование особенностей временных рядов, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности. [Текст] / С. В. Поршнева, Фоуад Рабая // Современные телекоммуникационные системы и компьютерные сети: перспективы развития: Труды международной научн. конф. – СПб.: СПбГАСУ, 2011. – С. 109–123.

67. Поршнева С.В. Исследование особенностей прогнозирования временных рядов с помощью метода главных компонент: анализ устойчивости состава главных компонент при изменении длины временного ряда [Текст] / И. В. Соломаха, К. Э. Аронсон, С. В. Поршнева // Естественные и технические науки, 2009. – № 4 (42). – С. 416–425.

68. Поршнева С.В. Применение метода SSA для анализа технологической информации, собираемой информационным комплексом ТЭЦ [Текст] / С. В. Поршнева, И. В. Соломаха, К. Э. Аронсон // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: Тезисы докладов Седьмой Российской конференции с международным участием. – Томск : Изд-во НТЛ, 2008. – С. 23.

69. Поршнева С.В. Прогнозирование методом главных компонент. Проблемы выбора начальных данных для построения прогноза [Текст] / И. В. Соломаха, С. В. Поршнева // Научные труды международной научно-практической конференции «СВЯЗЬ-ПРОМ 2009» в рамках 6-го Международного форума «СВЯЗЬПРОМЭКСПО 2009», посвященного 150-летию со дня рождения изобретателя радио А.С. Попова. – Екатеринбург : УрТИСИ ГОУ ВПО «СибГУТИ», 2009. – С. 75–77.

70. Поршнева С.В. Об особенностях собственных чисел и собственных векторов выборочной корреляционной матрицы в методе SSA. [Текст] / С. В. Поршнева, Фоуад Рабая // Научно-технический вестник Поволжья, 2012. – № 3. – С. 146–150.

71. Поршнева С.В. О разделимости аддитивных составляющих в методе SSA. [Текст] / С. В. Поршнева, Фоуад Рабая // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной заочной научно-практической конференции 31 мая 2012 г.: в 5 частях. Мин. образования и науки Российской Федерации. Часть 2. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2012. – С. 113–115.

72. Поршнева С.В. Применение метода SSA для анализа технологической информации, собираемой информационным комплексом ТЭЦ [Текст] / С. В.

Поршнеv И. В. Соломаха, К. Э. Аронсон // Известия Томского политехнического университета. 2008. –Т. 313. –№ 5. –С. 161–168.

73. Поршнеv С.В. Физическое содержание понятий «огигающая» и «мгновенная частота широкополосного аналитического сигнала» [Текст] / С.В. Поршнеv // Электромагнитные волны и электронные системы. 2001. – Т. 6. – № 1. – С. 48–55.

74. Поршнеv С.В. Радиолокационные методы измерений экспериментальной баллистики. [Текст] / С. В. Поршнеv // Екатеринбург: УрО РАН, 1999. –208 с.

75. Поршнеv С.В. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений. [Текст] / С. В. Поршнеv, Е. В. Овечкина, В. Е. Каплан // –Екатеринбург: УрО РАН, 2006. –166 с.

76. Прогноз цен оптового рынка электроэнергии России по первой ценовой зоне. Прогноз потребления. [Электронный ресурс] // URL: <http://www.preprice.ru/> (дата обращения: 31.07.2012)

77. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. –М.: Изд-во стандартов. 2002. –87 с.

78. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. –М.: Изд-во стандартов. 2002. –64 с.

79. Расин Дж. Непараметрическая эконометрика: вводный курс. [Текст] / Дж. Расин // Квантиль, 2008. –№ 4. –С. 7–56.

80. Симахин В.А. Робастные непараметрические оценки. [Текст] / В. А. Симахин// –Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co, 2011. – 292 с.

81. Справочник по прикладной статистике. В 2-х тт. [Текст] / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина // –М. Финансы и статистика, 1989. –Т. 1. –510 с.

82. Справочник по прикладной статистике. В 2-х тт. [Текст] / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина // –М. Финансы и статистика, 1990. –Т. 2. –528 с.

83. Сызранцев В.Н. Расчет прочностной надежности изделий на основе непараметрической статистики. [Текст] / В. Н. Сызранцев, Я. П. Невелев, С. Л. Голофаст // Новосибирск: Наука, 2008. –218 с.

84. Сытинский А.Д. О зависимости глобальной и региональной сейсмичностей Земли от фазы 11-летнего цикла солнечной активности. [Текст] / А. Д. Сытинский // ДАН СССР. –1982. –Т. 265. –№ 6. –С. 1350–1356.

85. Сытинский А.Д. О связи землетрясений с солнечной активностью. [Текст] / А. Д. Сытинский // Изв. АН СССР. Физ. Земли. –1989. –№ 2. –С. 13–30.

86. Тарсенко Ф.П. Непараметрическая статистика. [Текст] / Ф. П. Тарсенко // Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1976. –292 с.

87. Уилкс С. Математическая статистика. [Текст] / С. Уилкс // М.: Наука, 1967. –574 с.
88. Храмова М.Н. Прогнозирование солнечной активности методом фазовых средних. [Электронный ресурс] / М. Н. Храмова, С. А. Красоткин, Э. В. Кононович // Исследовано в России: электрон. многопр. научн. журн, 2001. –С. 1169–1176. URL: <http://zhurnal.apc.relarn.ru/articles/2001/107.pdf> (обращения 31.07.2012)
89. Холлендер М. Непараметрические методы статистики. [Текст] / М. Холлендер // М.: Финансы и статистика, 1983. –518 с.
90. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. [Текст] / Э. И. Цветков // М.: Энергия, 1973. –127 с.
91. Щелкалин В.Н. От идей методов «Гусеница»-SSA и Бокса-Дженкинса до декомпозиционного метода прогнозирования и декомпозиционной ИНС. [Текст] / В. Н. Щелкалин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2011. –№ 4/4 (52). –с. 59–69.
92. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. [Текст] / Б. Эфрон // М.: Финансы и статистика, 1988. –263 с.
93. Юзбашев М.М. Статистический анализ тенденций и колеблемости. [Текст] / М.М. Юзбашев, А.И. Манелля // М.: Финансы и статистика, 1983. –207 с.
94. Alonso, F.J., Del Castillo, J.M, Pintado, P., (2005), Application of singular spectrum analysis to the smoothing of raw kinematic signals. J. Biomech. 38, P. 1085–1092.
95. Akaike H. A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-19. 1974. P. 716–723.
96. Bachelier L. «Theorie de la Speculation», Annales de l’Ecole Normal Supérieure. 1900. Series 3, 17, 21–86.
97. Box G. E. P. and Jenkins G. M. Time Series Analysis, Forecasting and Control, rev. Ed., San Francisco: Holden-Day, 1976. 784 p.
98. Brown R.G. Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series, New Jersey: Prentice–Hall, 1963. 397 p.
99. Davidson R. and MacKinnon J. G. Estimation and Inference in Econometrics. New York: Oxford University Press, 1992. 871 p.
100. Elsner J., Tsonis A. Singular Spectrum Analysis: A New Tool in Time Series Analysis. New York: Plenum Press, 1996. 164 p.
101. Franses P.H. Periodicity and Stochastic Trends in Economic Time Series. Oxford University Press, USA, 1996. 248 p.
102. Gabor D. Theory of communication. Jour. Inst. Elect. Eng., v. 93 (1946). PP. 429–457.
103. Golyandina N., Nekrutkin V., and Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. 320 p.
104. Hassani H. Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison, Journal of Data Science 5(2007), p. 239–257.

105. Hassani H. and Zhigljavsky A. (2009) Singular Spectrum Analysis: Methodology and Application to Economics Data, *Journal of Systems Science and Complexity*, v. 22, No. 3, p. 372-394.
106. Hassani H., Heravi S. and Zhigljavsky A. (2009) Forecasting European Industrial Production with Singular Spectrum Analysis, *International Journal of Forecasting*, 25, No. 1, p. 103-118.
107. Hassani H., and Soofi A. and Zhigljavsky A. (2010) Predicting Daily Exchange Rate with Singular Spectrum Analysis, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 11, No 3, p. 2023-2034.
108. Judge G. G., Griffiths W. E., Hill R. C., Lutkepohl H., Lee Tsoung-Chao. *The Theory and Practice of Econometrics*. Second edition. NY: John Willey and Sons, 1985. 1045 p.
109. Mills T. C. *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. Third edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 472 p.
110. Quenouille M. H. *The Analysis of Multiple Time Series*. New York: Hafner, 1957. 105 p.
111. Nelson C. R. and Kang H. Pitfalls in the Use of Time as an Explanatory Variable in Regression // *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 2. January 1984. P. 73–82.
112. Nelson C. R. and Plosser C. I. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implication // *Journal of Monetary Economics*. 1982. 10. P. 139–62.
113. Patterson K. *An Introduction to Applied Econometrics*. New York : St. Martin's Press, 2000. 795 p.
114. Schoellhamer D.H. Singular spectrum analysis for time series with missing data. *Geophysical Research Letters*, v. 28, No. 16, 2001. P. 3187–3190.
115. Schove D.J. Sunspot cycles. Hutchinson Ross. Publ., Stroudsburg, 1983. 400 p.
116. Sunspot Data [Электронный ресурс] URL: <http://sidc.oma.be/html/sunspot.html>
117. URL: <http://www.gistatgroup.com/gus/books.html> (дата обращения: 31.07.2013)
118. Wold H. *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Stockholm: Almqvist and Wiksel, 1938.