

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

**«Ижевский государственный технический университет имени
М.Т. Калашникова»**

На правах рукописи

Пономарева Ольга Владимировна

**РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В
ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ**

Специальность: 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка
информации (в науке и технике)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант – доктор технических наук,
профессор Алексеев Владимир Александрович

Ижевск – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ	22
1.1. Информационные сигналы и специфика их цифровой обработки	22
1.2. Частотные модели информационных сигналов и области их приложений	33
1.3. Цифровая обработка случайных информационных сигналов.....	39
1.4. Проблемы цифровой обработки информационных сигналов в базисе Фурье. Задачи исследования	44
ВЫВОДЫ	53
ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ	56
2.1. Методы и алгоритмы цифровой обработки информационных сигналов в базисе Фурье	56
2.2. Параметрическое дискретное преобразование Фурье	68
2.3. Модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье	78
2.4. Методы и алгоритмы цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье	83
2.5. Обобщения алгоритма Герцеля для цифровой обработки информационных сигналов.....	95
2.6. Инвариантность скользящего энергетического спектра действительного гармонического ИС в базисе Фурье.....	107
2.7. Инвариантность скользящего энергетического спектра действительного гармонического ИС в параметрических базисах Фурье.....	121

ВЫВОДЫ	130
ГЛАВА 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ.....	133
3.1. Теоретико-вероятностные характеристики случайных информационных сигналов и аксиомы их измерения.....	133
3.2. Аперриодическое дискретное преобразование Фурье	141
3.3. Стохастические свойства параметрического дискретного преобразования Фурье	151
3.4. Статистические измерения и обработка энергетических спектров случайных информационных сигналов в параметрических базисах Фурье.....	164
3.5. Специфика статистических измерений и обработки энергетических спектров смешанных информационных сигналов в параметрических базисах Фурье	174
ВЫВОДЫ	183
ГЛАВА 4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ МГНОВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ.....	185
4.1. Некоторые понятия и определения обработки мгновенных параметров непрерывных информационных сигналов	185
4.2. Дискретное преобразование Гильберта	191
4.3. Обобщенное дискретное преобразование Гильберта.....	197
4.4. Модификация дискретного преобразования Гильберта и обобщенного дискретного преобразования Гильберта	209
ВЫВОДЫ	218
ГЛАВА 5. БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ.....	221

5.1. Быстрые алгоритмы параметрического дискретного преобразования Фурье	221
5.2. Быстрые алгоритмы параметрического дискретного преобразования Фурье действительных сигналов	232
5.3. Быстрый алгоритм дискретного преобразования Фурье действительных сигналов	241
5.4. Быстрый алгоритм параметрического дискретного преобразования Фурье сигналов большой длительности в реальном масштабе времени	250
ВЫВОДЫ	258
ГЛАВА 6. ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ	261
6.1. Применение методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье для повышения эффективности, надежности и качества технических систем.....	261
6.2. Реализация методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье в программно-инструментальной среде LabVIEW – информационной технологии виртуальных приборов.....	277
6.3. Сравнительный анализ методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье	296
ВЫВОДЫ	300
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	302
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	305
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	306
Приложение 1. Специфика дискретных косвенных методов измерений характеристик информационных сигналов на конечных интервалах	333
Приложение 2. Частотные модели виброакустических сигналов некоторых элементов механических систем	340

Приложение 3. Акты внедрения научных разработок, выполненных по результатам исследований в диссертации Пономаревой О.В.	346
--	-----

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Решение важной и актуальной проблемы повышения эффективности и качества современных технических систем различного назначения, достижения надежности их функционирования, невозможно без получения и обработки информации об исследуемых объектах, явлениях и процессах, включая вопросы анализа, моделирования, оптимизации, совершенствования управления и принятия решения.

В успешном решении указанной проблемы и соответствующих ей задач ключевую роль играют методы, алгоритмы и средства цифровой обработки сигналов¹ (ЦОС) (Digital Signal Processing – DSP). Это объясняется, с одной стороны, преимуществами цифровой обработки информационных сигналов (ЦОИС) перед аналоговыми методами обработки информационных сигналов (ИС), с другой стороны, это связано с тем, что параметры сложных², случайных и смешанных³ ИС, порождаемых (формируемых) исследуемыми объектами, являются, как правило, основными физическими носителями информации об их характеристиках, свойствах и состояниях.

Теоретические и прикладные исследования, проведенные к середине 60-х годов прошлого столетия, как у нас в стране, так и за рубежом, выявили преимущества классических методов цифровой спектральной обработки ИС, которые основаны на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), его

¹ **Сигнал (информационный сигнал)** – это материальный носитель информации различной физической природы о процессах, явлениях, состояниях или физических величинах объектов материального мира, средство перенесения информации в пространстве и времени. **Обработка информационных сигналов** – извлечение содержащейся в сигналах информации о состояниях, системных связях и закономерностях функционирования исследуемых объектов, процессов и явлений. **Информация**, содержащаяся в сигналах, обычно представляется изменением одного или нескольких их параметров, называемых **информационными параметрами**.

² **Сложный информационный сигнал** – информационный сигнал, который может быть представлен в виде суммы простых колебаний (гармоник).

³ **Смешанный информационный сигнал** – информационный сигнал, который может быть представлен в виде суммы сложного информационного сигнала и случайного информационного сигнала (шума).

аналитических и статистических свойствах, а также свойствах его дискретного экспоненциального базиса.

Однако, вплоть до 1965 года, практические результаты ЦОИС были получены только для низкочастотных сейсмических сигналов⁴ из-за больших вычислительных затрат при реализации ДПФ. Появление метода быстрого вычисления ДПФ (Cooley J.W., Tukey J.W. 1965 г.), сократившего время вычислений ДПФ на несколько порядков и получившего название алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), резко изменило положение дел. Создание алгоритма БПФ дало мощный толчок развитию цифровых информационных технологий, внедрению ЦОИС во многие области науки и техники.

Значительный вклад в развитии теории и практики ЦОИС внесли работы как зарубежных ученых: Винера Н., Габора Д., Добеши И., Кайзера Д., Голда Б., Кули Д., Тьюки Д., Рэйдера Ч., Рабинера Л., Оппенгейма А., Шафера Р., Марпламл. С., Дженкинса Г., Ваттса Д. и др., так и отечественных ученых: Мандельштама Л. И., Котельникова В.А., Харкевича А.А., Хинчина А.Я., Горелика Г.С., Рытова С.М., Цыпкина Я.З., Гуляева Ю.В., Виленкина Н.Я., Кондратьева В.В., Витязева В.В., Зубарева Ю.Б., Пойды В.Н., Трахтмана А.М., Трахтмана В.А. и др.

В ЦОИС можно выделить следующие основные направления научных и прикладных исследований: **классические методы цифровой спектральной обработки ИС** (спектральный⁵ и векторный анализ⁶, линейная и гомоморфная фильтрация, корреляционный анализ, скользящий Фурье-анализ, двойной по частоте спектр), **неклассические методы цифровой спектральной обработки**

⁴ Л. Рабинер, Б. Гоулд. Развитие и применение цифровой обработки сигналов.–М: Мир,.1978.–839 с.: ил.

⁵ **Дискретный спектральный анализ** – группа методов дискретной фурье-обработки дискретных сигналов, которая не включает определение фаз синусоидальных составляющих информационных сигналов.

⁶ **Дискретный векторный анализ** – группа методов дискретной фурье-обработки дискретных сигналов, при которой требуется получение полной информации о частотах, амплитудах и фазах синусоидальных составляющих исследуемых сложных информационных сигналов и/или их изменений во времени.

ИС (методы, основанные на авторегрессионных моделях ИС, методы: Прони, минимальной дисперсии, собственных чисел), *дискретный вейвлетный анализ*⁷.

Анализ приложений методов ЦОИС, разработанных в различных предметных областях в рамках указанных направлений позволяет сделать следующие выводы.

1. Классические методы цифровой спектральной обработки ИС сохраняют свою ведущую роль и эффективность своих приложений практически во всех предметных областях. Они применимы почти ко всем классам стационарных и смешанных ИС. Спектральные оценки, полученные классическими методами, являются робастными (наиболее структурно устойчивыми) оценками спектров стационарных ИС и наиболее эффективными с вычислительной точки зрения за счет применения БПФ. В то же время практика применения методов и алгоритмов ЦОИС, основанных в той или иной мере на ДПФ, выявила и их недостатки, существенно снижающие результативность решения задач обработки ИС классическими методами. Недостатки классических методов цифровой спектральной обработки ИС вытекают непосредственно из свойств ДПФ и проявляются в виде известных эффектов (*эффектов наложения, частотола, утечки, гребешкового эффекта*).
2. Наблюдается расширение спектра применения неклассических методов цифровой спектральной обработки стационарных случайных и смешанных ИС, основанных на авторегрессионных и иных моделях ИС. В этих методах обработки, в отличие от классических методов цифровой спектральной обработки, выбирается некоторая модель ИС (модель авторегрессионного (АР) процесса, модель процесса скользящего среднего (СС) или модель авторегрессии – скользящего среднего (АРСС)) или иная модель, описываемая некоторым набором параметров, значения которых определяются в процессе обработки. Анализ этих методов и алгоритмов

⁷ **Дискретный вейвлетный анализ** – группа дискретных вейвлет-преобразований (DWT), в рамках которых анализируемые сигналы рассматривают в терминах временных колебаний (вейвлетов), локализованных по времени и частоте.

обработки показал, что их существенными недостатками являются *ограниченность области приложений и субъективность*⁸.

3. Теория вейвлетного анализа дает сложный, но достаточно эффективный инструмент для решения некоторых практических задач, при этом *большую роль играет интуиция и опыт исследователя*. В отличие от традиционных направлений обработки ИС, данная теория не является фундаментальной физической теорией⁹. Вейвлетный анализ, (мультиразрешающий анализ¹⁰), значительно расширивший аппарат *информационных технологий обработки нестационарных ИС*, не является универсальным методом решения задач обработки и анализа ИС. Тем более вейвлетный анализ не следует рассматривать как замену классическим методам спектральной обработки и анализа информации, хотя бы в силу того, что полигармонические и стационарные дискретные ИС широко распространены, как в природе, так и в технических системах, а результаты, полученные в рамках традиционных направлений обработки информации *значительны и, главное, проверены временем*.
4. Существующие попытки оценивания *абсолютного превосходства* тех или иных методов цифровой обработки ИС над другими методами являются *изначально контрпродуктивными*, т.к. каждый метод, алгоритм цифровой обработки ИС имеет то или иное, но свое, наиболее эффективное приложение.
5. С целью повышения результативности методов и алгоритмов цифровой обработки ИС в той или иной предметной области, проводится ориентация на максимальный учет специфики ИС в конкретной области исследований в ущерб универсальности подходов.

Несмотря на то, что классические методы цифровой спектральной обработки ИС сохраняют, как показал проведенный анализ, свою ведущую роль в

⁸ Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии.-Л.:1981.-281 с.

⁹ prodav.exponenta.ru

¹⁰ Mallat S.G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. Trans. Amer.Soc. 315 (1989), 69-87.

обработке ИС, результаты могли быть более значимыми, если бы не их принципиальные недостатки, которые вытекают *как из природы ДПФ, так и из аналитических и стохастических свойств его базиса – базиса дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ)*.

Отметим, что неклассические методы спектральной обработки ИС в целом создавались как альтернатива классическим методам спектральной обработки ИС – с целью преодоления недостатков последних. Однако, как показала практика применения разработанных неклассических методов спектральной обработки ИС, существующая проблема была решена лишь отчасти, так как методы данного класса требуют больших допущений, чем классические, а получаемые спектральные оценки *структурно устойчивы (робастны)* только для *ограниченного класса стационарных ИС*.

Применение же *вейвлетного анализа* для цифровой обработки стационарных и смешанных ИС также не является эффективным инструментом, так как смысл вейвлетного анализа заключается скорее в *изучении нерегулярностей*, чем в их исключении¹¹.

Из проведенного системного анализа приложений методов цифровой обработки ИС, непосредственно следует вывод о важности и актуальности проведения научных и прикладных исследований в следующих направлениях:

- развитие и совершенствование теоретических основ классических методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки ИС во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях;
- разработка новых и совершенствование существующих методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки ИС;
- поиск наиболее адекватных базисных систем, обеспечивающих оптимальное решение научных и технических проблем повышения эффективности, надежности и качества современных технических систем различного назначения.

¹¹ **Витязев В.В.** Вейвлет-анализ временных рядов. – СПб: Изд-во СПбГУ: 2001.-58 с.

Целью диссертационной работы является развитие теории цифровой обработки информационных сигналов, разработка новых и совершенствование существующих методов и алгоритмов их цифровой обработки в параметрических дискретных базисах Фурье, обладающих функциональными возможностями по подавлению эффектов наложения, частотола, утечки и гребешкового эффекта во временной, частотной и корреляционной областях, которые присущи методам, основанным на дискретном преобразовании Фурье.

Основными задачами диссертационной работы, в соответствии с поставленной целью, являются:

- выявление научных и технических проблем современной цифровой спектральной обработки сложных и смешанных информационных сигналов методами и алгоритмами на основе дискретного преобразования Фурье;
- развитие теории, разработка методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки сложных и смешанных информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях на конечных интервалах в параметрических дискретных базисах Фурье;
- развитие теории, разработка методов и алгоритмов цифровой обработки мгновенных параметров смешанных информационных сигналов на конечных интервалах на основе параметрических дискретных преобразований Фурье;
- разработка быстрых процедур спектральной обработки информационных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье;
- постановка и решение задач практической реализации разработанных методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки ИС в параметрических дискретных базисах Фурье.

Область исследования. Диссертационная работа выполнена в соответствии с пунктами «1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации», «2. Формализация и постановка задач системного анализа оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации», «4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления,

принятия решений и обработки информации», «5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации» паспорта специальности 05.13.01 «Системный анализ, управления и обработки информации».

Объектом исследования являются теория, методы и алгоритмы цифровой обработки информационных сигналов различного рода объектов.

Предметом исследования являются теория, методы и алгоритмы цифровой обработки на конечных интервалах информационных сигналов в параметрических дискретных базисах Фурье.

Методы исследований. Теоретическая часть работы выполнена на основе теории систем и системного анализа, теории информации, теории цифровой обработки сигналов, теории цифрового векторного и спектрального анализа, теории сигналов на конечных интервалах, теории матриц, теории вероятностей, теории общих измерений, теории математического моделирования, теории дискретного преобразования Фурье, теории дискретного параметрического преобразования Фурье, методологии проектирования технических систем. При расчетах и моделировании использовались программная среда проектирования инженерных приложений MATLAB и программно-инструментальная среда LabVIEW. Экспериментальные исследования проводились в процессе научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, приёмо-сдаточных испытаний в производственных условиях разработанных средств обработки информационных сигналов.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов и выводов обеспечены строгими математическими доказательствами аналитических и стохастических свойств разработанных автором преобразований дискретных информационных сигналов и существования быстрых алгоритмов их реализации; подтверждены сопоставлением результатов теоретических исследований с экспериментальными данными, полученными путем моделирования и в условиях производства. Достигнутые результаты развивают

теорию спектральной обработки информационных сигналов объектов различного назначения, дополняют современные научные представления и данные отечественных и зарубежных информационных источников. Полученные результаты также подтверждаются их представительным обсуждением в научных изданиях и выступлениями на научных конференциях российского и международного уровня. Научно-технические решения, полученные в результате диссертационного исследования, внедрены в производство.

Научная новизна. Основными результатами диссертационной работы являются развитие теории, разработка методов и алгоритмов спектральной обработки информационных сигналов на конечных интервалах, обладающих расширенными функциональными возможностями и обеспечивающих выполнение требований к повышению эффективности, надежности и качеству создаваемых изделий и технических систем.

1. Впервые в практику спектральной обработки информационных сигналов введены следующие преобразования, разработанные и исследованные автором:

- параметрическое дискретное преобразование Фурье;
- модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье;
- апериодическое дискретное преобразование Фурье;
- обобщенное дискретное преобразование Гильберта и его модификации;
- скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье.

2. Впервые в практику спектральной обработки информационных сигналов введено дискретно-частотное преобразование Фурье. Данная новая форма преобразования Фурье, предложенная автором, позволяет, поставив в соответствие дискретному сигналу, заданному на конечном интервале, непрерывный сигнал, решить проблему *«эффекта частотола во временной области»*.

3. Разработаны методы цифровой блочной спектральной обработки информационных сигналов с накоплением, на основе которых проведено обобщение метода (алгоритма) Герцеля.

4. Предложены и исследованы обобщения дискретного преобразования Гильберта для измерения и обработки мгновенных параметров информационных сигналов, а также разработанные автором быстрые процедуры их реализации.

5. Проведено обобщение структуры гребенчатого фильтра, исследованы свойства обобщенного гребенчатого фильтра.

6. Разработаны теоретические основы обработки на конечных интервалах информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях в параметрических дискретных базисах Фурье.

7. Впервые предложены и исследованы быстрые алгоритмы обработки информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях в параметрических дискретных базисах Фурье.

Основные положения, выносимые на защиту. Положения, предложенные и обоснованные в диссертационном исследовании, в совокупности образуют новое перспективное научное направление в области цифровой спектральной обработки информационных сигналов.

1. Преобразования для обработки информационных сигналов в корреляционной, частотной и частотно-временной областях:

- параметрическое дискретное преобразование Фурье;
- апериодическое дискретное преобразование Фурье;
- скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье.

Данные преобразования позволяют, в отличие от обработки информационных сигналов в классических дискретных базисах Фурье, проводить обработку в корреляционной, частотной и частотно-временной

областях не на фиксированных множествах частот, а на множестве частот, мощность которых регулируется параметрами соответствующих преобразований.

2. Преобразования для обработки информационных сигналов во временной области:

- модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье.

Данное преобразование позволяет, в отличие от обработки информационных сигналов во временной области в классических дискретных базисах Фурье, проводить обработку не на фиксированном множестве моментов времени, а на множестве моментов времени, мощность которого регулируется параметром преобразования.

- модифицированное дискретное преобразование Гильберта;

- обобщенное дискретное преобразование Гильберта;

- модифицированное обобщенное дискретное преобразование Гильберта.

Отличием разработанных методов, полученных путем обобщений дискретного преобразования Гильберта, от стандартного дискретного преобразования Гильберта является учет свойства локальности данного преобразования, что позволило повысить точность измерения огибающих информационных сигналов минимум на порядок.

3. Методы цифровой блочной обработки с накоплением, на основе которых проведено обобщение метода Герцеля. Разработанные методы позволили проводить цифровую спектральную обработку информационных сигналов как на целых, так и на дробных частотах, обеспечив при этом высокую частотную разрешающую способность и устойчивость.

4. Обобщение структуры гребенчатого фильтра. В математической основе обобщенного гребенчатого фильтра лежит поворот нулей амплитудно-частотной характеристики гребенчатого фильтра, что

позволило сократить время цифровой обработки информационных сигналов, решить проблему погрешностей коэффициентов фильтров на основе частотной выборки, не теряя при этом одно из важнейших достоинств данного вида фильтров – возможность рекуррентного получения результатов фильтрации.

5. Эффект неинвариантности энергетического спектра действительных гармонических сигналов в классическом и параметрических базисах Фурье. Открытый автором эффект неинвариантности дает возможность оценить потенциальную точность обработки информационных сигналов в дискретных базисах Фурье.

6. Теоретические основы цифровой обработки информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях, в параметрических дискретных базисах Фурье. Разработанные теоретические основы цифровой обработки информационных сигналов являются базой создания новых и совершенствования существующих методов повышения эффективности, надежности и качества технических систем в различных областях науки и техники.

7. Быстрые алгоритмы обработки информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях в параметрических дискретных базисах Фурье, которые могут быть применены без изменения структуры аппаратных средств, реализующих классические БПФ.

Практическая значимость, реализация и внедрение результатов диссертационной работы. Теоретические и прикладные результаты проведенных исследований позволили создать и внедрить соответствующие системы и приборы цифровой обработки ИС на производственных объединениях «Ижевский механический завод» и «ИЖМАШ», которые обеспечили повышение качества выпускаемой данными объединениями продукции.

Научные и прикладные результаты диссертационной работы апробированы и внедрены:

➤ в ОАО «Чепецкий механический завод» (г. Глазов, УР) при выполнении НИР по Федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы по теме «Принципы контроля оптических сред в биологии и экологии с использованием методов обработки результатов измерений на основе квантификационных моделей»;

➤ в ОАО «Чепецкий механический завод» (г. Глазов, УР) при разработке системы «Совершенствование информационно-управляющей системы комплексной безопасности (ИУСКБ)»;

➤ при реализации Федеральной целевой программы «Уничтожение запасов химического оружия в Российской Федерации»;

➤ в учебном процессе в ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова» («ИжГТУ имени М.Т. Калашникова») на кафедре «Приборы и методы измерений, контроля, диагностики» для студентов направления 12.03.01 «Приборостроение» специальности «Приборы и методы контроля качества и диагностики», магистрантов по программам подготовки 12.04.01–1 «Приборы, системы и изделия биомедицинского назначения», 12.04.01–2 «Приборы и методы контроля окружающей среды, веществ, материалов, изделий» по дисциплинам: «Математические основы обнаружения и фильтрации сигналов», «Программные средства моделирования», «Обнаружение и фильтрация сигналов в неразрушающем контроле», «Специальные методы контроля», «Обнаружение и фильтрация сигналов в медицине», «Графические средства проектирования».

Внедрение результатов проведенных исследований подтверждено соответствующими актами.

Апробация результатов диссертации. Основные теоретические результаты диссертационной работы докладывались на 38 международных, всесоюзных и всероссийских научных конференциях: 12-й Всесоюзной школе-

семинаре «Автоматическое распознавание слуховых образов (АРСО-12)», Киев, СССР, 1982 г.; Всесоюзной школе-семинаре «Распараллеливание обработки информации» (РОИ-83), Львов, СССР, 1983 г.; 13-й Всесоюзной школе-семинаре «Автоматическое распознавание слуховых образов (АРСО-13)», Новосибирск, СССР, 1984 г.; Всесоюзной научно-технической конференции «Методы и средства борьбы с помехами в цифровой технике», Вильнюс, СССР, 1986 г.; Всесоюзной конференция по информационной акустике, Москва, СССР, 1986 г.; Всесоюзном семинаре «Новые методы вибродиагностики технического состояния машин», Каунас, СССР, 1986 г.; Всесоюзной научно-технической конференции «Образное представление в управлении и научных исследованиях», Грозный, СССР, 1987 г.; Всесоюзной научно-технической конференции «Измерительные информационные системы», Ташкент, 1987 г.; Всесоюзной школе-семинаре «Распараллеливание обработки информации» (РОИ-87), Львов, СССР, 1987 г.; Всесоюзной научно-технической конференции «Методы и средства виброакустической диагностики машин», Ивано-Франковск, СССР, 1988 г.; Всесоюзной научно-технической конференции «Вибрация и вибродиагностика. Проблемы стандартизации», Горький, СССР, 1988 г.; 4-й Всесоюзной конференции «Математические методы распознавания образов» (ММРО-IV), Рига, СССР, 1989 г.; Всесоюзной научно-технической конференции «Вибрация и диагностика машин и механизмов», Челябинск, СССР, 1990 г.; Всесоюзном семинаре «Новые методы и средства виброакустических исследований и диагностики», Ленинград, СССР, 27-29 ноября 1990 г.; Всероссийской научно-технической конференции «Радио и волоконно-оптическая связь, локация и навигация», Воронеж, Россия, 22-24 апреля 1997 г.; 4-й Международной научной конференции «Новые материалы, неразрушающий контроль и наукоемкие технологии в машиностроении», Тюмень, Россия, 9-11 декабря 2008 г.; 3-й Международной научной конференции «Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов», Могилев, Беларусь, 23-25 сентября 2009 г.; Всероссийской научной конференции «Физические основы диагностики материалов и изделий, и приборов для её реализации», Тюмень,

Россия, 12-13 ноября 2010 г.; 3-й Международной научной конференции «Приборостроение-2010», Минск, Беларусь, 10-12 ноября 2010 г.; 9th International conference “Research, development and application of high technologies in the industry”, St.-Petersburg, Russia, 22-23 April 2010; 1th International conference “Modern information and electronic technologies” (MIET’2010), Odessa, Ukraine, 24-28 May, 2010; 12-й Международной научной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA’2010), Москва, Россия, март 2010 г.; 12th International conference “Modern information and electronic technologies” (MIET’2011), Odessa, Ukraine, 23-27 May, 2011; Всероссийской научной конференции «Сессия научного совета по акустике РАН и XXIV сессия Российского акустического общества», Саратов, Россия, 12-15 сентября 2011 г.; 2-й Международной научной конференции «Информационно-измерительные, диагностические и управляющие системы», Курск, Россия, 11-13 апреля 2011 г.; 13-й Международной научной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA’2011), Москва, Россия, март 2011 г.; 7-й Всероссийской научной конференции «Приборостроение в 21 веке – 2011. Интеграция науки, образования и производства», Ижевск, Россия, 15-17 ноября 2011 г.; 8-й Всероссийской научной конференции «Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства», Ижевск, Россия, 14-16 ноября 2012 г.; 4-й Международной научно-технической конференции «Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов», Могилев, Беларусь, 26-27 сентября 2012 г.; 13th International conference “Modern information and electronic technologies” (MIET’2012), Odessa, Ukraine, 4-8 , 2012; 14-й Международной научной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA’2012), Москва, Россия, март 2012 г.; 15-й Международной научной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение» (DSPA’2013), Москва, Россия, март 2013 г.; 14-й Международной научной конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике», Новочеркасск, Россия, 14 марта 2014 г.; 16-й Международной научной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение»

(DSPA'2014), Москва, Россия, март 2014 г.; 5-й Международной научно-технической конференции «Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов», Могилев, Беларусь, 24-25 сентября 2014 г.; 7-й Международной научной конференции «Приборостроение-2014», Минск, Беларусь, 19-21 ноября 2014 г.; 17-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA-2015)», Москва, Россия, 2015 г.; 8-й Международной научно-технической конференции «Приборостроение-2015», Минск, Беларусь, 2015.

Публикация результатов диссертации. По материалам диссертации опубликовано более 100 печатных работ, из них монография без соавторов, 7 статей в журналах, входящих в международную реферативную базу данных и систему цитирования *Scopus*, 11 статей в журналах, составляющих ядро коллекции Российского индекса научного цитирования *Science Index* (РИНЦ), которое размещено на платформе *Web of Science* как *Russian Science Citation Index* (RSCI), 27 статей в журналах, входящих в перечень ВАК РФ рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, из которых 7 научных работ [65, 68, 69, 87, 90, 91, 99] выполнены соискателем лично, остальные в соавторстве.

Основные научные результаты, изложенные в диссертационном исследовании, получены соискателем лично и представляют собой обобщение более чем тридцатилетнего опыта работы автора в области развития теории цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье, разработки в различных предметных областях соответствующих методов, алгоритмов и средств цифровой обработки информационных сигналов.

В статьях по теме диссертации, опубликованных в журналах, входящих в перечень ВАК РФ рецензируемых научных изданий, и выполненных в соавторстве [64, 66, 67, 73-75, 78, 82-84, 86, 88, 89, 92-94, 96-98, 100] соискателю принадлежит: разработка преобразований для обработки информационных сигналов в корреляционной, частотной и частотно-временной областях:

параметрическое дискретное преобразование Фурье; аperiodическое дискретное преобразование Фурье; скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье [64, 67, 73, 78, 93, 98, 100]; разработка преобразований для обработки информационных сигналов во временной области: модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье, модифицированное дискретное преобразование Гильберта; обобщенное дискретное преобразование Гильберта; модифицированное обобщенное дискретное преобразование Гильберта [92, 94, 96, 97]; методы цифровой блочной обработки с накоплением [74, 84]; обобщение структуры гребенчатого фильтра [86]; открытие и исследование эффекта неинвариантности энергетических спектров в классическом и параметрических базисах Фурье [66]; разработка теоретических основ цифровой обработки информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях, в параметрических дискретных базисах Фурье [75, 82, 88, 89]; разработка быстрых алгоритмов обработки информационных сигналов в параметрических дискретных базисах Фурье [67, 83, 92]. Остальные результаты в статьях, выполненных в соавторстве, принадлежат соавторам. Вклад научного консультанта В.А. Алексеева, доктора технических наук, профессора, заслуженного деятеля науки Удмуртской Республики определяется рамками научного консультирования и обсуждения результатов исследований, проводимых автором.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы из 235 наименований и 3 приложений. Общий объем работы – 357 страниц, включая 93 рисунка и 5 таблиц.

Автор выражает благодарность сотрудникам кафедр «Конструирование и производство радиоаппаратуры», «Приборы и методы измерений, контроля, диагностики», «Физика и оптотехника», научно-исследовательской лаборатории «Вибрационная и акустическая диагностика объектов – ВИАДО» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Министерства образования и науки «Ижевский государственный технический университет им. М.Т.Калашникова» за помощь и поддержку.

ГЛАВА 1

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1. Информационные сигналы и специфика их цифровой обработки

Решение важной и актуальной проблемы повышения эффективности и качества современных технических систем различного назначения, достижения надежности их функционирования невозможно без получения и обработки информации об исследуемых объектах, происходящих явлениях и процессах, включая вопросы анализа, моделирования, оптимизации, совершенствования управления и принятия решения.

В успешном решении указанной проблемы и соответствующих ей задач ключевую роль играют методы и алгоритмы (МиА) цифровой обработки информационных сигналов (ЦОИС), порождаемых (формируемых) исследуемыми объектами в той или иной предметной области, классификация которых приведена на рисунке 1.1.

В зависимости от конкретной предметной области, информационные сигналы (ИС) имеют *различную природу возникновения*.

Например, при виброакустическом функциональном диагностировании машин и механизмов [15, 55, 88, 90, 95, 121, 147, 179, 181] вибрации от зарождающихся дефектов с помощью вибропреобразователей (датчиков вибрации, реализующих принцип кинематического или динамического измерения вибраций) преобразуются в виброакустический ИС, измеряемые параметры¹² которого позволяют проводить *безразборное диагностирование объекта*.

В медицинской компьютерной диагностике широко используются методы и алгоритмы обработки биомедицинских ИС [70, 110, 150, 163, 202, 209] во

¹² **Измеряемые параметры** – физические величины, наилучшим образом отражающие качество изделий или процессов (РМГ 29 – 99).

временной и частотной области, которые являются важным инструментом объективного оценивания функционального состояния человека.

В зависимости от конкретной предметной области информационные сигналы (ИС), имеют *различную природу возникновения*.

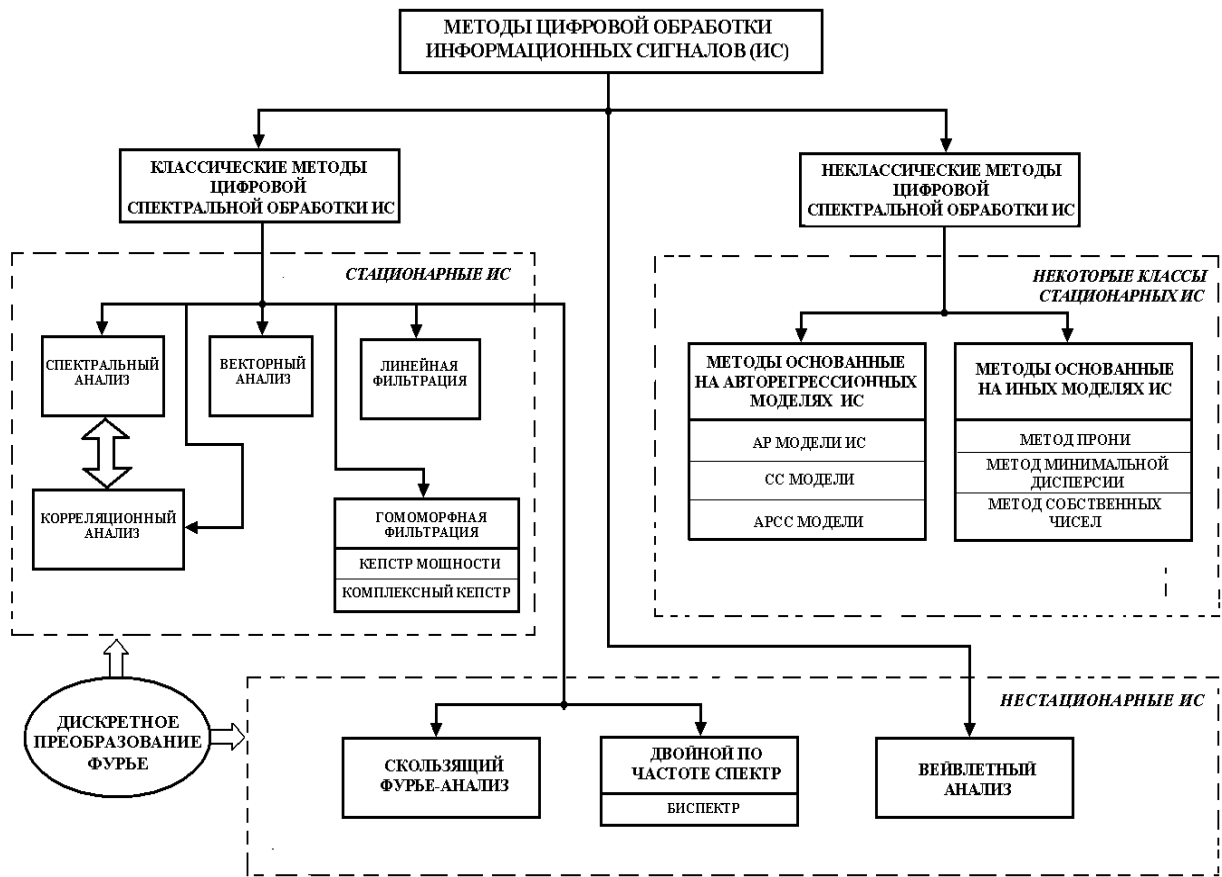


Рисунок 1.1 – Классификация методов цифровой обработки информационных сигналов

В современных пассивных гидролокационных системах [49, 56, 57, 62, 65] методы и алгоритмы обработки гидроакустических ИС являются важнейшими операциями при обнаружении и классификации надводных и подводных кораблей. При этом для преобразования акустических волн, распространяющихся от объекта в водной среде, в гидроакустические ИС используются ненаправленные и направленные одиночные датчики, чувствительные к ультразвуку (гидрофоны), акустические буи, а также антенные решетки.

Информационные сигналы, порождаемые теми или иными исследуемыми объектами, имеют не только разную природу, но и *различную форму представления*.

Различают следующие три класса ИС: аналоговые ИС, дискретные ИС, цифровые ИС. Отличие между собой этих классов ИС связано с тем, какие значения могут принимать сами ИС и их аргументы. Например, цифровые ИС – это дискретные (дискретизированные по времени) ИС, квантованные также по уровню. В дальнейшем, при изложении развиваемой в данной работе теории цифровой обработки будем (без потери общности) рассматривать дискретные ИС (ДИС), полагая шаг квантования по уровню бесконечно малым, так же как это принято в теории дискретных линейных систем, связанной с описанием и обработкой временных и частотных последовательностей. По мере необходимости будут отдельно рассмотрены эффекты, возникающие при переходе от ДИС к цифровым ИС (ЦИС) при конечном шаге квантования по уровню. Значения аргумента ДИС на временной оси могут размещаться как неравномерно, так и равномерно. В последнем случае ДИС часто называют *решетчатыми функциями, временными рядами, временными последовательностями* или *просто последовательностями* [10, 25, 27, 28]. Именно такого рода ДИС рассматриваются в настоящей работе.

Возможны три варианта получения ДИС. Первый вариант – когда исходный ИС дискретен по своей природе. Вторым вариантом получения ДИС – когда исходный сигнал непрерывен, но мы можем получать его значения лишь в определенные моменты времени как, например, в системах телеметрии. В диссертационной работе рассматривается, за редким исключением, третий вариант получения ДИС: путем равномерной дискретизации во времени исходных АИС согласно теореме Котельникова (теореме отсчетов) [5, 10, 25, 46].

На современном этапе развития информационных технологий происходит интенсивный переход на МиА ЦОИС, так как данный вид обработки играет ключевую роль в достижении высокой эффективности разработки, производства и эксплуатации современных изделий и систем. В результате наблюдается постоянное расширение как спектра приложений МиА ЦОИС, так и спектра предметных областей, в которых они применяются. Среди них можно назвать виброакустическое функциональное диагностирование механических объектов,

экологическую безопасность, компьютерную медицинскую диагностику, пассивную и активную гидролокацию, сейсмологию, распознавание речи и изображений, геофизику и т.д. Во введение при обосновании актуальности исследований были рассмотрены значимость роли и важность места классических методов спектральной обработки информационных сигналов в ЦОИС, а на рисунке 1.2 показаны области их приложений в различных предметных областях.

Отметим, что в этих областях научных исследований, как и во многих других, временные, корреляционные, частотные и частотно-временные параметры ИС являются основными физическими носителями информации о состояниях исследуемых объектов.

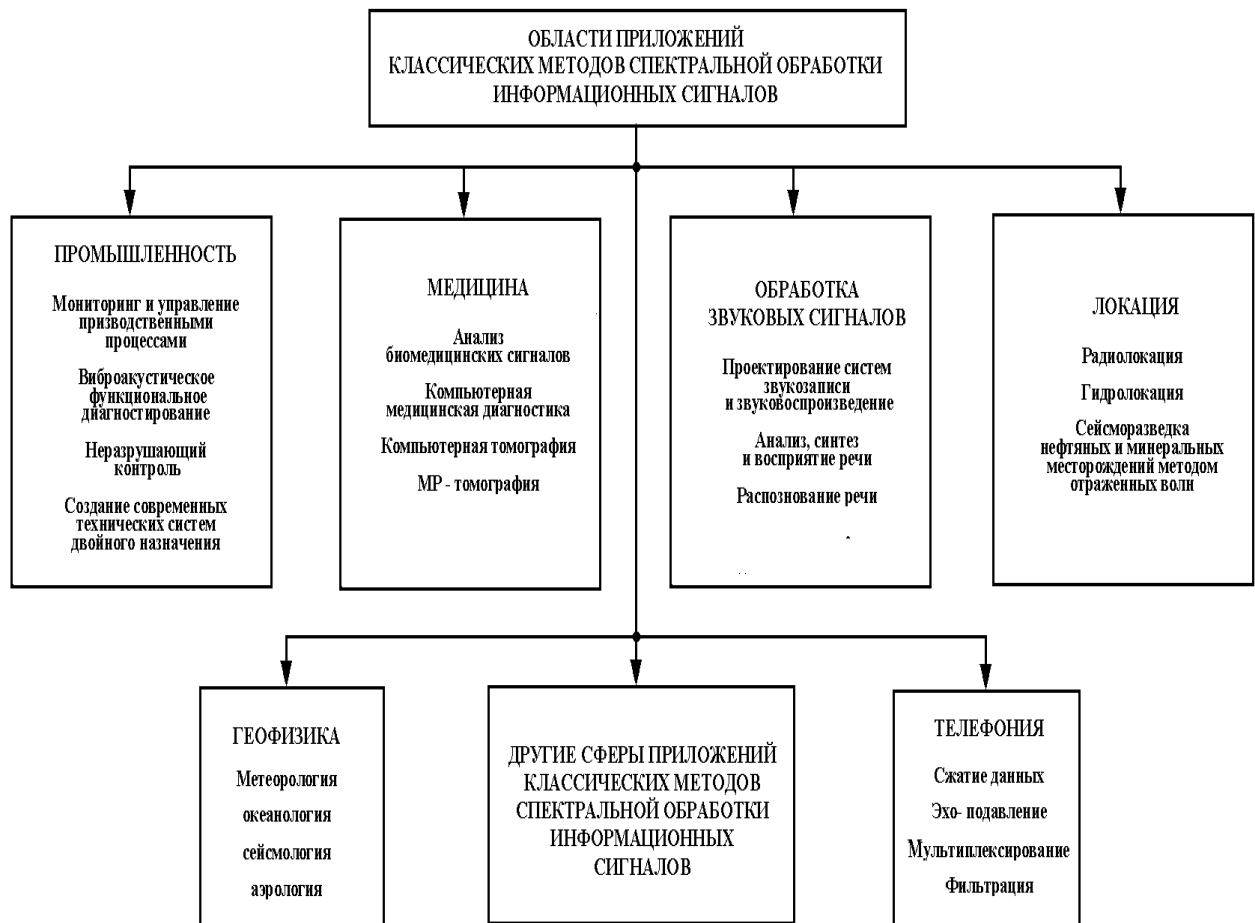


Рисунок 1.2 – Области приложений классических методов спектральной обработки

Системный анализ приложений МиА ЦОИС позволил сделать следующие **ВЫВОДЫ**.

Во-первых, совокупность информационных параметров, характеризующих объект исследования, применяемые методы и алгоритмы их измерения и обработки, требования к функциональным возможностям и метрологическим характеристикам средств измерений определяются, прежде всего, задачами, стоящими в целом перед системами ЦОИС, а также условиями решения этих задач.

Во-вторых, в реализации систем ЦОИС наблюдается тенденция перехода от специализированных устройств ЦОИС к универсальным перепрограммируемым ЦОИС на основе новой информационной технологии – технологии виртуальных приборов, разрабатываемых в программно-инструментальной среде LabVIEW.

В-третьих, проведение измерений¹³ является частью ЦОИС, в связи с чем в мировой практике общепринято считать ИС *носителями общей измерительной информации*.

Во многих предметных областях характерной спецификой ДИС является:

- конечность интервала обработки ДИС;
- конечность интервала измерения информационных параметров ДИС,
- наличие в структуре ДИС скрытых периодических¹⁴, почти периодических¹⁵ и ангармонических сигналов¹⁶ (скрытых периодичностей, почти периодичностей и ангармонических периодичностей), параметры которых являются важными носителями информации о состоянии исследуемых объектов, свойствах анализируемых явлений и процессов.

¹³ **Измерение** – совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины (РМГ 29-99).

¹⁴ **Периодический сигнал** – полигармонический сигнал частоты, представляющий собой сумму гармонических компонент, частоты k_i , которых соизмеримы.

¹⁵ **Почти периодический сигнал** – полигармонический сигнал частоты, представляющий собой сумму гармонических компонент, частоты k_i , которых несоизмеримы.

¹⁶ **Ангармонический сигнал** – периодический сигнал, представляющий собой сумму основного гармонического сигнала (гармонического сигнала наименьшей частоты) и некоторых его гармоник (гармонических сигналов более высоких частот, частоты которых кратны частоте основного гармонического сигнала).

Отметим, что данный класс смешанных ИС относится к классу случайных ИС со сложной структурой, измерение параметров которых носит статистический характер и в общей теории измерений либо рассматривается фрагментарно, либо не рассматривается вообще.

На рисунке 1.3 приведена классификация дискретных информационных сигналов.

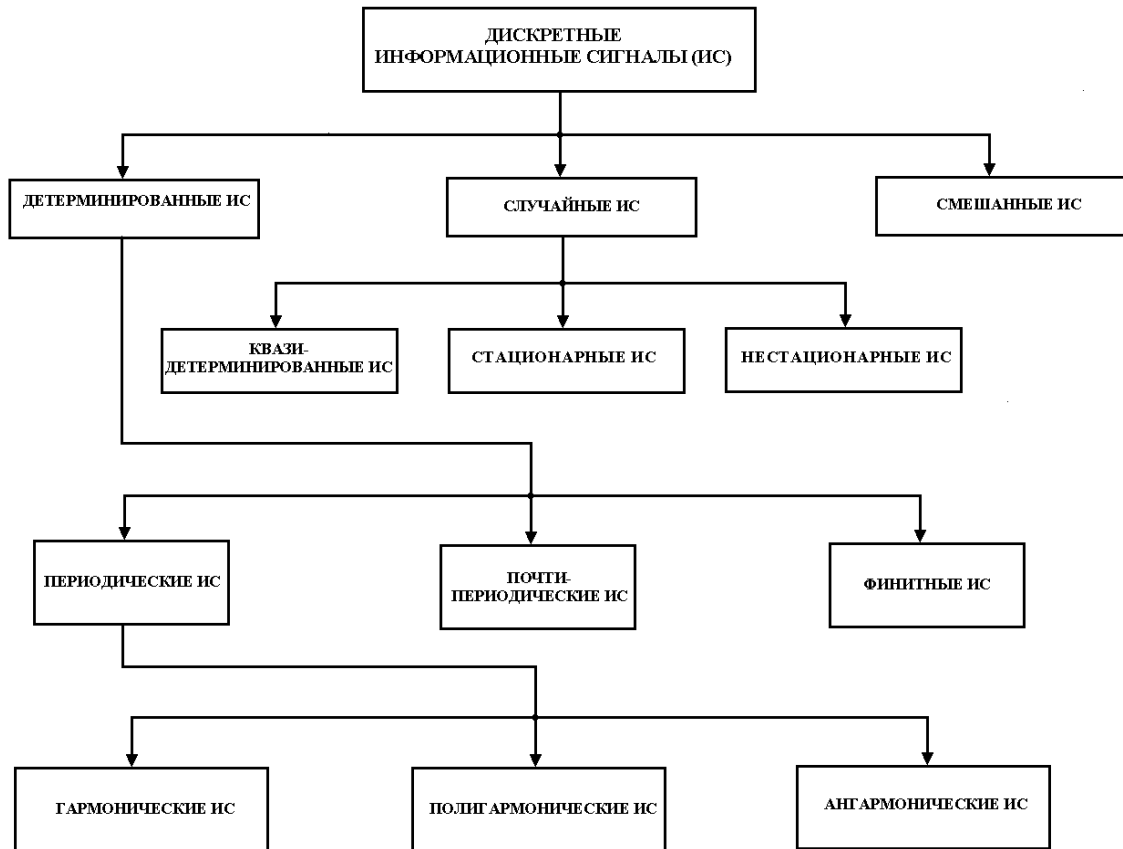


Рисунок 1.3 – Классификация дискретных информационных сигналов.

Отметим два момента, имеющих важное научное и прикладное значение

- Во-первых, для описания данного класса ИС, требуется использование не только временной формы, но и корреляционной, частотной и частотно-временной форм представления (включая применение частотных и частотно-временных математических моделей).
- Во-вторых, для обработки данного класса ИС необходима разработка новых и совершенствование существующих МиА ЦОИС,

поиск наиболее адекватных базисных систем, обеспечивающих оптимальное решение научных и научно-технических проблем повышения эффективности, надежности и качества технических систем на всех этапах их жизненного цикла.

Известно, что ДИС *на конечном интервале* длительностью в N отсчетов (N -интервал) можно представить в виде суммы ортогональных дискретных сигналов с определенными амплитудами (весовыми значениями) и фазами. Совокупность этих амплитуд принято называть *спектром* ДИС в выбранной базисной системе. Как уже отмечалось, поиск (синтез) наиболее адекватных решаемым задачам базисных систем является в настоящее время и важной, и актуальной задачей обработки ДИС. Однако на практике наибольшее применение получила базисная система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ):

$$\text{def}(p, l) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} pl) = W_N^{pl} = \cos(\frac{2\pi}{N} pl) - j \sin(\frac{2\pi}{N} pl); \quad p, l = \overline{0, N-1}. \quad (1.1)$$

Система дискретных экспоненциальных функций, заданная на интервале N , является полной системой, так как число независимых базисных функций в системе равно N и число отсчетов каждой базисной функции также равно N [160]. Данная базисная система позволяет получить разложение дискретного сигнала в частотной области и обладает целым рядом преимуществ перед другими базисными системами. Отметим два важнейших свойства ДЭФ, предопределивших в значительной степени исключительную роль этого базиса в обработке ДИС:

- экспоненциальный базис обладает фундаментальным свойством инвариантности к циклическому сдвигу, что в ряде случаев позволяет свести динамическую задачу к статической задаче;
- экспоненциальный базис обладает свойством мультипликативности по обоим независимым переменным $p, l = \overline{0, N-1}$.

Другими словами, система ДЭФ является дважды мультипликативной (система функций называется мультипликативной, если она обладает

следующими двумя свойствами: наряду с любыми двумя базисными функциями, принадлежащими системе, система содержит и их произведение и наряду с любой базисной функцией $f(x)$, принадлежащей системе, система также содержит и базисную функцию $1/f(x)$.

Отметим, что именно благодаря свойству мультипликативности базисной системы возможно построение быстрых преобразований.

В настоящее время ДПФ:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), \quad k = \overline{0, (N-1)}, \quad (1.2)$$

где $x(n)$ – ДИС, $n = \overline{0, N-1}$,

$S_N(k)$ – коэффициенты ДПФ (спектр);

занимает важное место в обработке ДИС на конечных интервалах.

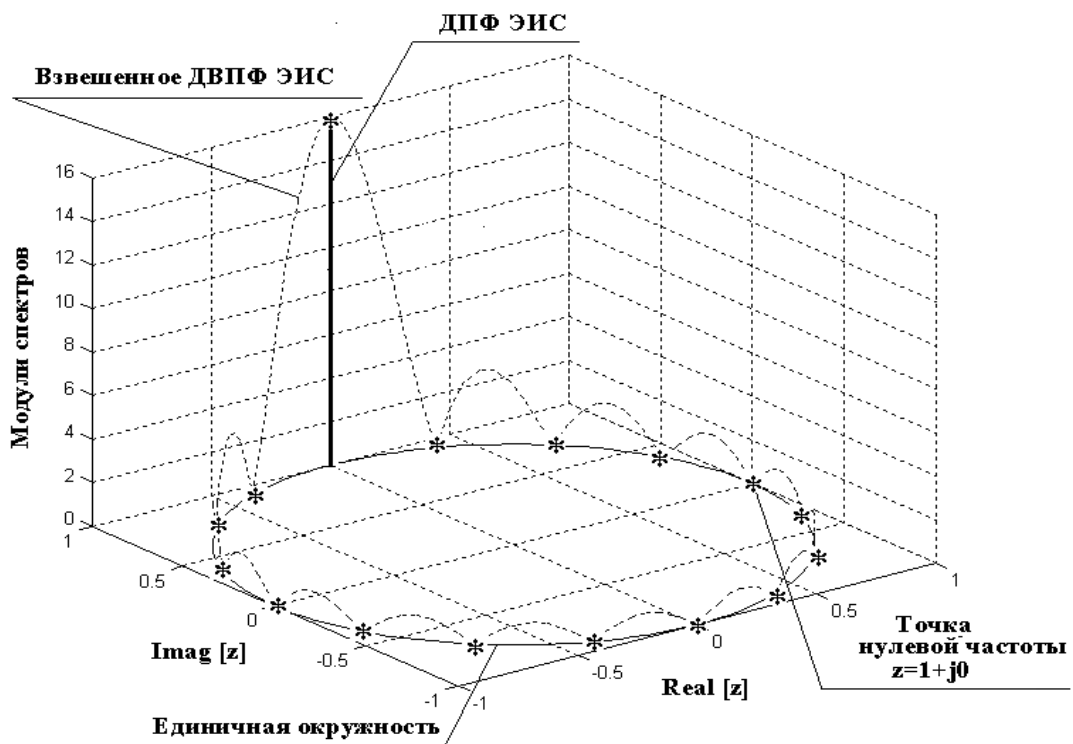
ДПФ представляет собой разложение дискретного сигнала $x(n)$ на конечном интервале $n = \overline{0, N-1}$ по дискретному базису Фурье (базису ДЭФ). В рамках ДПФ определены основные положения теории обработки дискретных сигналов на конечных интервалах [160, 161]:

- определение сигнала на N -интервале;
- определение сдвига сигнала как некоторой перестановки его отсчетов;
- определение системы дискретных базисных функций.

ДПФ, являясь дискретным преобразованием, позволяет одновременно и, что важно, с более высокой точностью проводить обработку ДИС в частотной области на k частотах (нормализованных частотах) $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ значений непрерывного частотного спектра, задаваемого взвешенным дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ) (рисунок 1.4).

Эта возможность, с учетом существования алгоритмов быстрого преобразования Фурье (алгоритмов БПФ), является безусловным преимуществом ДПФ.

Рассмотрим кратко еще один интересный вопрос – вопрос интерпретации ДПФ в теории ЦОС и общей теории измерений. В общей теории измерений [3], ДПФ рассматривается как метод обработки результатов динамических измерений.



Взвешенное ДВПР сигнала $x(n)$ обозначено пунктирной линией, а значения ДПФ сигнала обозначены звездочками *; $z = \exp(-2\pi / N)$

Рисунок 1.4 – Сигнал $x(n) = \exp((j \cdot 2\pi / N) \cdot k \cdot n)$; $n = \overline{0, N-1}, N = 16, k = 4$

В то же время в практике косвенных измерений [63, 154] достаточно давно известны так называемые *линейные косвенные измерения*. При данном виде измерений искомое значение физической величины Q находят на основании известной линейной функциональной зависимости:

$$Q = \sum_{i=1}^m b_i \cdot Q_i, \quad (1.3)$$

где b_i – постоянный коэффициент i -го аргумента Q_i

($Q_i, \overline{i=1, m}$ – значения физических величин, полученные при прямых измерениях);

m – число аргументов.

Сравнивая (1.2) и (1.3), нетрудно видеть, что каждое k -е, $k = \overline{0, (N-1)}$, значение коэффициента (бина) ДПФ (каждое значение частотного спектра на определенной нормализованной частоте $\frac{2\pi}{N} \cdot k$) представляет собой **дискретное (линейное) косвенное измерение**, в котором в качестве функциональной зависимости используется k -я дискретная базисная функция ДПФ определенной частоты – k -я ДЭФ.

Исходя определения области измерений¹⁷, **дискретные косвенные измерения на конечных интервалах** (ДКИ) информационных параметров ДИС (в силу присущих им специфических свойств и закономерностей, выделяющих их из общей области косвенных измерений) следует рассматривать в рамках отдельной области косвенных измерений. Вводимые в диссертационном исследовании ДКИ не следует смешивать с непрерывными косвенными измерениями в дискретной форме, которые также широко применяются в практике измерений. В приложении 1 показано, что это два существенно отличающихся друг от друга подхода к косвенным измерениям, и неучет принципиальных их отличий приводит к ошибочным научным и практическим выводам при обработке ДИС.

Пара преобразований дискретного преобразования Фурье может задаваться в алгебраической форме (1.2) и в матричной форме:

$$\text{прямое ДПФ: } S_N = \frac{1}{N} F_N X_N, \quad (1.4)$$

$$\text{обратное ДПФ (ОДПФ): } X_N = F_N^* S_N, \quad (1.5)$$

где * – знак комплексного сопряжения,

$X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства;

T – знак транспонирования;

¹⁷ **Область измерений** – совокупность измерений физических величин, свойственных какой-либо области науки или техники и выделяющихся своей спецификой (РМГ 29 – 99).

$S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе ДЭФ, задаваемой матрицей F_N :

$$F_N = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \cdot & \cdot & (N-1) & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & W_N^1 & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{array} \right] & \cdot & \end{matrix} \quad (1.6)$$

k

В рамках аппарата ДПФ вводятся понятия энергетического спектра $G_N(k)$ и спектра мощности $P_N(k)$:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N |S_N(k)|^2, P_N(k) = |S_N(k)|^2, \Delta f = \frac{1}{N}. \quad (1.7)$$

При этом переход от нормированной Δf к «истинной» $\Delta f_{\text{эпд}}$ осуществляется согласно выражению, $\Delta f_{\text{эпд}} = \Delta f \cdot F_s$, где F_s – частота дискретизации сигнала $x(n)$. При применении аппарата ДПФ в обработке ДИС необходимо учитывать следующие важные моменты.

- Свойства ДПФ являются **точными** и не являются приближенными, основанными на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов.
- ДПФ и ОДПФ «**навязывают**», **путем циклического сдвига**, циклическое продолжение последовательностям в частотной и временной областях соответственно.
- ДПФ наряду с достоинствами имеет и ряд недостатков, связанных с проявлением при практическом его применении в обработке ДИС, ряда специфических эффектов, присущих данному преобразованию (**эффекты наложения и частотола, эффект утечки, гребешковый эффект**).

Отметим, что нежелательные эффекты, сопровождающие практическое применение ДПФ, являются его принципиальными недостатками, которые

существенно ограничивают использование ДПФ в обработке ДИС во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях. Именно принципиальные недостатки ДПФ были основной причиной разработки альтернативных методов цифровой спектральной обработки ИС.

1.2. Частотные модели информационных сигналов и области их приложений

В настоящее время арсенал МиА, измеряемых информационных параметров, применяемый при обработке ИС в различных областях научных и прикладных исследований, достаточно велик. При этом выбор тех или иных информационных параметров (или их набора) для эффективного решения конкретной научно-технической задачи (или круга задач) во многом определяется применяемыми *моделями информационных сигналов*.

Рассмотрим, например, такую предметную область как *машиностроение*. В данной предметной области существует важная и актуальная проблема, требующая своего решения – *проблема повышения технико-экономического уровня и качества машин и оборудования*. При решении возникающих при этом задач фундаментальная роль отводится обработке виброакустических ДИС, как основе *виброакустического функционального диагностирования* машин и оборудования на всех этапах их разработки, производства и эксплуатации. Виброакустический ИС (ВИС) (как обобщенное понятие) связан с колебательными процессами (акустическими, вибрационными, магнитными, аэродинамическими, гидроакустическими, гидродинамическими колебаниями), возникающими в объекте диагностирования. ВИС является физическим носителем информации о техническом состоянии функционирующего объекта. Как показал анализ, при построении диагностических моделей различного рода объектов для получения вектора диагностических признаков широкое распространение получили частотные представления либо непосредственно виброакустического сигнала, либо некоторого его функционального

преобразования (например, *оггибающей* (мгновенной амплитуды) виброакустического сигнала). При данном подходе поиск информативных диагностических признаков осуществляется в частотной области, в связи с чем данные диагностические модели основаны на **частотных моделях ВИС**.

Частотные модели ВИС отражают динамические характеристики диагностируемого объекта и позволяют связать проявление того или иного дефекта, включая этап его зарождения, с изменением частотного спектра (и/или энергетического спектра) ВИС на определенной частоте или совокупности частот. Частотные диагностические модели [15, 55, 188, 197, 207, 211, 212, 217] различных узлов (элементов) механических систем приведены в Приложении 2.

Рассматривая частотные модели технического состояния узлов (элементов) механических систем с точки зрения системного и информационного подходов, можно их представить в виде следующей **обобщенной частотной модели виброакустического информационного сигнала**:

$$Y(t, r) = \{Y_1(t) + S(t)[1 + \gamma \cdot H(t)]\} \cdot R(r, t) \quad (1.8)$$

где $S(t)$ – квазидетерминированная часть виброакустического сигнала:

$$S(t) = \sum_m \sum_k A_{m,k} \cos(2\pi k f_m t + \varphi_{m,k})$$

$Y_1(t)$ – шумовая часть виброакустического сигнала; γ – коэффициент модуляции;

$H(t)$ – квазидетерминированная модулирующая функция:

$$H(t) = \sum_n \sum_p A_{n,p} \cos(2\pi p f_n t + \varphi_{n,p})$$

$R(r, t)$ – коэффициент пространственно-временного затухания.

Рассмотрим приложения **частотных моделей информационных сигналов** в такой важной предметной области как **пассивная гидролокация** [23, 46, 49, 56, 57, 62, 147].

Задачей пассивной гидролокации является обнаружение и идентификация различных источников внешнего шума в водной среде на фоне собственного

шума (собственный шум – это, так называемый, шум ближней зоны, возникающий из-за движения судна, на котором, собственно, и установлена пассивная гидролокационная система). В настоящее время пассивные гидролокационные системы находят самое широкое применение в океанографии, в навигации, в изучении прибрежной зоны и подводных землетрясений, а также в военных системах наблюдения для обнаружения и сопровождения надводных кораблей и подводных лодок. При этом методы и алгоритмы обработка гидроакустических ИС играют важнейшую роль в пассивных гидролокационных системах как военного, так и гражданского назначения.

Для описания в частотной области акустического шума окружающей среды в океане, а также структуры акустических шумов, часто используется обобщенная диаграмма Вена [57], которая приведена на рисунке 1.5, из которой непосредственно следует, что реальная частотная структура гидроакустического ИС весьма сложна.

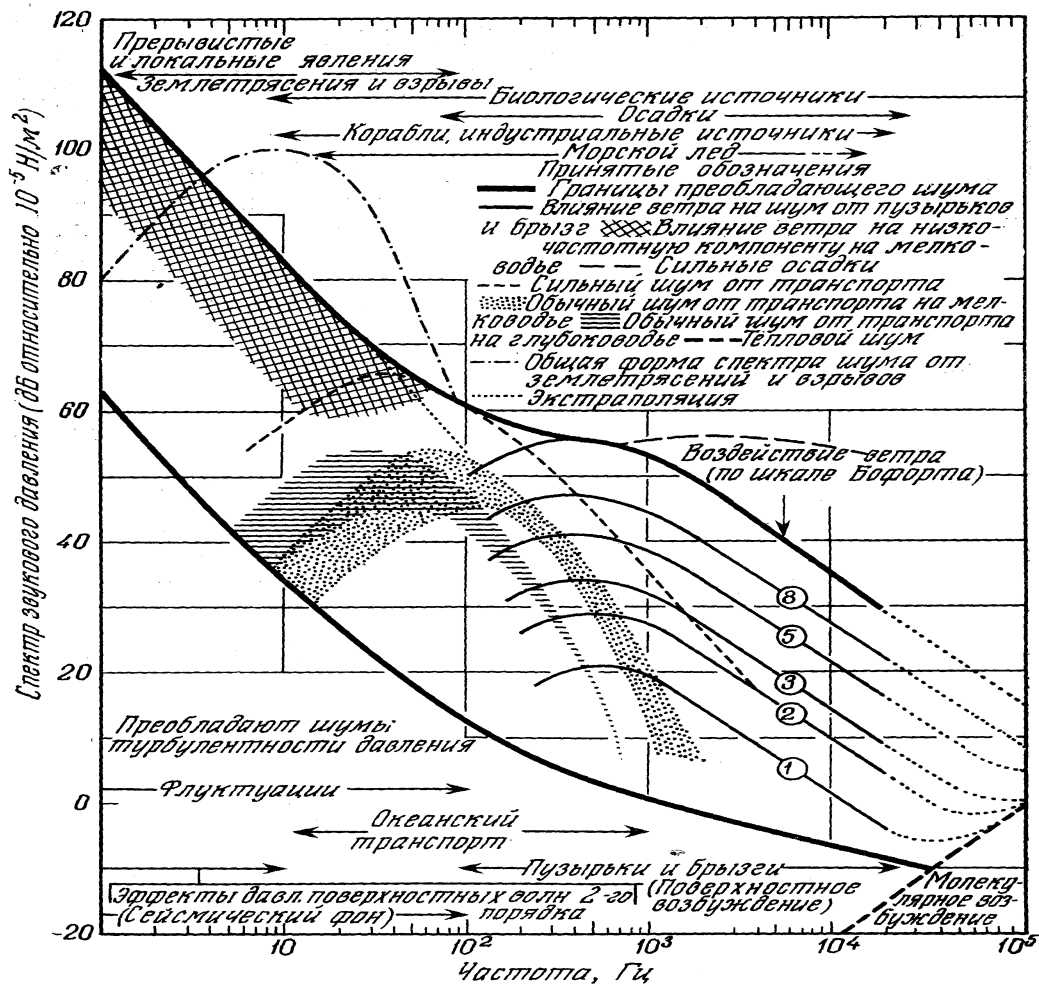


Рисунок 1.5 – Акустический шум окружающей среды в океане:

Частотные спектры и источники

Множество натуральных экспериментов показали, что в спектре гидроакустических ИС в диапазоне 100–1000 Гц имеется интенсивная составляющая, которая создается судами (надводными и подводными).

Структура шумов, излучаемых судами в этом диапазоне, имеет смешанную структуру и состоит из чисто шумовой компоненты, создаваемой кавитацией от гребных винтов и гидродинамическими силами, действующими при движении судов, а также дискретной части шума, состоящей из тональных компонент (звукорядов), появление которых обусловлено работой механизмов и вращением движителей судна.

Как правило, в гидроакустическом сигнале имеется целый ряд звукорядов, которые часто между собой не синхронизированы. Тональная структура гидроакустических сигналов часто имеет характерный вид для конкретных типов кораблей, что позволяет путем обработки гидроакустических сигналов обнаруживать подводные и надводные суда и проводить классификацию целей.

Обобщенную частотную модель гидроакустического сигнала можно представить следующим соотношением [62, 147]:

$$X(t, r) = \{D(t) + X_1(t) + X_2(t)[1 + \gamma \cdot F(t)]\} \cdot R(r, t); \quad (1.9)$$

где $D(t)$ – инфразвуковая часть гидроакустического сигнала:

$$D(t) = \sum_m \sum_k A_{m,k} \cos(2\pi k f_m t + \varphi_{m,k})$$

$X_1(t)$ – шумовая часть гидроакустического сигнала;

$X_2(t)$ – шумовая часть гидроакустического сигнала, подверженная модуляции; γ – коэффициент модуляции;

$F(t)$ – модулирующая функция:

$$F(t) = \sum_n \sum_p A_{n,p} \cos(2\pi p f_n t + \varphi_{n,p})$$

$R(r, t)$ – коэффициент пространственно-временного затухания.

Составляющая $D(t)$ описывает сигнал в инфразвуковом диапазоне частот (10–200 Гц). Составляющие $X_1(t)$ и $X_2(t)$ представляют собой сигналы в звуковом диапазоне частот, причем $X_2(t)$ описывает модулируемую компоненту гидроакустического ИС. Экспериментальные исследования огибающей (модулирующей функции $F(t)$) гидроакустического ИС и его инфразвуковой (ИЗ) компоненты $D(t)$ показали, что структура огибающей, выделенной в шумовом излучении звукового диапазона частот, в большой степени повторяет структуру ИЗ компоненты гидроакустического ИС. Отметим, что дискретно-сплошной спектр ИЗ компоненты гидроакустического ИС и его огибающей обусловлен рядом физических причин, в основном связанных с механическим и гидромеханическим воздействием винта и водной среды. Дискретная структура ИЗ компоненты гидроакустического ИС и его огибающей определяется набором звукорядов и отдельных дискретных составляющих.

В частности, при работе вала и лопастей можно ожидать появления дискретных составляющих (ДС) на частотах, описываемых соотношением:

$$f_{m,k} = \frac{n}{60}(mz + k); \quad (1.10)$$

где n – число оборотов вала; z – число лопастей; $m, k = 1, 2, 3, \dots$

Соотношение (1.10) при $m=0; k=1, 2, \dots$ описывает излучение судна на частоте вращения вала f_A и ее гармониках $k \cdot f_A$. При $k=0; m=1, 2, \dots$ выражение (1.21) описывает излучение на лопастной частоте f_{nz} и ее гармониках $m \cdot f_{nz}$. Кроме основных звукорядов (вала и лопастей), в излучении корабля могут присутствовать другие звукоряды и одиночные дискретные компоненты. В отличие от звукорядов вала и лопастей, эти звукоряды сохраняют постоянные частоты независимо от скорости хода судна.

В заключение рассмотрим роль и место частотных моделей информационных сигналов в *медицинской компьютерной диагностике* [8, 70, 150, 164, 209].

Известно [70, 110, 150], что живые организмы состоят из многих взаимосвязанных систем, каждая из которых в свою очередь состоит из множества подсистем, отвечающих за многочисленные физиологические процессы. Например, у человека принято выделять нервную систему, сердечно-сосудистую систему, мышечно-скелетную систему. Большинство физиологических процессов проявляют себя в виде сигналов, структура которых связана с протеканием процессов и их природой. Если в результате болезни работа той или иной системы (подсистемы) нарушается, то нормально протекающий *физиологический процесс* переходит в *патологическую фазу*. Естественно ожидать (на практике данное предположение подтверждается), что *патологический физиологический процесс* будет проявлять себя в виде биомедицинских ИС, отличающихся от биомедицинских ИС нормально протекающего физиологического процесса. Таким образом, в результате обработки биомедицинских ИС имеется потенциальная возможность постановки диагноза. В медицинской компьютерной диагностике широко используются следующие электрические биомедицинские сигналы, для описания которых применимы частотные модели: *электроэнцефалограмма, электромиограмма, электрокардиограмма, электроэнцефалограмма, электрогастрограмма, фотоплетизмограмма, каротидный пульс, виброартограмма, сигнал отоакустической эмиссии*. Отметим, что МИА цифровой обработки биомедицинских ИС играют определяющую роль при решении задач медицинской компьютерной диагностики и терапии.

Многочисленные исследования, в том числе проведенные и автором настоящей диссертационной работы, показали, что виброакустические гидроакустические, биомедицинские и иные ИС (рисунок 1.2) могут быть описаны путем обобщения частотных моделей (1.8) и (1.9) в виде:

$$Z(t, r) = \{S_1(t) + X_1(t) + [S_2(t) + X_2(t)] \cdot [1 + \gamma \cdot F(t)]\} \cdot R(r, t); \quad (1.11)$$

где $S_1(t)$, $S_2(t)$ – квазидетерминированные части ИС, состоящие из квазидетерминированных сложных ИС; $F(t)$ – квазидетерминированная

модулирующая часть ИС, состоящая также из квазидетерминированных сложных ИС; $X_1(t)$, $X_2(t)$ – шумовая часть ИС.

Перечень предметных областей приложений частотных моделей ИС можно было бы продолжить, т.к. он практически безграничен. Поэтому перечислим только некоторые из них: акустика, дефектоскопия, теория информации, теория кодирования, геофизика, спектроскопия, космические исследования, исследования поведения зданий и сооружений при землетрясениях, медицина, биология и т.д.

Таким образом, во многих предметных областях важная роль отводится решению сложнейшей проблемы ЦОИС – *проблемы проведения при заданных ограниченных ресурсах обработки смешанных ИС на конечных интервалах с высокой точностью и высоким частотным и/или временным разрешением.*

1.3. Цифровая обработка случайных информационных сигналов

В основе методов и алгоритмов цифровой обработки на конечных интервалах случайных ДИС лежит теория измерения теоретико-вероятностных характеристик случайных сигналов (*теория статистических измерений*) [3, 36, 52, 168, 170, 172]. Современное состояние теории статистических измерений достаточно полно отражено в работах [170, 172] и литературе к ним. Предлагаемое автором *развитие теории цифровой обработки на конечных интервалах информационных сигналов* можно рассматривать, в том числе, и как *развитие теории статистических измерений*. Статистические измерения теоретико-вероятностных параметров дискретных случайных сигналов являются прикладным научным направлением и, как и любая математическая теория, ориентированная на практическое приложение, имеет в своем составе *математическую часть и измерительную часть* [153].

К сожалению, в научно-практической литературе вопросы содержания и соотношения между собой этих частей теории дискретных статистических измерений (ДСИ) излагаются не вполне корректно, часто неполно и довольно

сбивчиво. А иногда над этими вопросами и просто не задумываются, что может приводить к ошибочным научным и практическим выводам. В связи с этим рассмотрим данный вопрос более подробно.

В рамках корреляционной теории [174] описание исследуемого дискретного случайного ИС проводится с помощью моментов первых двух порядков, определение которых дается в классической теории вероятностей [13]. Эти теоретико-вероятностные характеристики случайных ДИС стационарных (по А.Я. Хинчину, т.е. в широком смысле), совместно с аналитическими и стохастическими свойствами дискретного преобразования Фурье, составляют основу математической части **теории дискретных косвенных статистических измерений** (теории ДКСИ).

В измерительной части теории ДКСИ характеристик случайных ДИС задаются **способы (принципы) измерения теоретико-вероятностных характеристик случайных ДИС**, которые аналогично [153] назовем «**аксиомами измерения**». Они отвечают на вопрос, каким образом **на практике можно измерить** те или иные теоретико-вероятностные характеристики случайных ДИС. Эта часть теории включает в себя аксиомы измерения таких вероятностных характеристик как: математические ожидания, дисперсии, корреляционные функции, взаимные корреляционные функции (корреляционный подход), а также аксиомы измерения их энергетических спектров, взаимных спектров, фазовых и частотных спектров, кепстров (спектральный подход). Подчеркнем, что именно наличие в **измерительной части** теории ДКСИ **адекватных аксиом измерения** позволяет делать выводы о соответствии (или несоответствии) теоретических положений практике [153].

В качестве **объекта измерения** теория ДКСИ предполагает некоторый исходный физический аналоговый случайный сигнал. Под аналоговым случайным (стохастическим, вероятностным) сигналом будем понимать случайную функцию времени $X(t)$, когда переменная t непрерывна. При дискретизации аналогового случайного сигнала $X(t)$, согласно известной теореме Котельникова, аналоговый случайный сигнал становится дискретным случайным

сигналом $X(n)$. В результате проведения k -го эксперимента на конечном интервале времени исследователь получает k -ю реализацию дискретного случайного сигнала на конечном N – интервале: $x_k(n)$, $n = \overline{0, N-1}$. При этом, в силу широкого применения в составе измерительной цепи процессорных измерительных средств, наиболее естественной формой представления физического случайного процесса является совокупность (ансамбль) реализаций дискретных сигналов:

$$X(n) = \{x_i(n)\}, \quad (1.12)$$

где $[i = \overline{1, \infty}; n = \overline{1, \infty}] \vee [i = \overline{1, \infty}; n \in \{n\}] \vee [i \in \{i\}; n = \overline{1, \infty}]$.

В теории ДКСИ широкое применение нашел подход, при котором вероятностные характеристики определяются через **пределы выборочных средних**. Если, аналогично [170, 172], результат измерения некоторой вероятностной характеристики Ψ последовательности $X(n)$ по ограниченному объему выборки d назвать **оценкой** (оценку обозначим тем же символом, что и вероятностную характеристику, но с индексом $d - \psi_d$), то:

$$\psi[X(n)] = \lim_{d \rightarrow \infty} \psi_d[X(n)]. \quad (1.13)$$

Под оценкой будем понимать количественное значение некоторого параметра исследуемого физического объекта, полученного с помощью выбранного алгоритма. Как справедливо отмечено в [170–172], определение вероятностных характеристик случайных сигналов в виде пределов выборочных средних, с одной стороны, адекватно существу измерительной задачи. С другой стороны, открывает широчайшие возможности использования методов, алгоритмов и результатов математической статистики [10, 16, 35, 40]. Несмотря на то, что определение вероятностных характеристик случайных сигналов в виде пределов выборочных средних используется уже достаточно длительное время, часто изложение и этого вопроса в научной и методической литературе по ЦОС и ДКИ страдает неполнотой. Поэтому рассмотрим данный вопрос несколько подробнее.

Во-первых, **аксиомы измерения** вероятностных параметров в виде пределов выборочных средних **не содержатся в математической части** ДКСИ. Во-вторых, поскольку теория ДКСИ имеет дело с реальными физическими объектами, то математическая часть теории ДКСИ **необходимо должна быть дополнена способами измерения** вероятностных характеристик случайных ДИС, в качестве которых и выбираются **выборочные средние**. В-третьих, определение вероятностных характеристик случайных ДИС в виде выборочных средних ставит вопрос о том, в каком смысле понимать **сходимость к пределу** случайных величин $\psi_d[X(n)]$ (1.14). В [153] показано, что сходимость к пределу в соотношении (1.14) может пониматься только **в вероятностном смысле**. Там же рассмотрено три вида вероятностной сходимости.

Вероятностная сходимость к пределу в среднем квадратичном:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \{M[\psi_d[X(n)] - \psi[X(n)]]^2\} \Rightarrow \lim_{d \rightarrow \infty} \psi_d[X(n)] = \psi[X(n)] \quad (\tilde{n}\tilde{d}\hat{e}\hat{a}). \quad (1.14)$$

Вероятностная сходимость к пределу почти наверное:

$$P\{\lim_{d \rightarrow \infty} [\psi_d[X(n)] - \psi[X(n)]]\} = 1 \Rightarrow \lim_{d \rightarrow \infty} \psi_d[X(n)] = \psi[X(n)] \quad (\tilde{i}\tilde{t}). \quad (1.15)$$

Вероятностная сходимость к пределу по вероятности:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P\{|\psi_d[X(n)] - \psi[X(n)]| < \varepsilon\} = 1 \Rightarrow \lim_{d \rightarrow \infty} \psi_d[X(n)] = \psi[X(n)] \quad (\tilde{i}\tilde{t}\hat{a}\hat{d}). \quad (1.16)$$

где M – символ операции определения математического ожидания;

P – символ операции определения вероятности события;

ε – сколь угодно малое число.

Согласно выражению (1.16), вероятность (**теоретическое понятие!**) события: $|\psi_d[X(n)] - \psi[X(n)]| < \varepsilon$ стремится к единице, откуда, отнюдь не следует (как иногда утверждается), что существует предел:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} |\psi_d[X(n)] - \psi[X(n)]| = 0,$$

так как величины $\psi_d[X(n)]$ являются результатом некоторого **конкретного эксперимента** (эмпирические величины), относительно которых математически доказать ничего нельзя [153]. Применение же пределов выборочных средних в теории статистических измерений основано на том, что вероятность события P (согласно аксиоме измерений) **измеряется**, как известно [13, 16, 151], **относительной частотой (частотью)**.

В дальнейшем в диссертационной работе (если это не оговорено особо) **сходимость выборочных средних к пределу** будет пониматься в **смысле сходимости по вероятности** (1.16).

Косвенные методы измерения параметров детерминированных, случайных или смешанных ДИС на конечных интервалах имеют существенные различия как в специфике, так и в присущих им закономерностях и свойствах. При этом влияние конечности интервала измерения на результаты косвенных измерений в теории статистических измерений если и рассматривалось, то фрагментарно, а дискретные косвенные методы измерения вероятностных характеристик смешанных ДИС в теории статистических измерений вообще не рассматривались.

В заключение раздела отметим появление в ЦОИС нового поколения измерительных средств – процессорных измерительных средств (ПрИС) [172], применение которых представляется перспективным для получения измерительной информации о вероятностных характеристиках случайных ДИС.

ПрИС принципиально отличаются от простого применения средств вычислительной техники для обработки результатов измерений. В ПРИС, для которых основное уравнение измерений¹⁸ имеет вид:

$$\lambda^* = R_2 K R_1[\gamma(t)]; \quad (1.17)$$

где $\gamma(t)$ – измерительный сигнал; R_1 – оператор преобразований, осуществляемых в аналоговом виде; K – аналого-цифровое

¹⁸ **Уравнение измерений** – уравнение, отражающее связь между величинами, обусловленную законами природы, в котором под буквенными символами понимают физические величины (РМГ 29 – 99).

преобразование; R_2 – оператор преобразований, осуществляемых в цифровом виде;

средства вычислительной техники *непосредственно* входят в состав измерительной процедуры и используются для получения результатов *как прямых, так и косвенных измерений*.

ПриИС обладают существенными преимуществами: гарантированная точность; идеальная воспроизводимость результатов; большая гибкость за счет возможности программирования и перепрограммирования на выполнение различных измерений без изменения аппаратных средств; обеспечение выполнения современных требований к единству и точности измерений. ПриИС находят все более широкое применение при решении задач повышения качества продукции и достижения высокой эффективности при производстве и эксплуатации современных изделий.

1.4. Проблемы цифровой обработки информационных сигналов в базисе Фурье. Задачи исследования

Результаты анализа достоинств и принципиальных недостатков известных классических методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки информационных сигналов, а также научных и технических направлений их развития, приведенные во введении и в предыдущих разделах настоящей главы, позволяют сформулировать на базе системного подхода научную проблему, имеющую важное хозяйственное значение – проблему развития теории цифровой обработки информационных сигналов в базисе Фурье, разработки новых и совершенствования существующих классических методов и алгоритмов спектральной обработки, а также задачи исследования диссертационной работы.

Поскольку существует большое разнообразие трактовок понятий «*системной терминологии*», (в чем, обратившись к сети Интернет, нетрудно убедиться), по мере необходимости будем приводить определения некоторых

понятий системного анализа с целью понимания смысла, вкладываемого автором диссертационного исследования в эти понятия¹⁹.

Н.Н. Моисеев [53] охарактеризовал трактовку понятия **«системный анализ»** у нас в стране и за рубежом следующим образом:

«Термин «системный анализ» в русском языке не имеет точного аналога в иностранных языках...термин «system analysis» следовало бы перевести как «анализ систем», но его однажды перевели как «системный анализ», так как на английский язык оба эти термина переводятся одинаково: «system analysis». В русском же языке термин «системный анализ» несет гораздо большую смысловую нагрузку: этим термином называют большую самостоятельную дисциплину. Заметим, что и в настоящее время термин «system analysis» понимается на Западе как анализ систем...».

С.П. Никаноров [54], опираясь на основные понятия и утверждения системного анализа, подчеркивал, что существует два определения понятия **«системный анализ»**:

«Системный анализ—это методология решения крупных проблем, основанная на концепции систем.»...«Системный анализ может также рассматриваться как методология построения организации...» ... «Оба эти определения неразрывно связаны...»».

Как известно системный анализ базируется на традиционных методах научных исследований, таких как абстракция и конкретизация, индукция и дедукция, анализ и синтез, методах теории исследования операций и теории управления, а также на так называемой **системной парадигме**²⁰, выработанной обобщением результатов практического применения принципов и методов системных исследований. Одна из основных задач системного анализа — объединение формальных математических и неформальных методов анализа при

¹⁹ **Система** – это множество **элементов**, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство.

Элемент системы – это отдельная функциональная часть системы, рассматриваемая на данном уровне системного анализа как ее неделимая часть.

²⁰ **Системная парадигма** – это совокупность понятий, принципов и методов (приемов), описывающих специфику исследования объекта в той или иной предметной области, как системы

исследовании *сложных проблем*²¹ (проблем, которые не могут быть описаны детально). Следует подчеркнуть, что в системном анализе при решении той или иной проблемы, сама *проблема рассматривается как система* и для ее разрешения используется *методология системного подхода*. Системная парадигма предполагает наряду с классическими формальными методами и широкое применение неформальных методов (эвристических, описательных методов), качественного сравнительного анализа, которые основаны на системном, структурном, целевом, ситуационном подходах и иных подходах.

Создание системной парадигмы позволило сформулировать и так называемый *системный подход*, сутью которого является *изучение объектов исследования с различных сторон* (часто называемые аспектами изучения исследуемых объектов), анализировать их поведение всеобъемлюще, рассматривая связи и свойства изучаемых объектов с системных позиций. Системный подход является синтезирующим подходом, который позволяет не только изучать состояния объекта, происходящие явления и процессы, но и увидеть перспективы их развития, учесть их зависимость и взаимообусловленность. Отметим, что системный подход находится в постоянном развитии, который стимулируется требованиями его приложений, практикой существенного усложнения проблем, проблематики²², требующих своего разрешения.

Соотношение понятий: «*системный анализ*» и «*системный подход*» Н.Н. Моисеев [53] определил следующим образом:

«Системный подход – это некоторый общеметодологический принцип. Его гносеологический аспект – это теория систем»²³. Его... аппаратная реализация

²¹ **Проблема** – это расхождение (разница) между необходимым (желаемым) и реальным (существующим).

²² **Проблематика** – это множество проблем, находящихся в отношениях и связях с решаемой основной проблемой и решение которых существенным образом зависит от решения основной проблемы.

²³ Понятия: «*теория организации*» и «*теория систем*» часто употребляются как синонимы.

– это системный анализ. Это деление условно и ...аппаратные вопросы далеко не всегда можно (и не нужно) отделять от вопросов философских».

Таким образом, в основе как системного анализа, так и системного подхода, лежит **системная парадигма**. Однако конечной целью системного анализа, в отличие от системного подхода, является **разрешение исследуемой проблемы**.

Согласно классификации проблем, введенной Сайманом и Ньюэллом, разрешение проблемы осуществляется путем ее перевода из класса **неструктурированных** (*unstructured*) в класс **слабо структурированных** (*ill-structured*), а затем и в класс **хорошо структурированных проблем** (*well-structured*), а также применением системной парадигмы для формулировки целей, их структурирования и анализа, анализа ограничений, разработки альтернатив разрешения исследуемой проблемы и выбор из них наиболее эффективной.

При разрешении проблемы системный анализ выступает в роли **инструмента для создания средства** (системы), разрешающего проблему, т.е. устраняющего расхождение между необходимым (желаемым) и реальным (существующим).

Рассмотрим пример.

Предположим, **заказчик** (лицо, принимающее решение – ЛПР) некоей системы цифровой спектральной обработки информационных сигналов (система ЦСОИС), разрабатываемой для какой-то предметной области, определил значения желаемых параметров системы ЦСОИС в виде множества: $N_w = \{n_{w,i}\}, i = \overline{1, K}$. Предполагается, что реальные параметры системы ЦСОИС должны быть не меньше, чем желаемые.

Исполнитель (аналитик), проведя соответствующие изыскания, пришел к выводу, что на практике возможно обеспечить только значения реальных параметров системы ЦСОИС, определяемых множеством: $N_r = \{n_{r,i}\}, i = \overline{1, K}$.

Таким образом, при реализации параметров системы ЦСОИС $M = \{n_{R,i} < n_{W,i}\}, i = \overline{1, K}$ создается **проблемная ситуация**²⁴.

Учитывая, что в возникшей проблемной ситуации есть два вида обстоятельств:

- **субъективные обстоятельства** – требования заказчика к параметрам ЦСОИС;
- **объективные обстоятельства** – невозможность, на существующем уровне знаний, реализации желаемых заказчиком параметров ЦСОИС;

существует и два пути выхода из возникшей **проблемной ситуации**:

1. **изменить субъективные обстоятельства**: убедить заказчика, снизить значения желаемых параметров ЦСОИС, задаваемых множеством $M = \{n_{R,i} < n_{W,i}\}, i = \overline{1, K}$;
2. **изменить объективные обстоятельства**, путем разрешения проблемной ситуации с помощью системы, созданной на базе системного анализа и получения пустым множества $M = \{n_{R,i} < n_{W,i}\}, i = \overline{1, K}$.

Проиллюстрируем данный пример, используя для решения проблемы ЦСОИС концепцию «черного ящика», которая была введена в кибернетике (рисунок 1.6). Нетрудно видеть, что вскрыв внутреннюю организацию «черного ящика» (т.е., сделав "черный ящик" «прозрачным» за счет итерационного процесса решения проблемы) получим систему, с помощью которой можно решить возникшую проблемную ситуацию.

Разрешение проблемы, опирающееся на системный анализ, предполагает разработку логически и процедурно организованной последовательности операций (этапов), направленных на выбор предпочтительной альтернативы (гипотезы) решения проблемы.

²⁴ **Проблемная ситуация** – некоторое положение вещей, реальное стечение обстоятельств, определяющее исследуемую проблему.

В настоящее время относительно числа этапов, их содержания – в системном анализе нет единства²⁵. Отличие в числе этапов системного анализа, их содержания и структуре в различных научных школах объясняется, прежде всего, спецификой предметной области приложения методологии системного анализа, а также большим многообразием разрешаемых научных и прикладных сложных проблем.

Другими словами, свойства исследуемых проблем, возникающих проблемных ситуаций и проблематики в конкретных предметных областях накладывают свой отпечаток на число этапов системного анализа, их содержание.

Научная проблема создания методов и алгоритмов спектральной обработки информационных сигналов в дискретном базисе Фурье в этом плане также не является исключением.

На рисунке 1.7 приведена структурная схема системного анализа научной проблемы создания методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в базисе Фурье, разработанная автором.

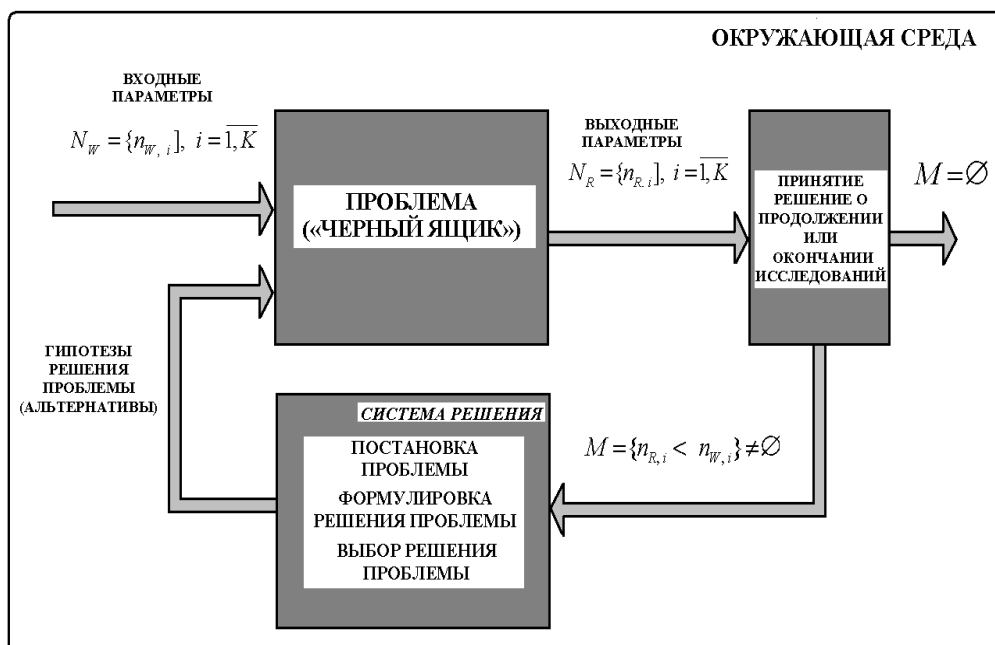


Рисунок 1.6 – Обобщенная системная модель системы решения проблемы ЦСОИС на основе концепции «черного ящика»

²⁵ <http://victor-safronov.ru/systems-analysis/lectures/zhivickaya/03.html>

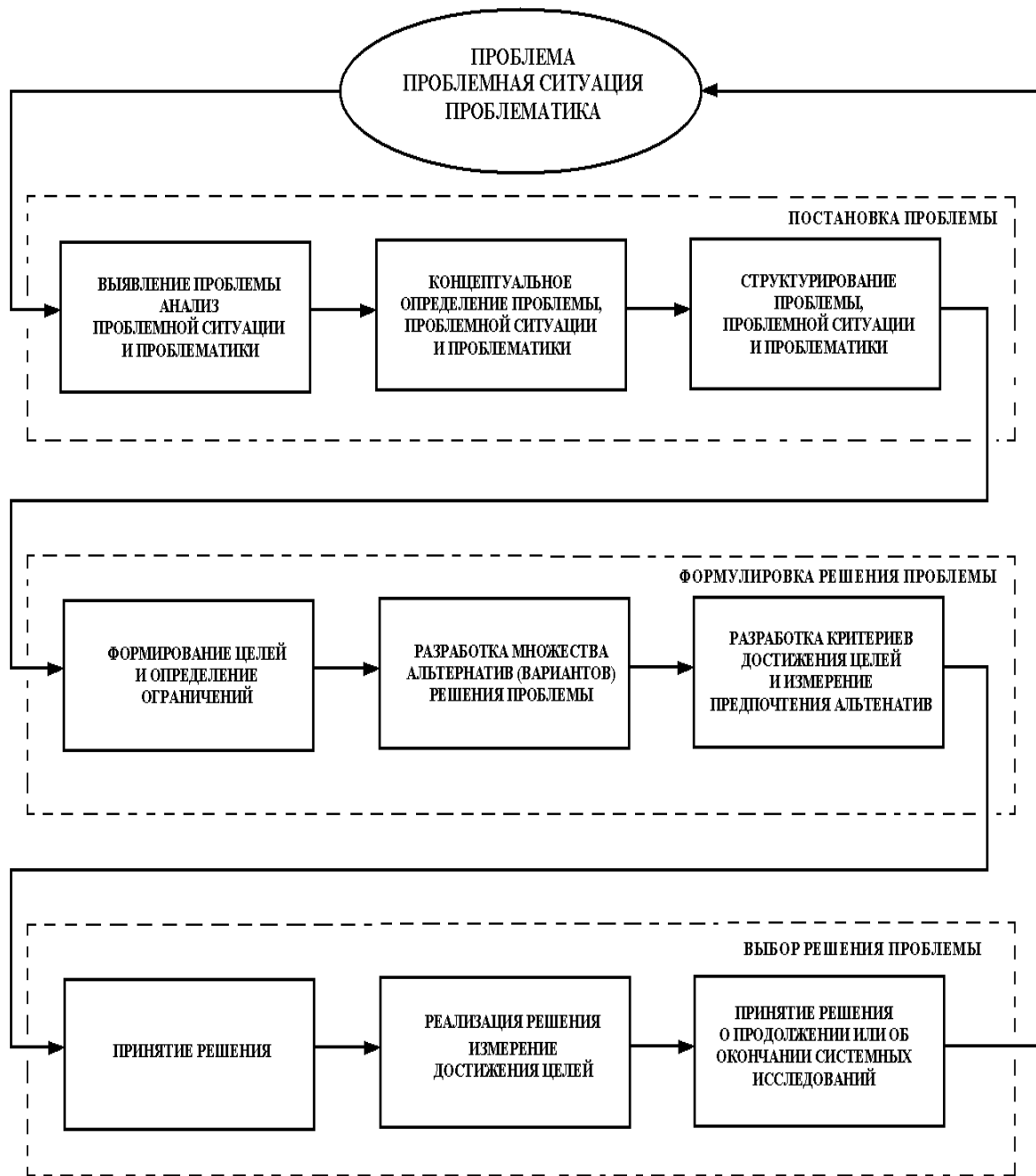


Рисунок 1.7 – Структурная схема системного анализа проблемы создания методов и алгоритмов спектральной обработки информационных сигналов в дискретном базисе Фурье

С формальной точки зрения под проблемой H понимается множество [29]:

$$H = \{Q, F, V\}; \quad (1.18)$$

где $Q = \{Q_i\}$ – множество целей, достижение которых разрешает проблему; $F = \{F_j\}$ – множество свойств проблемы; $V = \{V_k\}$ – множество гипотез (альтернатив) разрешения проблемы.

Все возрастающая сложность задач цифровой спектральной обработки информационных сигналов в различных предметных областях приводит к тому, что мощности множества $N_W = \{n_{W,i}\}, i = \overline{1, K}$ и $M = \{n_{R,i} < n_{W,i}\}, i = \overline{1, K}$ оказываются равными (или почти равными, что, по сути, ситуацию не меняет).

Другими словами пересечение множеств $N_R = \{n_{R,i}\}, i = \overline{1, K}$ и $N_W = \{n_{W,i}\}, i = \overline{1, K}$ оказывается пустым:

$$N_W = \{n_{W,i}\} \cap N_R = \{n_{R,i}\} = \emptyset, i = \overline{1, K}$$

Откуда непосредственно следует вывод о необходимости поднятия уровня знаний сегодняшнего дня путем перехода к *исследовательскому системному подходу* разрешения имеющегося диалектического противоречия между желаемыми и реальными параметрами систем спектральной обработки информационных сигналов в различных предметных областях.

Предварительный анализ методов спектральной обработки информационных сигналов на базе системного подхода, проведенный в предыдущих разделах настоящей главы, показал, что в основе «бед» классических методов цифровой спектральной обработки лежат свойства и принципиальные недостатки дискретного преобразования Фурье (рисунок 1.1).

Именно с желанием решить возникшие проблемы в спектральном анализе, осуществляемом на основе классических методов, было связано появление неклассических методов цифровой спектральной обработки (рисунок 1.1). По сути дела они и разрабатывались как альтернатива классическим методам цифровой спектральной обработки. Но, как показала практика, они не устранили существующих проблем.

Оказалось, например, что, во-первых, использовать в качестве показателя мощности гармонических компонент смешанных ИС высоту спектральных пиков в оценке спектральной плотности (СПМ) (как в классических методах) нельзя; во-вторых, выбор порядка модели, который носит субъективный, а не точный научный характер, существенно влияет на робастность получаемых оценок СПМ; в-третьих, спектральные пики СПМ соответствующие гармоническим

компонентам смешанных ИС, оказываются сдвинутыми по частоте пропорционально начальной фазе этих компонент [49].

Обобщенная системная модель на основе концепции «черного ящика» (рисунок 1.5) и структурная схема системного анализа проблемы создания методов и алгоритмов спектральной обработки информационных сигналов в дискретном базисе Фурье (рисунок 1.6) дает представление о сложности рассматриваемой проблемы.

В данной диссертационной работе в качестве рабочей принята следующая гипотеза решения поставленной проблемы.

- проведение научных и прикладных исследований с целью развития и совершенствования теоретических основ классических методов спектральной обработки для представления ИС во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях;
- разработка новых и совершенствование существующих методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки ИС;
- поиск наиболее адекватных базисных систем, обеспечивающих оптимальное решение научных и технических проблем повышения эффективности, надежности и качества современных технических систем различного назначения.

Рассмотрение данной проблемы позволяет представить ее как **взаимоувязанное решение** следующих основных задач:

1. Выявление научных и технических проблем современной цифровой спектральной обработки сложных и смешанных информационных сигналов методами и алгоритмами на основе дискретного преобразования Фурье.

2. Развитие теории, разработка методов и алгоритмов цифровой обработки сложных и смешанных информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях на конечных интервалах в параметрических дискретных базисах Фурье.

3. Развитие теории, разработка методов и алгоритмов цифровой обработки мгновенных параметров информационных сигналов на конечных интервалах на основе параметрических дискретных преобразований Фурье.

4. Разработка быстрых процедур спектральной обработки информационных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье.

5. Постановка и решение задач практической реализации разработанных методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки ИС в параметрических дискретных базисах Фурье.

ВЫВОДЫ

1. На современном этапе развития информационных технологий происходит интенсивный переход на цифровые методы, алгоритмы и средства обработки информационных сигналов объектов, так как данный вид обработки обладает целым рядом преимуществ и играет ключевую роль в повышении эффективности и качества современных технических систем различного назначения, достижении надежности их функционирования.

2. Научно-прикладные исследования, проводимые в классических направлениях ЦОИС: цифровой фильтрации, дискретном спектральном анализе и дискретном векторном анализе ИС, сохраняют свою ведущую роль и эффективность своих приложений практически во всех предметных областях. В то же время практика применения методов и алгоритмов ЦОИС, основанных на ДПФ, выявила и их недостатки, существенно снижающие результативность решения задач обработки классическими методами ЦОС. Одна группа недостатков вытекает непосредственно из свойств и природы ДПФ, другая группа связана с отсутствием развития и совершенствования данного вида дискретного преобразования.

3. Системный анализ приложений методов, алгоритмов и средств ЦОИС показал, что проведение измерений всегда является частью ЦОИС. В

связи с чем в мировой практике общепринято считать ИС носителями общей измерительной информации. Совокупность информационных параметров, характеризующих объект исследования, применяемые методы и средства их измерения, требования к функциональным возможностям и метрологическим характеристикам средств измерений определяются прежде всего задачами, стоящими в целом перед системами ЦОИС, а также условиями решения этих задач.

4. Во многих предметных областях характерной спецификой ИС является наличие в их структуре скрытых периодических, почти периодических и ангармонических сигналов (скрытых периодичностей, почти периодичностей и ангармонических периодичностей), параметры которых являются основными носителями информации о состоянии исследуемых объектов, свойствах анализируемых явлений и процессов. Данный класс смешанных ИС относится к классу сигналов со сложной структурой, обработка и измерение параметров которых носит статистический характер и в общей теории обработки и измерений либо рассматривается фрагментарно, либо не рассматривается вообще.

5. Задачи разработки новых и совершенствование существующих методов и алгоритмов цифровой обработки ИС, поиска наиболее адекватных базисных систем, обеспечивающих оптимальное решение научных и научно-технических проблем повышения эффективности, надежности и качества современных технических систем различного назначения, являются важными и актуальными как с теоретической, так и с практической точек зрения.

6. В то же время практика применения методов и алгоритмов ЦОИС, основанных на ДПФ, выявила и их недостатки, снижающие результативность решения задач спектральной обработки классическими методами. Одна группа недостатков вытекает непосредственно из свойств и природы ДПФ, другая группа связана с отсутствием развития и совершенствования данного вида дискретного преобразования.

7. Разработана обобщенная системная модель проблемы создания ЦОИС, которая, давая представление о сложности рассматриваемой проблемы, показывает, что, во-первых, она иерархична; во-вторых, постановка проблемы необходимо должна уточняться в процессе исследования; в-третьих, разрешаемая проблема содержит (как и любая проблема) диалектическое противоречие. Обобщенная системная модель проблемы создания ЦОИС позволяет выявить и сформулировать это противоречие, концептуально наметить путь его разрешения, сформулировав проблему создания МА ЦОИС.

ГЛАВА 2

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ
ФУРЬЕ**

**2.1. Методы и алгоритмы цифровой обработки информационных
сигналов в базисе Фурье**

В настоящее время, как уже отмечалось, ДПФ занимает ведущую роль среди методов цифровой спектральной обработки на конечных интервалах ДИС в частотной и частотно-временной областях. ДПФ может задаваться в алгебраической (1.2) и матричной (1.4) формах. Каждый коэффициент (бин²⁶) ДПФ является результатом измерения амплитуды и фазы гармонических составляющих исходного информационного сигнала, а совокупность коэффициентов (бинов) ДПФ определяет его амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры.

Широкое применение ДПФ в ЦОИС главным образом основано на двух моментах. Во-первых, на фундаментальном свойстве, отмеченном еще Н. Винером – *свойстве инвариантности экспоненциального базиса к циклическому сдвигу* [60]. Во-вторых, на том, что благодаря свойству *мультипликативности базисной системы ДЭФ по обеим переменным* возможно построение, так называемых, быстрых преобразований – *быстрых преобразований Фурье* (БПФ) [23, 60, 149, 151, 160, 161]. Отметим, что БПФ это не новая форма преобразования Фурье, а название *целого ряда алгоритмов эффективной реализации ДПФ*.

Для ДПФ матрица сдвигов исходного сигнала X_N является *циркулянтной матрицей* и имеет вид:

²⁶ Отдельные коэффициенты (отсчеты) ДПФ называют также **бинами** («Bin» – в переводе с английского «хранилище», «ларь»), что подчеркивает тот факт, что энергия сигнала под кривой $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$ (передаточная характеристика фильтра ДПФ) попадает в «хранилище» данного коэффициента ДПФ [46].

$$C_N = \begin{matrix} & & & & & & (N-1) \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ (N-1) & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & (N-1) \\ x(0) & x(1) & & & & x(N-1) \\ x(N-1) & x(0) & \cdot & \cdot & \cdot & x(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x(1) & x(2) & \cdot & \cdot & \cdot & x(0) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Если использовать квадратную матрицу сдвига размерности N :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

то выражение (2.1) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{N}_N = \begin{bmatrix} X_N^T M^0 \\ X_N^T M \\ \cdot \\ X_N^T M^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где M^0 – единичная матрица,

M^k , $k = \overline{1, N-1}$ – обозначает возведение матрицы M в степень k .

Теория ЦОИС на конечных интервалах базируется на трех основных и взаимосвязанных положениях [161]: определение сигнала на конечном интервале (N -интервале); определение сдвига сигнала как некоторой перестановки его отсчетов; определение полной системы дискретных базисных функций. В рамках ДПФ определены все вышеперечисленные положения теории ЦОИС:

- ДИС $x(n)$ задается на конечном интервале $\overline{0, N-1}$;
- сдвиг ДИС $x(n)$ определяется как циклическая перестановка его отсчетов внутри интервала;

- в качестве базисной системы определена система дискретных экспоненциальных функций $def_p(k, n) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n)$;
 $k, n = \overline{0, N-1}$, которая является полной системой.

С точки зрения практического применения аппарата ДПФ отметим следующий важный момент. Несмотря на то, что ДПФ последовательности $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ в принципе может рассматриваться как некоторое приближение к преобразованию Фурье от функции, порождающей последовательность $X(n)$, однако, и это следует подчеркнуть, свойства ДПФ **являются точными и не являются приближенными**, основанными на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов [23]. В случае использования ДПФ дискретного информационного сигнала $x(n)$ различают **временную область** – область дискретной переменной n и **частотную область** $S_N(k)$ – область переменной k , а в случае непрерывного преобразования Фурье (НПФ) непрерывного информационного сигнала $x(t)$ также различают **временную область** – область непрерывной переменной t и **частотную область** $S(f)$ – область переменной f .

В теории спектрального анализа доказаны следующие положения [23, 38, 149, 151]:

- определение дискретного (или непрерывного) информационного сигнала на конечном интервале (**операция взвешивания прямоугольным окном**) в одной из областей, приводит к **свертке** (фильтрации) в другой области с функцией вида $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$ (или $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$);
- выполнение операции дискретизации электрического сигнала в одной области приводит к операции периодизации (периодического продолжения) в другой области;
- операции дискретизации и взвешивания являются линейными и коммутативными операциями.

Из того, что дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) некоторой последовательности $y(n)$, $n = \overline{-\infty, +\infty}$ задает ее **непрерывный спектр** и ДВПФ определяется как z-преобразование последовательности $y(n)$, $n = \overline{-\infty, +\infty}$ на единичной окружности:

$$S_y(f) = S_y(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2, \quad (2.4)$$

а также с учетом указанных выше положений, следует вывод о том, что коэффициенты ДПФ $S_N(k)$ (1.3) последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ равны значениям ДВПФ **взвешенной последовательности** $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ (взвешенное ДВПФ) в точках $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ на единичной окружности:

$$\begin{aligned} S(f) &= S(z) \Big|_{z=\exp(j\frac{2\pi}{N}k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp(-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, ДПФ позволяет измерять в дискретном множестве точек $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ непрерывный спектр, задаваемый взвешенным ДВПФ (рисунок 1.4).

При практическом применении ДПФ возникает ряд проблем, появление которых связано с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его использование. Отметим три из них.

1. ДПФ не дает ответа на вопрос: каковы значения спектра, определяемого ДВПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, между отсчетами $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ на единичной окружности, порождая тем самым известный **«эффект частотола»**.
2. Применению ДПФ сопутствует также **«эффект размывания спектральных составляющих»** (часто называемый **«эффектом**

утечки)). Проявление данного эффекта связано с тем, что при выполнении спектрального анализа исследуемой функции мы измеряем циклическую свертку спектра исследуемого сигнала с функцией вида $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$, которая не локализована, а размыта по частоте (отсюда и название эффекта).

3. При применении ДПФ возникает также **«эффект паразитной амплитудной модуляции спектра»** (называемый в иностранной литературе также **«гребешковым эффектом»**). Проявление данного эффекта связано с тем, что поскольку частотные характеристики фильтров, соответствующих коэффициентам ДПФ (бинам ДПФ), имеют вид $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$, то это приводит к флуктуации общего амплитудного спектра при N -точечном ДПФ (флуктуации достигают 4 дБ).

При цифровой обработке на конечных интервалах ДИС для определения значений ДВПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ между значениями отсчетов ДПФ применяется искусственное увеличение интервала определения $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ за счет добавления нулевых отсчетов во временной области [23, 46, 49, 149]. Данную операцию назовем **операцией дополнения нулями во временной области (ОДНВ)**. Данная операция позволяет уменьшить влияние эффектов паразитной амплитудной модуляции спектра и частотола. Отметим, что ОДНВ **не улучшает разрешающую способность ДПФ по частоте**, как часто утверждается в работах по цифровой обработке сигналов, например, в [46, 149]. ОДНВ позволяет за счет уменьшения шага дискретизации по частоте **измерять взвешенное ДВПФ** между отсчетами ДПФ, а также **улучшить условия выявления и повысить точность измерения частот скрытых периодичностей**. Однако ОДНВ имеет **существенные недостатки**, проявляющиеся при ее реализации ПриС:

- необходимость существенного расширения оперативной памяти ПриС для хранения нулевых значений сигнала;

- проведение непроизводительных операций ПриС с нулевыми значениями сигнала;
- фиксированность шага дискретизации по частоте при измерении спектров.

Рассмотрим вопросы обработки ДИС на конечных интервалах во временной области (*получение временных спектров* ДИС). Введем в теорию дискретных измерений на конечных интервалах новую форму преобразования Фурье – *дискретно-частотное преобразование Фурье (ДЧПФ)*.

Пусть задана некоторая последовательность $S(k)$, $k = \overline{-\infty, +\infty}$, ДЧПФ которой определим следующим образом:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t), \text{ где } -1/2 \leq t \leq +1/2. \quad (2.6)$$

Соотношением (2.6) определяется *непрерывный временной спектр*, соответствующий дискретной последовательности $S(k)$, $k = \overline{-\infty, +\infty}$. С учетом указанных выше положений, непосредственно следует вывод о том, что ДИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ равен значениям непрерывного временного спектра, задаваемого ДЧПФ *взвешенной последовательности* $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ при значениях переменной $n = \overline{0, N-1}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t), 0 \leq t \leq 1. \quad (2.7)$$

Таким образом, исходный дискретный сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ является только одним из возможных временных спектров ДИС $x(n)$. Отсутствие же ответа на вопрос, каковы значения временного спектра, определяемого ДЧПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ между значениями переменной $n = \overline{0, N-1}$, порождает эффект, названный автором «*эффектом частотола во временной области*».

При ЦОИС на конечных интервалах временных спектров для определения значений временного спектра, задаваемого ДЧПФ *взвешенной* последовательности $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, в промежутках между значениями

$x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ применяется **искусственное увеличение интервала определения** $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ за счет добавления нулевых отсчетов в частотной области [23]. Назовем данную операцию **операцией дополнения нулями в частотной области (ОДНЧ)**. Данная операция позволяет уменьшить влияние **эффекта частотокола во временной области** на результаты дискретных измерений временных спектров. ОДНЧ позволяет за счет **уменьшения шага дискретизации во времени** измерять временные спектры, задаваемые ДЧПФ.

Однако ОДНЧ, аналогично ОДНВ, имеет следующие существенные недостатки, которые проявляются при реализации ОДНЧ:

- необходимость существенного расширения оперативной памяти для хранения нулевых значений спектра;
- проведение непроизводительных вычислений с нулевыми значениями спектра;
- фиксированность шага дискретизации по времени при измерении временного спектра.

Альтернативой методам ЦОИС на конечных интервалах, основанных на ДПФ, является цифровая фильтрация. При ЦОИС на конечных интервалах в частотной области (решение задач измерения параметров отдельных гармонических компонент и (или) их обнаружения) применение ДПФ, даже реализуемого алгоритмами БПФ, становится крайне неэффективным, так как большинство значений спектра оказываются невостребованными. Эффективным методом цифровой обработки спектров на определенных частотах является фильтр Герцеля (называемый также алгоритмом Герцеля), структуры которого приведены на рисунке 2.1 а,б. Алгоритм Герцеля позволяет получать значения спектра на определенных частотах, меняя резонансную частоту фильтра в диапазоне от $\overline{0, N/2}$. Фильтр Герцеля представляет собой фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр) второго порядка с двумя действительными коэффициентами обратной связи (слева от пунктирной линии) и

одним комплексным коэффициентом в цепи прямой связи (справа от пунктирной линии) (рисунок 2.1, а).

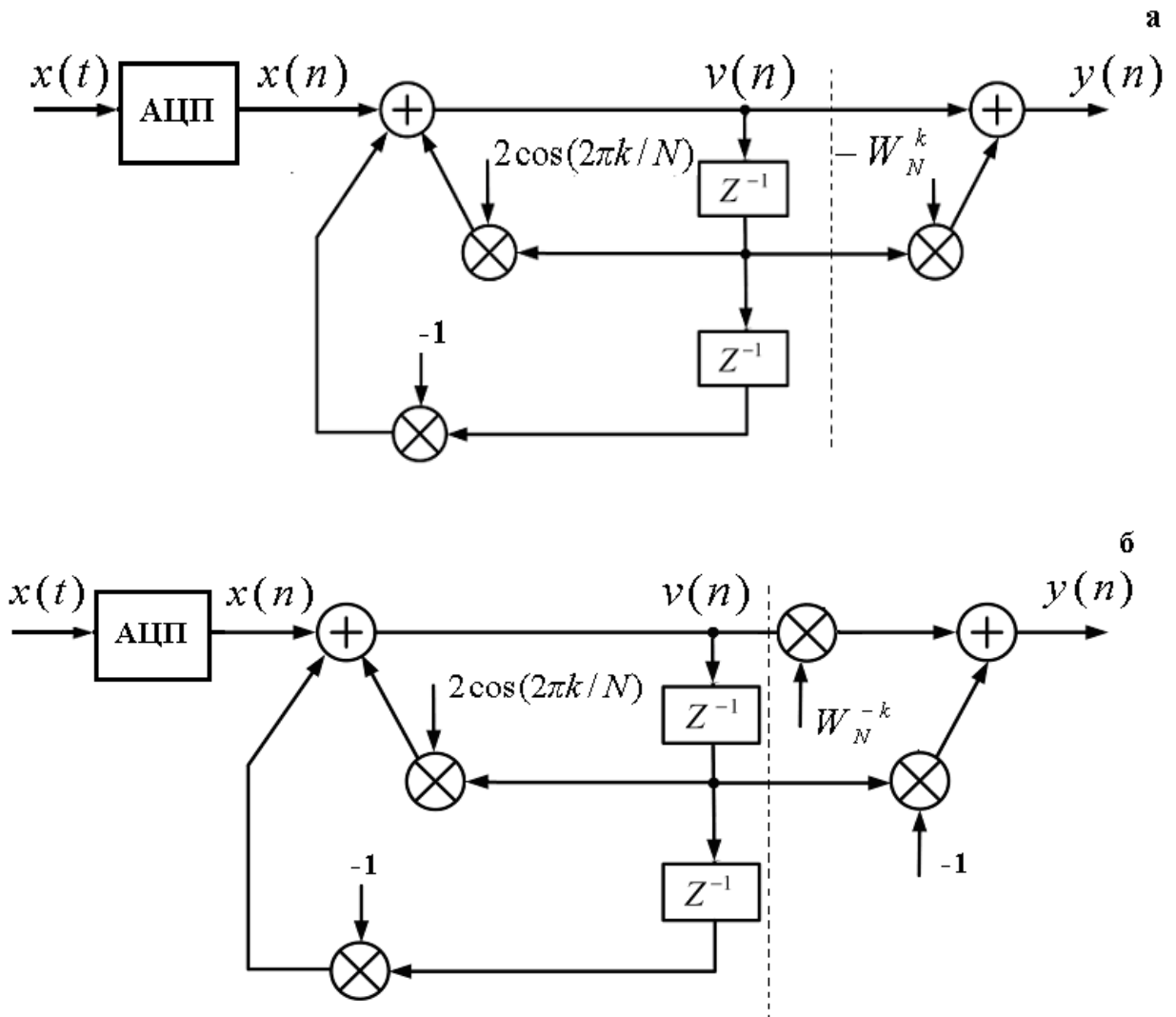


Рисунок 2.1 – Структуры БИХ-фильтров, реализующих алгоритм Герцеля

Фильтр Герцеля позволяет находить значение k -го бина N -точечного ДПФ. Сигнал на выходе фильтра Герцеля $y(n)$ (рисунок 2.1) равен значению k -го бина N -точечного ДПФ при достижении дискретной переменной n значения N . Отметим, что возможен вариант алгоритма Герцеля в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рисунке 2.1,б. Варианты отличаются друг от друга реализацией прямой цепи фильтра.

Во многих приложениях дискретных косвенных измерений приходится иметь дело с ИС, спектры которых меняются во времени. Такой частотный спектр называется *частотно-временным спектром (или скользящим спектром)*.

На практике часто возникает необходимость иметь результаты последовательных измерений спектра на определенной частоте (или на множестве определенных частот).

Метод, позволяющий проводить такие измерения, называется **скользящим спектральным измерением** и заключается в определении частотно-временного спектра сигнала на k -частоте в скользящем временном окне в N отсчетов. Временное окно называется **скользящим**, так как перед повторным спектральным измерением оно смещается во времени на один отсчет. Одним из методов проведения скользящих измерений на k -й частоте является использование одной секции обобщенного **комплексного фильтра на основе частотной выборки (ФОЧВ)** [46], которая, в свою очередь, является частным случаем структуры Лагранжа [149].

В основе ФОЧВ лежит возможность реализации КИХ-фильтра с N ответвлениями в виде последовательного соединения гребенчатого фильтра и банка из N комплексных резонаторов, одна секция которого приведена на рисунок 2.2 [46].

ФОЧВ позволяет эффективно осуществлять скользящие спектральные измерения на **фиксированном множестве частот**:

$$\{2\pi k/N\}, k = \overline{0, N-1}; \quad (2.8)$$

где N – число отсчетов сигнала задержки входной последовательности $x(n)$ в гребенчатом фильтре.

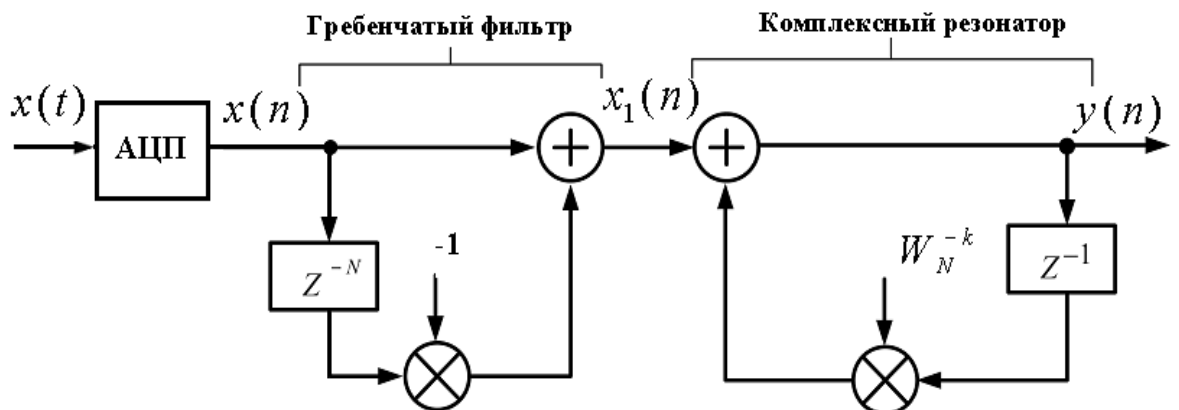


Рисунок 2.2 – Одна секция комплексного ФОЧВ

Скользящие спектральные измерения на k -й частоте могут естественно осуществляться и методом ДПФ (вычисление k -го бина ДПФ) в скользящем окне длительностью в N отсчетов (r – число отсчетов, на которое сдвигается окно в N отсчетов вправо по сигналу $x(n)$):

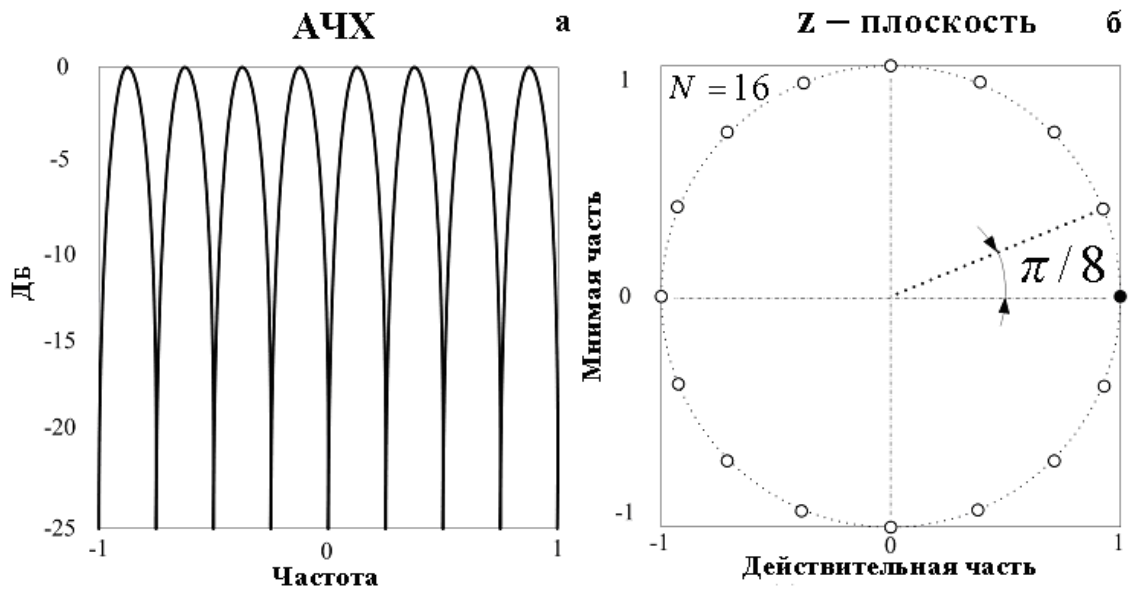
$$S_N^{(k)}(r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r) W_N^{kn}; k = \overline{0, N-1}, r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Однако проведение скользящих измерений на k -й частоте фильтром на основе частотной выборки (рисунок 2.2) более эффективно, чем методом ДПФ (2.9). Это связано с тем, что структура ФОЧВ, в отличие от ДПФ, дает возможность использовать метод *рекуррентного получения* результатов измерения спектра на выходе комплексного резонатора. Действительно, из анализа структуры секции ФОЧВ (рисунок 2.2) непосредственно следует, что в этом случае для выполнения скользящего спектрального измерения на k -й частоте необходимо выполнить всего два комплексных умножения на входной отсчет (при выполнении ДПФ необходимо выполнить N комплексных умножений).

Общим недостатком рассмотренных методов обработки является *фиксированность множества частот*, на которых можно осуществлять скользящие спектральные измерения (2.8).

В первом случае это связано с фундаментальным свойством *амплитудно-частотной характеристики* (АХЧ) гребенчатого фильтра, которая имеет N нулей $-\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$, равномерно распределенных на единичной окружности в z -плоскости с шагом $\frac{2\pi}{N}$. На рисунке 2.3 приведено расположение в z -плоскости на единичной окружности нулей АЧХ (передаточной функции) гребенчатого фильтра при $N=16$ (при $k=0$ нуль зачернен).

В связи с тем, что полюс комплексного резонатора *должен совпадать с одним из нулей* АЧХ гребенчатого фильтра, *набор частот*, на которых могут быть проведены скользящие спектральные измерения, оказывается фиксированным.



а – АЧХ; б – распределение нулей

Рисунок 2.3 – Характеристики гребенчатого фильтра

Кроме того, структура фильтра с частотной выборкой имеет ещё один недостаток. Выполнение косвенных измерений с конечной точностью при реализации комплексного резонатора приводит к тому, что не удастся полностью скомпенсировать нули передаточной функции гребенчатого фильтра полюсами. В результате фильтр ФОВБ будет иметь и нули и полюса, длина его импульсной функции становится *неограниченной* [46, 149], а фильтр *становится неустойчивым*.

В работах [17–19] для борьбы с этим недостатком предложена *модификация метода частотной выборки*. Идея предлагаемой модификации заключается в следующем. В структуре, приведенной на рисунке 2.2, между гребенчатым фильтром и комплексным резонатором дополнительно применяется процедура *трансформации спектра сигнала*. Трансформация осуществляется стандартным методом – *умножением сигнала на экспоненциальную функцию* $\exp(j \frac{2\pi}{N})$. Действительно, при этом проблема точности представления весовых коэффициентов отчасти снимается, но появляется другая проблема, связанная с необходимостью увеличения оперативной памяти ПриС для хранения промежуточных переменных.

В [46] предложен метод однобинового скользящего ДПФ (СДПФ), который позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ из скользящего окна в N отсчетов. Предлагаемый алгоритм более эффективен (с точки зрения вычислений), чем алгоритм Герцеля. В результате появляется возможность проводить спектральные измерения с той же частотой, с какой приходят входные отсчеты. Разностное уравнение СДПФ имеет вид [46]:

$$S_N^k(n) = W_N^{-k} [S_N^k(n-1) + x(n) - x(n-N)]; \quad (2.10)$$

где $S_N^k(n)$ – значение k -го бина N -точечного ДПФ в момент времени n .

Реализация соотношения (2.10) приводит к КИХ-фильтру, структура которого приведена на рисунке 2.4.

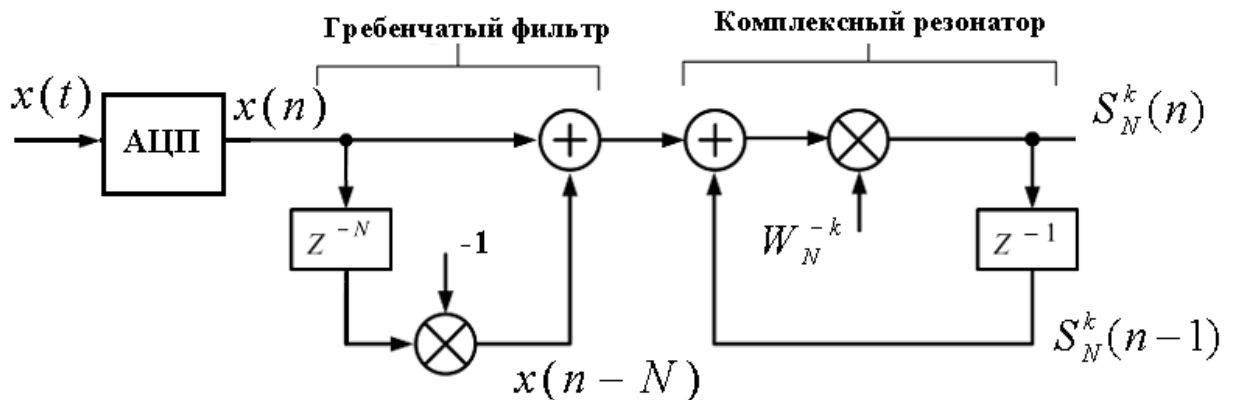


Рисунок 2.4 – Структура КИХ-фильтра однобинового скользящего ДПФ

Сравнивая структуры фильтров, приведенных на рисунках 2.2 и 2.4, нетрудно видеть их эквивалентность (их некоторые отличия объясняются различиями в методике вывода, проведенного на основе либо метода частотной выборки (рисунок 2.2), либо метода ДПФ (рисунок 2.4)). При этом обе структуры фильтров обладают одним **общим недостатком**: они позволяют измерять непрерывный спектр (задаваемый ДВПФ) только на частотах (или подмножестве частот) из **фиксированного множества частот**, определяемых соотношением (2.8). Таким образом, метод СДПФ, разработанный в [46], имеет тот же недостаток, что и рассмотренные выше методы.

Необходимо отметить, что указанное свойство рассмотренных методов скользящих спектральных измерений существенно ограничивает их практическое применение в ЦОИС.

2.2. Параметрическое дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим видоизменение базиса ДЭФ в результате применения операции дополнения нулями во временной области – ОДНВ. Пусть дискретный информационный сигнал (ДИС) $x(n)$, $n = \overline{0, M-1}$, содержит $N(r-1)/r$ нулей, где $N/r = M$ – целое число. Представим такой в виде вектора:

$$X_N = \left[x(0), x(1), \dots, x(M-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{N(r-1)/r} \right]^T.$$

Вычисление ДПФ X_N , согласно (1.5), равносильно усечению $N(r-1)/r$ столбцов матрицы F_N , т.е. превращению ее из **квадратной матрицы** в **прямоугольную**:

$$F_{N \times M} = \begin{matrix} & 0 & & & (M-1) \\ & \cdot & & & \cdot \\ & 1 & & & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot \\ & 1 & W_M^{(N-1)/r} & & W_M^{((N-1)/r)(M-1)} \end{matrix} \left[\begin{matrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & (M-1) \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_M^{(N-1)/r} & \cdot & \cdot & W_M^{((N-1)/r)(M-1)} \end{matrix} \right]^n,$$

$$W_M = \exp(-j2\pi/M). \tag{2.11}$$

Проанализируем структуру матрицы $F_{N \times M}$. Обозначим множество номеров строк матрицы $F_{N \times M}$ через $A: A = \{ 0, 1, 2, \dots, (N-1) \}$. Применим к множеству A отношение сравнимости по модулю r . В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами **рефлексивности**, **симметричности и транзитивности**, оно разбивает множество A на r классов вычетов по модулю r :

2. ДЭФ-П являются **периодическими функциями** по переменной k и **параметрическими периодическими функциями** по переменной n с периодом N :

$$\begin{aligned} def_p(k \pm pN, n, \theta) &= def_p(k, n, \theta), \\ def_p(k, n \pm pN, \theta) &= def_p(k, n, \theta) W_N^{\pm \theta \cdot N \cdot p}. \end{aligned}$$

3. Система ДЭФ-П **не мультипликативна по переменной k** :

$$def_p(k, n, \theta) def_p(l, n, \theta) \neq def_p((k+l), n, \theta), \quad k, l = \overline{0, N-1}; \quad k \neq l,$$

и **мультипликативна по переменной n** :

$$def_p(k, n, \theta) def_p(k, m, \theta) = def_p(k, (n+m), \theta), \quad n, m = \overline{0, N-1}; \quad n \neq m.$$

4. Среднее значение ДЭФ-П

по переменной k равно нулю при $n \neq 0$;

$$\sum_{k=0}^{N-1} def_p(k, n, \theta) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \theta n\right) \frac{1 - \exp(-j2\pi n)}{1 - \exp(-j \frac{2\pi}{N} n)},$$

а по переменной n не равно нулю:

$$\sum_{n=0}^{N-1} def_p(k, n, \theta) = \frac{1 - \exp(-j2\pi n(k+\theta))}{1 - \exp(-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta))}.$$

5. Система ДЭФ-П ортогональна по обоим переменным:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k+\theta)n} [W_N^{(l+\theta)n}]^* &= \frac{1 - W_N^{-(k-l)N}}{1 - W_N^{-(k-l)}} = \begin{cases} N, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \\ \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(k+\theta)n} [W_N^{(k+\theta)m}]^* &= \frac{1 - W_N^{-(m-n)N}}{1 - W_N^{-(m-n)}} = \begin{cases} N, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

6. Система ДЭФ-П является **полной системой**, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

Разложение по базисной системе ДЭФ-П назовем **параметрическим дискретным преобразованием Фурье (ДПФ-П)**, которое определяется в матричной форме следующим соотношением:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N; \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (2.15)$$

$$\text{где } F_{N,\theta} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{array} \right] \\ k \end{array},$$

или в алгебраической форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1}; \quad (2.16)$$

Существует обратное ДПФ-П (ОДПФ-П), которое в алгебраической форме определяется следующим соотношением:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (2.17)$$

или в матричной форме:

$$X_N = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (2.18)$$

$$\text{где } F_{N,\theta}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & \dots & (N-1) & k \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_N^{-\theta} & W_N^{-(1+\theta)} & \dots & W_N^{-(N-1+\theta)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_N^{(N-1)\theta} & W_N^{-(N-1)(1+\theta)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1+\theta)} \end{array} \right] \\ n \end{array}.$$

Докажем, что (2.17) действительно обратное преобразование по отношению к (2.15).

Доказательство теоремы существования ОДПФ-П.

Умножим левую и правую части равенства (2.16) на $W_N^{-(k+\theta)m}$ и просуммируем результат по k :

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n} W_N^{-(k+\theta)m},$$

или

$$\sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)m} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-\theta(m-n)} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(m-n)k}.$$

С учетом ортогональности функций ДЭФ-П окончательно получим:

$$x(m) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)m}, \quad m = \overline{0, N-1},$$

что совпадает с (2.17).

Матрица сдвигов исходного сигнала X_N , в случае применения ДПФ-П, является *параметрической циркулянтной матрицей* и определяется следующим выражением:

$$\tilde{N}_\theta = \begin{matrix} & & & & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & (N-1) \\ & 0 & & & x(0) & x(1) & \cdot & \cdot & \cdot & x(N-1) \\ & 1 & & & x(N-1)W_N^{N\theta} & x(0) & \cdot & \cdot & \cdot & x(N-2) \\ & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1) & & & & x(1)W_N^{N\theta} & x(2)W_N^{N\theta} & \cdot & \cdot & \cdot & x(0) \end{matrix} \cdot \quad (2.20)$$

Если использовать квадратную матрицу размерности N *параметрического сдвига*:

$$M_\theta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ e^{-j2\pi\theta} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

то выражение (2.20) можно представить следующим образом:

$$\tilde{N}_\theta = \begin{bmatrix} X_N^T M_\theta^0 \\ X_N^T M_\theta^1 \\ \cdot \\ X_N^T M_\theta^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

где M_θ^0 – единичная матрица,

$M_\theta^k, k = \overline{1, N-1}$ – обозначает возведение в степень k матрицы M_θ .

Как уже отмечалось, широкое применение ДПФ для анализа дискретных случайных сигналов во многом объясняется тем, что энергетический спектр N -периодической последовательности $x(n \pm N) = x(n); n = \overline{0, N-1}$ **инвариантен временному сдвигу**. Используя метод собственных преобразований, покажем, что ДПФ-П является **собственным преобразованием параметрической циркулянтной матрицы C_θ** (2.20).

Теорема.

ДПФ-П является собственным преобразованием параметрической циркулянтной матрицы C_θ :

$$F_{N,\theta} C_\theta F_{N,\theta}^{-1} = \text{diag} S_{N,\theta}^*,$$

где * – символ комплексного сопряжения.

Доказательство.

Обозначим через r_i корень скалярного уравнения $r^N = \exp(-j2\pi\theta)$. Поскольку данное уравнение имеет N различных корней, получим N собственных векторов:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ r_0 & r_1 & \cdot & \cdot & r_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_0^{N-1} & r_1^{N-1} & \cdot & \cdot & r_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad r_i = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(i + \theta)\right]. \quad (2.23)$$

Учитывая, что $R = (F_{N,\theta}^T)$, получим:

$$\left[R^{-1} C_{\theta} R \right]^* = F_{N,\theta} C_{\theta} (F_{N,\theta}^{-1}) = \text{diag} S_{N,\theta}^*.$$

Терема доказана.

Следствие 1. ДПФ является собственным преобразованием циркулянтной матрицы C_{θ} :

$$F_N C_{\theta} F_N^{-1} = \text{diag} S_N^*$$

Это следует из того, что при $\theta=0$ ДПФ-П переходит в ДПФ, а параметрическая циркулянтная матрица задает циклический сдвиг последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$.

Следствие 2. Энергетический спектр параметрической N -периодической последовательности *инвариантен к ее временному сдвигу*:

$$G_N(k, \theta) = N |S_N(k, \theta)|^2,$$

где $S_N(k, \theta)$ – коэффициенты ДПФ-П параметрической N -периодической последовательности:

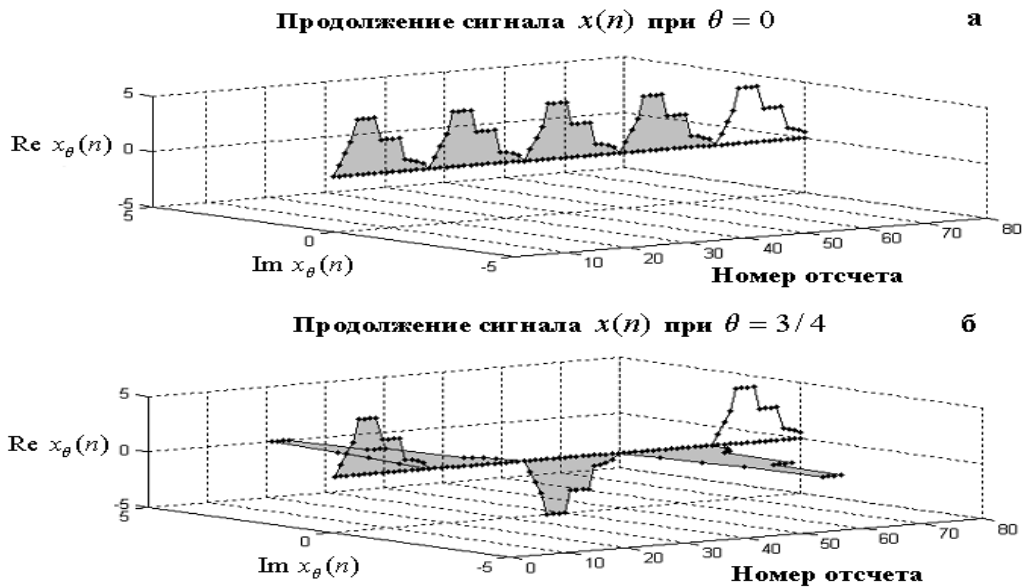
$$x_{\theta}(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}, \quad (2.24)$$

где $\text{ent} [\cdot]$ – символ взятия целой части.

В частном случае, при $\theta = 1/2$ приходим к еще одному *новому виду решетчатой функции* – *понятию N -антипериодической решетчатой функции*:

$$x_{1/2}(n+N) = -x_{1/2}(n). \quad (2.25)$$

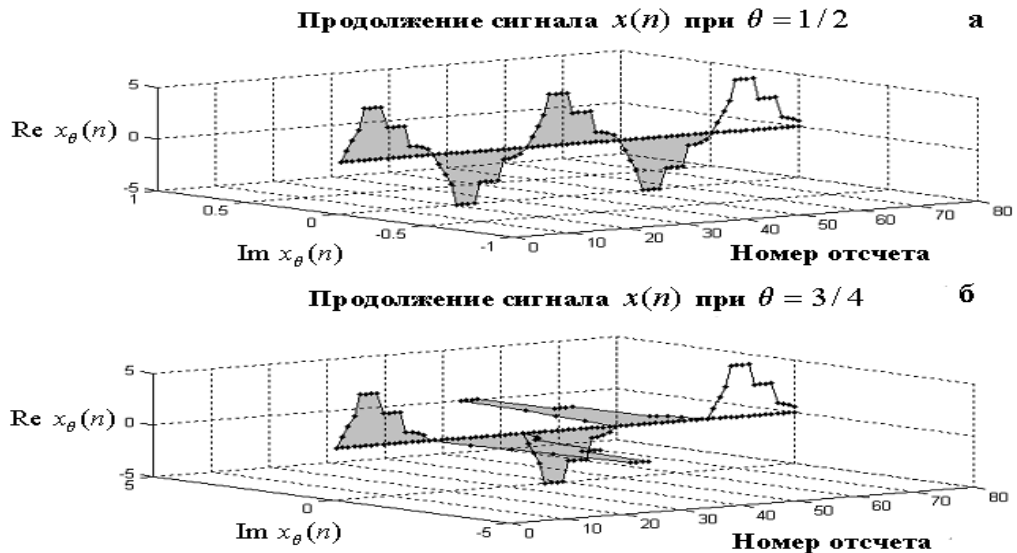
Отметим, что продолжение действительного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, «навязываемое» ДПФ-П ДИС $x(n)$ (продолжение задается матрицей C_{θ}), при значении параметра $\theta \neq 0, 1/2$ является *комплекснозначным сигналом* (рисунок 2.5, рисунок 2.6).



$N = 16$, а – $\theta = 0$; б – $\theta = 1/4$.

Рисунок 2.5 – Параметрическая N -периодическая последовательность

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}$$



$N = 16$, а – $\theta = 1/2$; б – $\theta = 3/4$.

Рисунок 2.6 – Параметрическая N -периодическая последовательность

$$x_\theta(n) = x(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}, \quad N = 16, \text{ а – } \theta = 1/2; \text{ б – } \theta = 3/4$$

Докажем, что для ДПФ-П справедливы теоремы линейности, сдвига, корреляции и Парсеваля. Введем символические обозначения для ДПФ-П и ОДПФ-П, определяемые соответственно соотношениями (2.16) (2.17) и $x_\theta(n)$ соотношением (2.24):

$$x_\theta(n) \Leftrightarrow S_N(k, \theta).$$

Теорема линейности.

ДПФ-П линейно по определению. Действительно, если

$$x_\theta(n) \Leftrightarrow S_N(k, \theta) \text{ и } y_\theta(n) \Leftrightarrow Q_N(k, \theta),$$

$$\text{то } \lambda_1 \cdot x_\theta(n) + \lambda_2 \cdot y_\theta(n) = \lambda_1 \cdot S_N(k, \theta) + \lambda_2 \cdot Q_N(k, \theta)$$

Теорема сдвига.

$$\text{Если } x_\theta(n) \Leftrightarrow S_N(k, \theta), \text{ то } x_\theta(n+m) \Leftrightarrow W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k, \theta),$$

Доказательство.

Обозначим $W^{-(k+\theta)m} S_N(k, \theta)$ через $S_{m,N}(k, \theta)$. ДПФ параметрической N -периодической последовательности равно:

$$S_{m,N}(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_\theta(n+m) \cdot W_N^{(k+\theta)n}.$$

Положим $m+n=l$, тогда:

$$S_{m,N}(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{l=m}^{N+m-1} x_\theta(n+m) \cdot W_N^{(k+\theta)(l-m)} = W_N^{-(k+\theta)m} \cdot \frac{1}{N} \sum_{l=m}^{N+m-1} x_\theta(l) \cdot W_N^{(k+\theta)l}.$$

Используя свойства ДЭФ-П, несложно установить справедливость следующих соотношений:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=m}^p x_\theta(n) \cdot W_N^{(k+\theta)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_\theta(n) \cdot W_N^{(k+\theta)n}; |p-m| = N-1$$

$$\sum_{k=m}^p S_N(k, \theta) \cdot W_N^{-(k+\theta)n} = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) \cdot W_N^{-(k+\theta)n}; |p-m| = N-1.$$

С учетом этих соотношений получим:

$$x_\theta(n+m) \Leftrightarrow W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k, \theta);$$

аналогично:

$$x_\theta(n-m) \Leftrightarrow W_N^{(k+\theta)m} S_N(k, \theta).$$

Теорема корреляции.

Если:

$$x_\theta(n) \Leftrightarrow S_N(k, \theta) \text{ и } y_\theta(n) \Leftrightarrow Q_N(k, \theta),$$

то ДПФ-П круговой (циклической) корреляции, определяемой соотношением:

$$z_{\theta}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_{\theta}(m) \cdot y_{\theta}(n+m);$$

равно:

$$U_N(k, \theta) = S_N^*(k, \theta) Q_N(k, \theta); \text{ где } z_{\theta}(n) \Leftrightarrow U_N(k, \theta).$$

Доказательство.

ДПФ-П последовательности $z_{\theta}(n)$ равно:

$$U_N(k, \theta) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} x_{\theta}(m) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y_{\theta}(n+m) \cdot W_N^{(k+\theta)n}.$$

Из теоремы сдвига следует, что:

$$U_N(k, \theta) = Q_N(k, N) \cdot \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_{\theta}(m) \cdot W_N^{-(k+\theta)m};$$

Или

$$U_N(k, \theta) = S_N^*(k, \theta) Q_N(k, \theta).$$

Теорема Парсеваля.

$$\text{Если } x_{\theta}(n) \Leftrightarrow S_N(k, \theta), \text{ то } \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{\theta}^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |S_N(k, \theta)|^2.$$

Доказательство.

Справедливость теоремы Парсеваля для ДПФ-П непосредственно следует из теоремы корреляции. Действительно, если положить $x_{\theta}(n) = y_{\theta}(n)$, то:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_{\theta}(m) \cdot x_{\theta}(n+m) = \sum_{k=0}^{N-1} |S_N(k, \theta)|^2 \cdot W_N^{-(k+\theta)m},$$

откуда при $m=0$ следует:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{\theta}^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |S_N(k, \theta)|^2.$$

Сделаем ряд выводов относительно ДПФ-П, которые непосредственно следуют из полученных выше результатов.

1. Разложение дискретного сигнала X_N в базисе параметрических экспоненциальных функций согласно соотношению (2.17), при каждом значении

θ осуществляется в своем, определенном параметром θ базисе. При этом значение параметра θ может быть любым из интервала $[0,1)$ (в том числе и *иррациональным*), а не только тем, которое определяется соотношением (2.13).

2. Рисунки 2.5 и 2.6 позволяют проиллюстрировать еще один аспект взаимосвязи ДПФ-П ДИС, заданного на конечном интервале, с ДПФ ДИС, подвергнутого ОДНВ. Сигнал X_N , заданный на интервале $\overline{0, N-1}$ и дополненный нулевыми отсчетами, число которых равно $N(r-1)$, может быть представлен в виде суммы параметрических N -периодических функций:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{r-1} x_i(n) = \sum_{i=0}^{r-1} x_{\theta}(n) \Big|_{\theta=i\frac{1}{r}} \cdot \quad (2.26)$$

где $x_{\theta}(n)$ – задается формулой (2.24).

3. При обработке ДИС можно также рассматривать сдвиг матрицей параметрического сдвига (2.20) собственно базиса ДЭФ-П. При этом параметрические дискретные экспоненциальные функции при любом θ «отследят» все значения экспоненциальных дискретных функций, заданных матрицей X_N (1.7), размерность которой учитывает дополнение исходного сигнала нулевыми отсчетами (соотношение (2.11)).

2.3. Модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье

При решении задачи обработки временных спектров ДИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ при значениях переменной n , отличных от множества $\{n = \overline{0, N-1}\}$, применяют, как отмечалось выше, операцию дополнения нулями в частотной области (ОДНЧ). Рассмотрим изменение базиса ОДПФ в результате применения операции дополнения нулями в частотной области.

Необходимо отметить, что, в отличие от ОДНВ, ОДНЧ имеет различия для *действительнозначных* (действительных) и *комплекснозначных* (комплексных) ИС. Кроме того, имеется специфика дополнения частотного спектра нулевыми

отсчетами действительных ИС в зависимости от *четности* или *нечетности* значения N .

Согласно (1.6), обратное ДПФ (ОДПФ) в матричной форме задается следующим выражением:

$$X_N = F_N^* S_N, (2.27)$$

где $*$ – знак комплексного сопряжения,

$X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования;

$S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе ДЭФ, задаваемой матрицей F_N (1.7):

$$F_N^* = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \dots & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \dots & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} & \dots & \dots \end{matrix}. \quad (2.28)$$

k

Пусть спектр *действительного* ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, $S_{N,r}$ содержит $N(r-1)$ нулей:

$$S_{N,r} = [s(0), \dots, s(N/2-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{N(r-1)}, s(N/2), \dots, s(N-1)]^T. \quad (2.29)$$

Выполнение согласно (2.27) измерительного преобразования ОДПФ спектра $S_{N,r}$ приводит к усечению средних столбцов матрицы $F_{N,r}^*$ и превращению ее из квадратной матрицы в прямоугольную матрицу:

$$H_{Nr \times N}^* = \begin{matrix} & 0 & 1 & \cdot & N/2-1 & & N/2 & \cdot & N-1 & k \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Nr-1 \\ n \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdot & 1 & & 1 \\ 1 & W_N^{-1/r} & \cdot & W_N^{-(N/2-1)/r} & W_N^{-(N/2+N(r-1))/r} & W_N^{-(N-1+N(r-1))/r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{-(Nr-1)/r} & \cdot & W_N^{-(Nr-1)(N/2-1)/r} & W_N^{-(N/2+N(r-1))(Nr-1)/r} & W_N^{-(N-1+N(r-1))(Nr-1)/r} \end{array} \right] \cdot \end{matrix} \quad (2.30)$$

Обозначим множество номеров строк матрицы $H_{Nr \times N}^*$ через $B: B = \{0, 1, 2, \dots, (Nr-1)\}$. Применим к множеству B *отношение сравнимости по модулю r* . В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности*, оно разбивает множество B на r классов вычетов по модулю r :

$$\begin{aligned} B_0 &= \{0, r, \dots, r(N-1)\}; \\ &\dots\dots\dots \\ B_{r-1} &= \{r-1, r+(r-1), \dots, r(N-1)+(r-1)\}; \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$B_i \neq \emptyset; \quad B_i \cap B_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^{r-1} B_i = B.$$

Используя полученное разбиение, представим матрицу $H_{Nr \times N}^*$ в виде r квадратных матриц, размерность каждой из которых N , номера строк являются классами вычетов по модулю r , а элементы соответствующих строк равны элементам матрицы $H_{Nr \times N}^*$:

$$D_{N, \xi}^* = \begin{matrix} & 0 & 1 & \cdot & N/2-1 & & N/2 & \cdot & N-1 & k \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ N-1 \\ n \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & W_N^{-\xi} & \cdot & W_N^{-\xi(N/2-1)} & W_N^{-\xi(N/2)} \cdot c_0 & W_N^{-\xi(N-1)} \cdot c_0 \\ 1 & W_N^{-(1+\xi)} & \cdot & W_N^{-(1+\xi)(N/2-1)} & W_N^{-(1+\xi)(N/2)} \cdot c_1 & W_N^{-(1+\xi)(N-1)} \cdot c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W_N^{-(N-1+\xi)} & \cdot & W_N^{-(N-1+\xi)(N/2-1)} & W_N^{-(N-1+\xi)(N/2)} \cdot c_{(N-1)} & W_N^{-(N-1+\xi)(N-1)} \cdot c_{(N-1)} \end{array} \right] \cdot \end{matrix} \quad (2.32)$$

$$\text{где } \xi = 0, 1/r, \dots, (r-1)/r; \quad c_i = W_N^{-(i+\xi) \cdot N \cdot (r-1)}; \quad k, n, i = \overline{0, (N-1)}.$$

Учитывая свойство N -периодичности ДЭФ, несложно установить, что:

$$c_i = C = W_N^{-N \cdot (r-1) \cdot \xi} \text{ для } \forall i \in \overline{0, N-1}. \quad (2.33)$$

Следовательно, умножая предварительно вторую половину спектра S_N действительного измерительного сигнала $x(n)$ $n = \overline{0, N-1}$, где $S_N = [s(0), \dots, s(N/2-1), s(N/2), \dots, s(N-1)]^T$, на поворачивающий множитель C , матрицу $D_{N,\xi}^*$ можно представить в общем виде:

$$F_{N,\xi} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & N/2-1 & \dots & N-1 & k \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ N-1 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & W_N^{-\xi} & \dots & W_N^{-\xi(N/2-1)} & \dots & W_N^{-\xi(N-1)} \\ 1 & W_N^{-(1+\xi)} & \dots & W_N^{-(1+\xi)(N/2-1)} & \dots & W_N^{-(1+\xi)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1+\xi)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi)(N/2-1)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi)(N-1)} \end{array} \right] & , & (2.34) \\ n & & & & & & & \end{matrix}$$

где $\xi = 0, 1/r, \dots, (r-1)/r$; $k, n = \overline{0, (N-1)}$.

Дискретные функции (строки матрицы $F_{N,\xi}$) вида:

$$def_{pM}(k, n, \xi) = W_N^{-k(n+\xi)} = \exp\left[+j \frac{2\pi}{N} k(n+\xi) \right], k, n = \overline{0, (N-1)}, 0 \leq \xi < 0, \quad (2.35)$$

назовем **модифицированными параметрическими дискретными экспоненциальными функциями** (МДЭФ-П).

Основные свойства МДЭФ-П.

1. МДЭФ-П, как и ДЭФ-П, не являются функциями двух равноправных переменных k и n . Следовательно, матрица МДЭФ-П F_N **асимметрична**;
2. МДЭФ-П являются **периодическими** по переменной n и **параметрически периодическими по переменной k** с периодом N :

$$\begin{aligned} def_{pM}(k, (n \pm pN), \xi) &= def_{pM}(k, n, \xi), \\ def_{pM}((k \pm pN), n, \xi) &= def_{pM}(k, n, \xi) W_N^{\pm \xi \cdot N \cdot p}; \end{aligned}$$

3. система МДЭФ-П

не мультипликативна по переменной n :

$$def_{pM}(k, n, \xi) def_{pM}(k, m, \xi) \neq def_{pM}(k, (n+m), \xi), n, m = \overline{0, N-1}; n \neq m;$$

и мультипликативна по переменной k :

$$def_{pM}(k, n, \xi) def_{pM}(l, n, \xi) = def_{pM}((k+l), n, \xi), \quad k, l = \overline{0, N-1}; \quad k \neq l;$$

4. среднее значение МДЭФ-П

по переменной n равно нулю при $k \neq 0$;

$$\sum_{n=0}^{N-1} def_{pM}(k, n, \xi) = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \xi k\right) \frac{1 - \exp(-j2\pi k)}{1 - \exp(-j \frac{2\pi}{N} k)},$$

а по переменной k не равно нулю:

$$\sum_{k=0}^{N-1} def_{pM}(k, n, \xi) = \frac{1 - \exp(-j2\pi k(n + \xi))}{1 - \exp(-j \frac{2\pi}{N} (n + \xi))}$$

5. система МДЭФ-П ортогональна по обоим переменным:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(n+\xi)k} [W_N^{-(m+\xi)k}]^* = \frac{1 - W_N^{-(n-m)N}}{1 - W_N^{-(n-m)}} = \begin{cases} N, & n = m; \\ 0, & n \neq m; \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-(n+\xi)k} [W_N^{-(n+\xi)l}]^* = \frac{1 - W_N^{-(l-k)N}}{1 - W_N^{-(l-k)}} = \begin{cases} N, & l = k; \\ 0, & l \neq k; \end{cases}$$

6. система МДЭФ-П является **полной системой**, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

Разложение по базисной системе МДЭФ-П назовем **модифицированным параметрическим дискретным преобразованием Фурье** (МДПФ-П), которое определяется

в матричной форме следующим соотношением:

$$X_{N,\xi} = \frac{1}{N} F_{N,\xi} S_N, \quad 0 \leq \xi < 1; \quad (2.36)$$

где S_N определяется согласно формуле (1.4).

или **в алгебраической форме** следующим выражением:

$$x(n, \xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-k(n+\xi)}; \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.37)$$

где $S_N(k)$ определяется согласно формуле (1.2).

Существует обратное МДПФ-П (ОМДПФ-П), которое определяется в **алгебраической форме** следующим соотношением:

$$S_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n, \xi) W_N^{k(n+\xi)}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \xi < 1; \quad (2.38)$$

или в *матричной форме* следующей формулой:

$$S_N = F_{N, \xi} X_{N, \xi}, \quad 0 \leq \xi < 1, \quad (2.39)$$

$$\text{где } F_{N, \xi}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_N^{-\xi} & W_N^{-(1+\xi)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1+\xi)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ W_N^{(N-1)\xi} & W_N^{-(N-1)(1+\xi)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1+\xi)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (2.40)$$

Докажем, что (2.38) действительно обратное преобразование по отношению к (2.37).

Доказательство.

Умножим левую и правую части равенства (2.38) на $W_N^{l(n+\xi)}$ и просуммируем результат по n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{l(n+\xi)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(n, \xi) W_N^{-k(n+\xi)} W_N^{l(n+\xi)},$$

или

$$\sum_{n=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{l(n+\xi)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n, \xi) W_N^{-\xi(l-k)} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-(l-k)n}.$$

С учетом ортогональности функций МДЭФ-Почему, окончательно получим:

$$S_N(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n, \xi) W_N^{l(n+\xi)}, \quad l = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \xi < 1. \quad (2.41)$$

что совпадает с (2.38).

2.4. Методы и алгоритмы цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье

В разделах 2.2 и 2.3 настоящей главы разработаны теоретические основы обработки на конечных интервалах ДИС в частотной (раздел 2.2) и временной (раздел 2.3) областях. Действительно, изменяя параметр θ в ДПФ-П (2.15), мы имеем возможность находить значения непрерывного частотного спектра ДИС $x(n)$, задаваемого взвешенным ДВПФ, в дискретном множестве частот $\frac{2\pi}{N}(k + \theta)$; $k = \overline{0, N-1}$, $0 \leq \theta < 0$.

Рассмотрим пример. Пусть задан гармонический сигнал с частотой $k = 14,3$ и ставится задача измерения его частоты (так называемая *задача локализации спектральных пиков* [46]). Нетрудно видеть, что при использовании ДПФ (даже с применением ОДНВ) невозможно «совместить» сетку частот фильтров ДПФ с частотой гармонической компоненты, так как увеличение интервала анализа за счет дополнения исходного сигнала нулевыми отсчетами позволяет изменять интервал между отсчетами лишь в кратное число раз. В то же время, с помощью ДПФ-П задача локализации спектральных пиков решается вариацией параметра θ (рисунок 2.7, а, б, в).

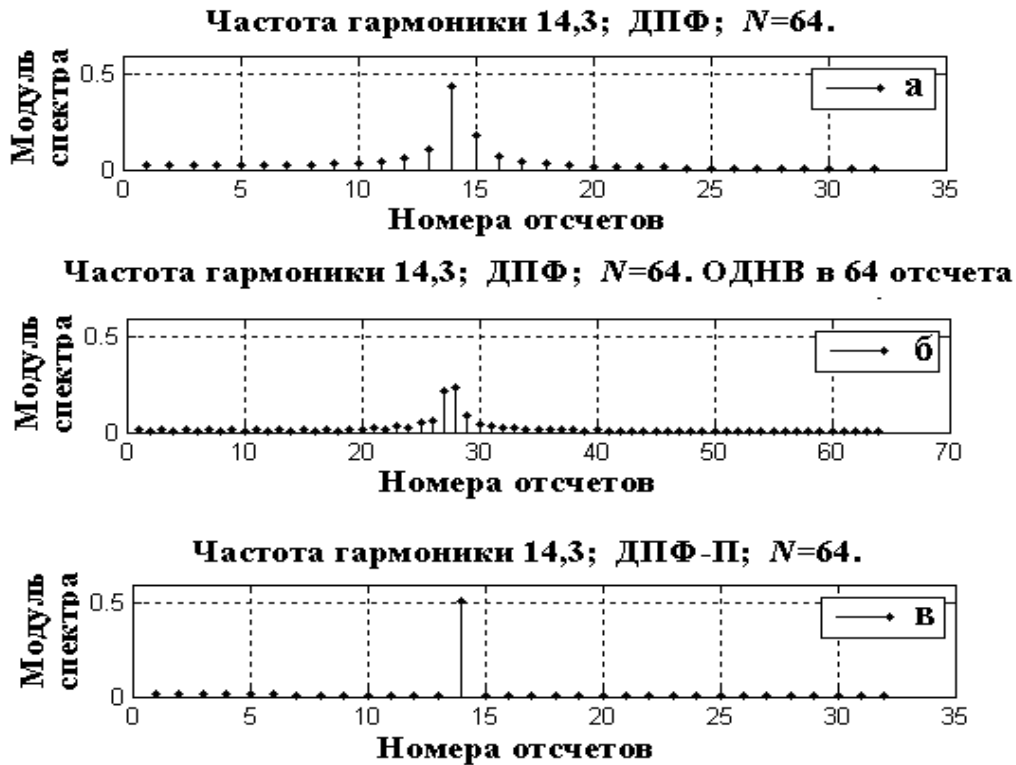
Специфика обработки взвешенного ДВПФ действительного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ проявляется при изменении параметра θ . Поясним сказанное.

При внимательном изучении соотношений (2.15) и (2.16) можно сделать несколько важных выводов.

1. ДПФ (ДПФ-П при $\theta = 0$) $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ действительной последовательности $x(n)$, строго говоря, определяется не $N/2$ отсчетами, как нередко утверждается в монографиях по спектральному анализу (см. например [9, 46, 149]), а $(N/2 + 1)$ отсчетами;

2. Комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов ДПФ (ДПФ-П при $\theta = 0$) действительной последовательности при четном N имеет место не для всех отсчетов ДПФ. Два отсчета спектра $S_N(0)$ и $S_N(N/2)$ не обладают этим свойством (при нечетном N – один отсчет спектра $S_N(0)$).

Кроме того, эти отсчеты (или этот отсчет) являются чисто действительными величинами.



Методы: а – ДПФ; б – ДПФ + ОДНВ; в – ДПФ-II

Рисунок 2.7 – Измерение частоты гармонического сигнала

3. При значении параметра $\theta = 1/2$ все коэффициенты ДПФ-II обладают свойством комплексно-сопряженной симметрии:

$$S_N(k, 1/2) = S_N^*((N-1-k), 1/2); k = \overline{0, N/2-1}. \quad (2.42)$$

Таким образом, обработку непрерывного частотного спектра ДИС $x(n)$, задаваемого взвешенным ДВПФ, методом ДПФ-II при значении параметра $\theta = 0$ достаточно проводить в дискретном множестве частот $\frac{2\pi}{N}k$; $k = \overline{0, N/2}$, а при значении параметра $\theta = 1/2$ – в дискретном множестве частот $\frac{2\pi}{N}(k+1/2)$; $k = \overline{0, N/2-1}$. Другие дискретные значения непрерывного частотного спектра сигнала $x(n)$ при значениях параметра $\theta = 0, 1/2$ оказываются *избыточными*.

Рассмотрим специфику обработки частотного спектра *действительного сигнала* $x(n)$ методом ДПФ-П при значении параметра $\theta \neq 0, 1/2$. Исследования, проведенные автором настоящей работы, выявили еще одно *фундаментальное свойство* ДПФ-П. Спектр действительного сигнала, полученный методом ДПФ-П, при значении параметра $\theta \neq 0, 1/2$ не обладает *свойством комплексно-сопряженной симметрии*. Другими словами соотношение (2.42) в этом случае не соблюдается. Однако ДПФ-П действительных последовательностей при $\theta \neq 0, 1/2$ обладает одним уникальным свойством, которое автор назвал *перекрестной комплексно-сопряженной симметрией*:

$$S_N(k, \theta) = S_N^*(N-1-k, 1-\theta); \theta \neq 0, 1/2, k = \overline{0, N/2-1}; \quad (2.43)$$

$$S_N(k, 1-\theta) = S_N^*(N-1-k, \theta); \theta \neq 0, 1/2, k = \overline{0, N/2-1}. \quad (2.44)$$

На рисунке 2.8 для некоторой детерминированной действительной последовательности в $N=8$ отсчетов проиллюстрировано это фундаментальное свойство ДПФ-П.

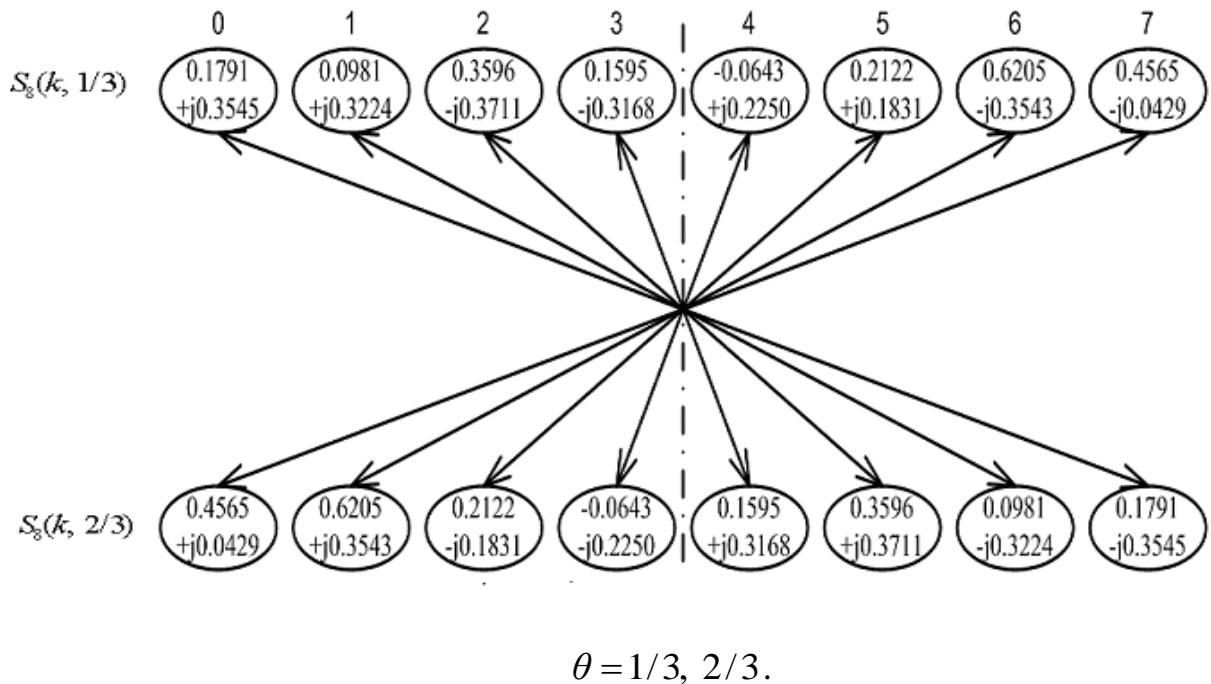


Рисунок 2.8 – Перекрестная комплексно-сопряженная симметрия ДПФ-П

Воспользовавшись соотношениями (2.43) и (2.44), несложно установить, что ДПФ-П действительной последовательности при $\theta \neq 0, 1/2$ позволяет провести методом ДПФ-П измерение **одновременно** двух спектров: при значении параметра θ и при значении параметра $1 - \theta$.

Аналогично, изменяя параметр ξ в косвенном измерительном преобразовании МДПФ-П (2.36), мы имеем возможность измерять в дискретном множестве частот $\frac{2\pi}{N}(n + \xi)$; $n = \overline{0, N-1}$, $0 \leq \xi < 0$; **непрерывный временной спектр сигнала** $x(n)$, задаваемый **взвешенным** ДЧПФ. Принципиальное отличие методик обработки непрерывных временных спектров **действительного сигнала** и **комплексного сигнала** заключается в следующем. В случае действительного ДИС $x(n)$, перед осуществлением МДПФ-П необходимо выполнить операцию умножения второй половины спектра $S_N = [s(0), \dots, s(N/2 - 1), s(N/2), \dots, s(N - 1)]^T$ на поворачивающий множитель C (2.33).

Рассмотрим обработку ДИС алгоритмом Герцеля. Обычно считается, что недостатком фильтра Герцеля (рисунок 2.1) является фиксированность набора анализируемых частот: $\{2\pi k / N\}$, где $k = \overline{0, N-1}$, N - число отсчетов сигнала. Р. Лайонс в [46] предложил модифицировать алгоритм Герцеля путем замены целых значений переменной k (рисунок 2.1) на **любое значение переменной k** в диапазоне $\overline{0, N-1}$, обеспечивая, таким образом, как считал Р. Лайонс, **полный контроль над резонансной частотой фильтра Герцеля**.

В дальнейшем будет доказано, что такая модификация алгоритма Герцеля действительно возможна, но важно понимать и учитывать не только положительные ее последствия, но и некоторые другие моменты. Например, если мы говорим, что стандартный алгоритм Герцеля позволяет вычислить значение k -го бина N -точечного ДПФ, то возникает вопрос: **что измеряет модифицированный фильтр Герцеля?**

Сделаем два замечания по поводу предложенной в [46] модификации фильтра Герцеля. Во-первых, заменяя в ДПФ целые значения переменной k на

любое значение в диапазоне $\overline{0, N-1}$, мы приходим к параметрическому ДПФ, рассмотренному в разделе 2.2. Во-вторых, как будет показано ниже, при переходе к нецелому k происходит «набег» фазы, и значение выходного отсчета модифицированного таким образом алгоритма Герцеля *не будет совпадать с соответствующим коэффициентом ДПФ-П (тем более с коэффициентом ДПФ)*.

Рассмотрим обобщение метода однобинового скользящего ДПФ (СДПФ) (2.10), в виде метода скользящего однобинового параметрического ДПФ (СДПФ-П), который позволяет:

- рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ-П из скользящего окна в N отсчетов;
- в отличие от стандартного СДПФ, дает возможность проводить измерение спектра в окне в N отсчетов не на фиксированных частотах, а из набора частот, число которых варьируется параметром θ :

$$\{2\pi(k + \theta)/N\}; \text{ где } k = \overline{0, N-1}, 0 \leq \theta < 1. \quad (2.45)$$

Из соотношения (2.45) непосредственно следует, что предлагаемое преобразование обеспечивает *полный контроль над резонансной частотой фильтра ДПФ-П* (k -го бина N -точечного ДПФ-П). Метод СДПФ-П позволяет обрабатывать значения спектра $S_N^{(r)}(k, \theta)$ на $(k + \theta)$ частоте по отсчетам входного сигнала $x(n + r)$, $n = \overline{0, N-1}$, из скользящего окна длиной в N отсчетов, при сдвиге сигнала в окне на r отсчетов влево:

$$S_N^{(k+\theta)}(r) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r) W_N^{(k+\theta)n}; \quad (2.46)$$

$$\text{где } W_N^{(k+\theta)n} = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n\right], n, k = \overline{0, N-1}; r = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \theta < 1.$$

Таким образом, при $r = 0$:

$$S_N^{(k+\theta)}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad (2.47)$$

а при $r = 1$:

$$S_N^{(k+\theta)}(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+1) W_N^{(k+\theta)n}. \quad (2.48)$$

Введя переменную $m = n + 1$, выражение (2.48) преобразуем к виду:

$$S_N^{(k+\theta)}(1) = \sum_{m=1}^N x(m) W_N^{(k+\theta)(m-1)}. \quad (2.49)$$

Изменив пределы суммирования в (2.49) и проведя, для компенсации изменения пределов суммирования, вычитание члена с $m=0$ и суммирование члена с $m=N$, получим:

$$S_N^{(k+\theta)}(1) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(k+\theta)m} W_N^{-(k+\theta)} - x(0) W_N^{-(k+\theta)} + x(N) W_N^{(k+\theta)(N-1)}$$

или

$$S_N^{(k+\theta)}(1) = W_N^{-(k+\theta)} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(k+\theta)m} \right] - x(0) + x(N) W_N^{(k+\theta)N} \right\}.$$

Так как $W_N^{(k+\theta)N} = W_N^{\theta N} = \exp(-j2\pi\theta)$, окончательно получим:

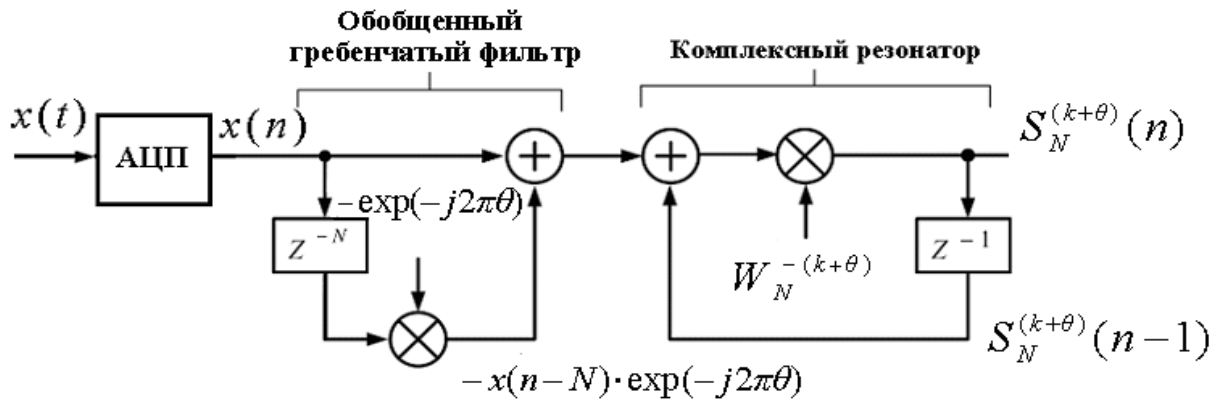
$$S_N^{(k+\theta)}(1) = W_N^{-(k+\theta)} \left[S_N^{(0)}(0) - x(0) + x(N) \exp(-j2\pi\theta) \right]. \quad (2.50)$$

Запишем разностное уравнение СДПФ-П в общем виде (сравнить с (2.10)):

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = W_N^{-(k+\theta)} \left[S_N^{(k+\theta)}(n-1) + x(n) - x(n-N) \exp(-j2\pi\theta) \right]. \quad (2.51)$$

Из соотношения (2.51) непосредственно следует, что данное уравнение может быть реализовано в виде *обобщенного КИХ-фильтра*, структура которого приведена на рисунке 2.9.

Необходимо отметить, что установившееся значение спектра сигнала на k -й частоте на выходе модифицированного КИХ-фильтра будет получено лишь при появлении отсчета $S_N^{(k+\theta)}(N-1)$. Это связано с тем, что переходная характеристика фильтра СДПФ-П (как и переходная характеристика фильтра СДПФ) имеет длину в N отсчетов.



$0 \leq \theta < 1$, z^{-q} – задержка на q отсчетов

Рисунок 2.9. – Структура обобщенного КИХ-фильтра, реализующая однобиновое скользящее СДПФ-П на $(k + \theta)$ -й частоте

Кроме того, необходимо $S_N^{(k+\theta)}(N-1)$, после выхода на установившийся режим, подвергнуть (один раз!) операции комплексного сопряжения. Необходимость данной операции связана с тем, что умножения в модифицированном КИХ-фильтре (рисунок 2.9) (в процессе выхода на установившийся режим) проводятся на $W_N^{-(k+\theta)}$, а не на $W_N^{(k+\theta)}$, как того требует ДПФ-П. При $\theta = 0$ СДПФ-П переходит в СДПФ, предложенное в [46], рисунок 2.4. При $\theta = 1/2$ структура модифицированного КИХ-фильтра преобразуется в структуру, приведенную на рисунке 2.10.

Интересно отметить, что этот частный случай СДПФ-П в [46] отмечен как *малоизвестное свойство СДПФ*.

Дадим краткие пояснения по сути процессов, описываемых уравнением СДПФ-П (2.51), с точки зрения теории обработки и теории фильтрации. Отметим при этом, что именно существование обобщения ДПФ в виде параметрического ДПФ и проведенный автором анализ скользящего ДПФ-П, позволили вскрыть сущность происходящих явлений.

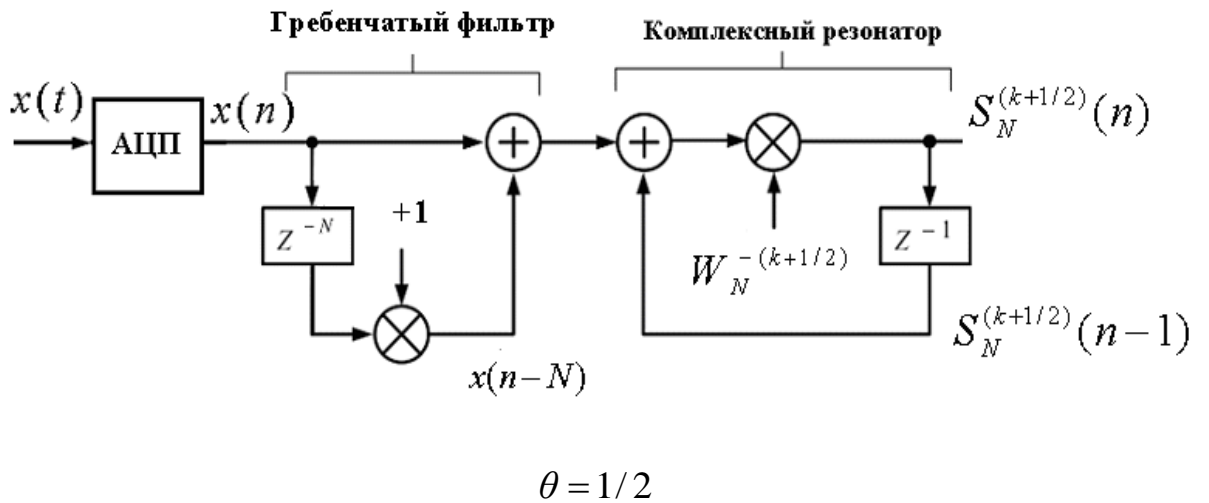
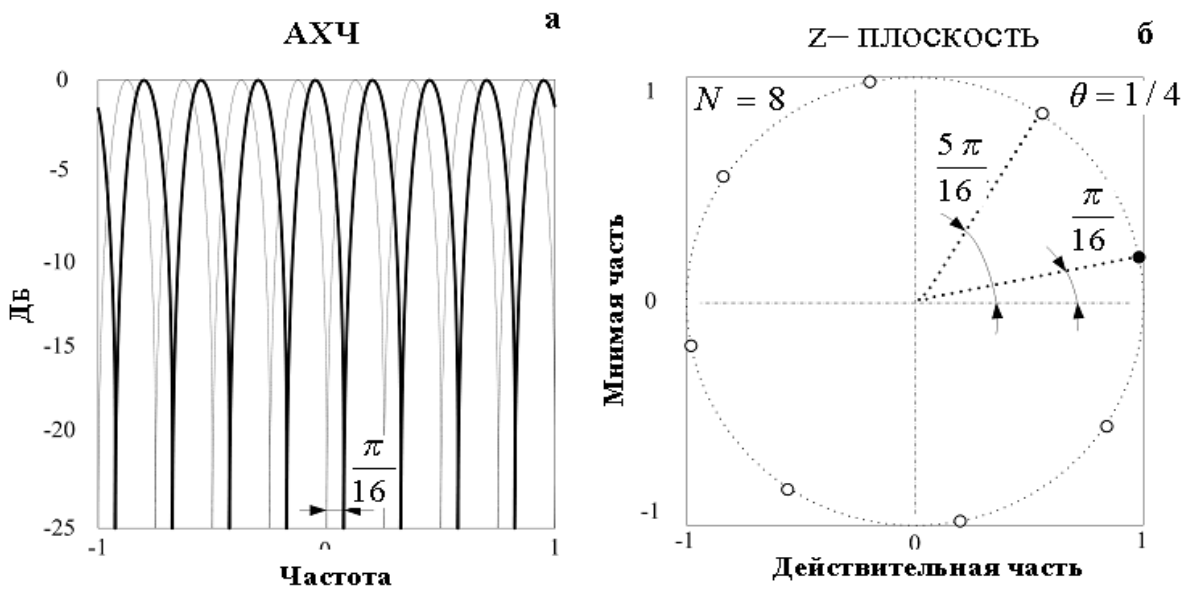


Рисунок 2.10. – Структура модифицированного КИХ-фильтра, реализующая СДПФ-П на $(k + \theta)$ й частоте

В структуре модифицированного КИХ-фильтра (рисунок 2.9), по сути, предложено *обобщение структуры гребенчатого фильтра* (рисунок 2.4), которое позволяет осуществлять поворот распределения нулей АЧХ гребенчатого фильтра на угол $\frac{2\pi}{N}\theta$ (рисунок 2.11).



а – АЧХ (серым цветом изображена АЧХ стандартного гребенчатого фильтра), б – распределение нулей

Рисунок 2.11 – Характеристики модифицированного гребенчатого фильтра

Отметим ещё один очень важный момент. Предложенная модифицированная структура гребенчатого фильтра позволяет, кроме того, решить и проблему погрешностей коэффициентов ФОЧВ, не теряя при этом одно из важных достоинств данного вида фильтров – возможность рекуррентного получения результатов измерения значений спектра входного сигнала.

Необходимо дать краткие пояснения о сути закономерностей, лежащих в основе параметрического СДПФ-П (в том числе и стандартного СДПФ). Дело в том, что, на первый взгляд, разностное уравнение СДПФ-П (2.51) кажется не вполне правдоподобным, в чем автор убедился из переписки с рецензентами, при публикациях работ [66, 85]. Множитель $W_N^{-(k+\theta)}$ в выражении (2.51) осуществляет сдвиг на один отсчет базисной функции ДПФ-П (*не сигнала!*) (рисунок 2.12).

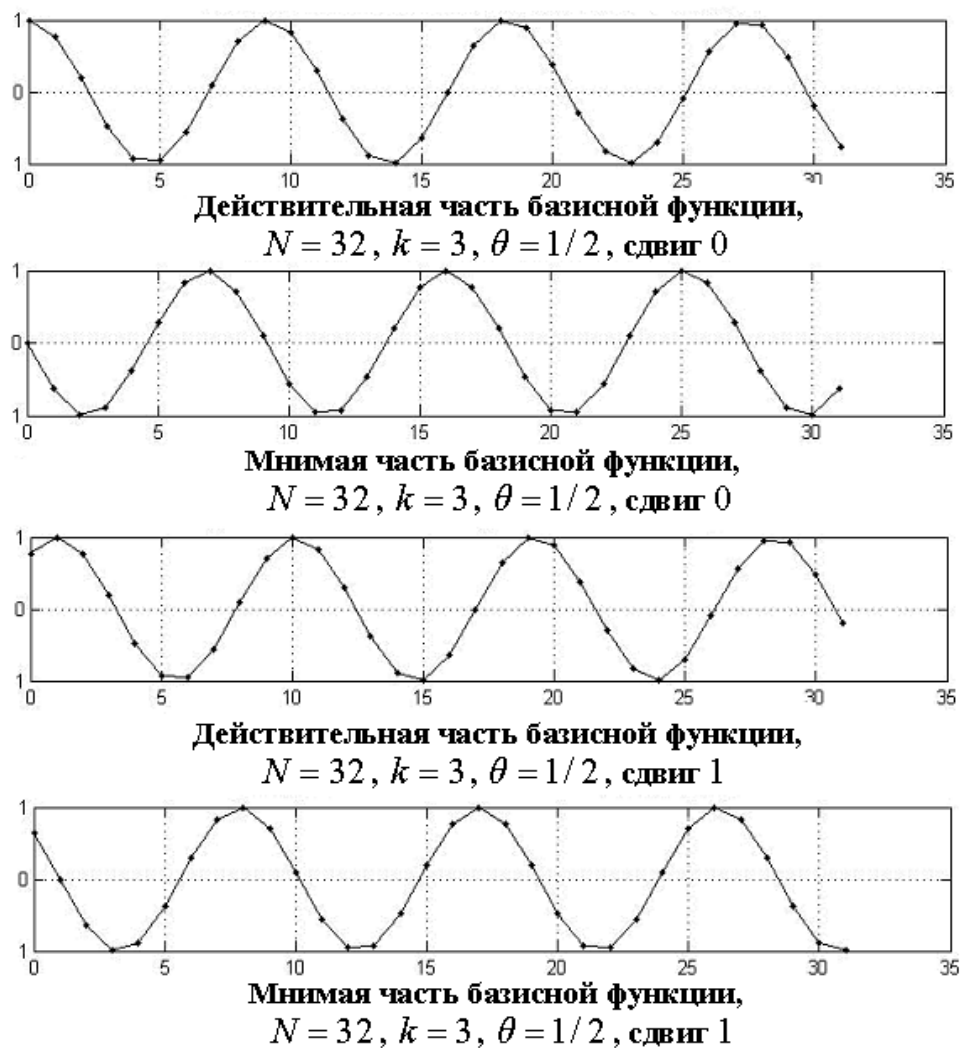


Рисунок 2.12 – Сдвиг базисной функции ДПФ-П на один отсчет

При этом оказывается возможным не определять вновь все значения спектра $S_N^{(k+\theta)}(1)$:

$$S_N^{(k+\theta)}(1) = x(1)W_N^0 + x(2)W_N^k + \dots + x(N)W_N^{k(N-1)}. \quad (2.52)$$

Отсчеты $\overline{2, N-2} S_N^{(k+\theta)}(1)$ могут быть получены из предыдущего значения $S_N^{(k+\theta)}(0)$.

Для определения $S_N^{(k+\theta)}(1)$ необходимо вычислить лишь *два значения* суммы (2.52).

Первый член суммы $[-x(0) \cdot W_N^{-(k+\theta)}]$ вычесть, а последний член суммы $[x(N) \exp(-j2\pi\theta) \cdot W_N^{-(k+\theta)}]$ сложить с $S_N^{(k+\theta)}(0) \cdot W_N^{-(k+\theta)}$.

В таблице 2.1 для $N=8$, $\theta=1/2$ иллюстрируются данные пояснения, при этом указанные выше члены выделены квадратами, а почленные произведения, содержащиеся в $S_N^{(k+\theta)}(1)$ и в $S_N^{(k+\theta)}(0)$, приведены до операции суммирования.

Важными преимуществами предлагаемого однобинового СДПФ-II перед однобиновым СДПФ является то, что:

- данный алгоритм, как и модифицированный фильтр Герцеля, позволяет задавать любую резонансную частоту фильтра (переменная $(k+\theta)$ может быть любой в диапазоне от 0 до $(N-1)$);
- данный алгоритм, в отличие от модифицированного алгоритма Герцеля, требует существенно меньше времени на проведения косвенного измерения спектра на $(k+\theta)$ частоте [85].

Экономия числа операций в алгоритме СДПФ-II, в сравнении с алгоритмом Герцеля (после выхода измерительных преобразований на рабочий режим), приведена на рисунке 2.13.

Таблица 2.1 – Иллюстрация выполнения СДФФ-П

n		0	1	2	3	4	5	6	7
$x(n)$		2.0211	0.5018	- 1.9983	0.272 3	0.3368	0.1378	-1.6106	-1.0075
$x(n+1)$		0.5018	- 1.9983	0.2723	0.336 8	0.1378	- 1.6106	-1.0075	-0.5144
$S_N^{(k+1/2)}(0)$	Re	2.0211	- 0.4636	- 1.4130	- 0.104 2	- 0.0000	0.0527	1.1389	-0.9308
	Jm	0	- 0.1920	- 1.4130	- 0.251 5	0.3368	- 0.1273	-1.1389	0.3856
$S_N^{(k+1/2)}(1)$	Re	0.5018	1.8462	0.1925	- 0.128 9	- 0.0000	- 0.6163	0.7124	-0.4752
	Jm	0	0.7647	0.1925	- 0.311 2	0.1378	1.4880	-0.7124	0.1968
$S_N^{(k+1/2)}(0) \times$ $\times W_N^{-(k+1/2)}$	Re	-1.8673	0.5018	1.8462	0.192 5	- 0.1289	- 0.0000	-0.6163	0.7124
	Jm	0.7735	- 0.0000	0.7647	0.192 5	- 0.3112	0.1378	1.4880	-0.7124

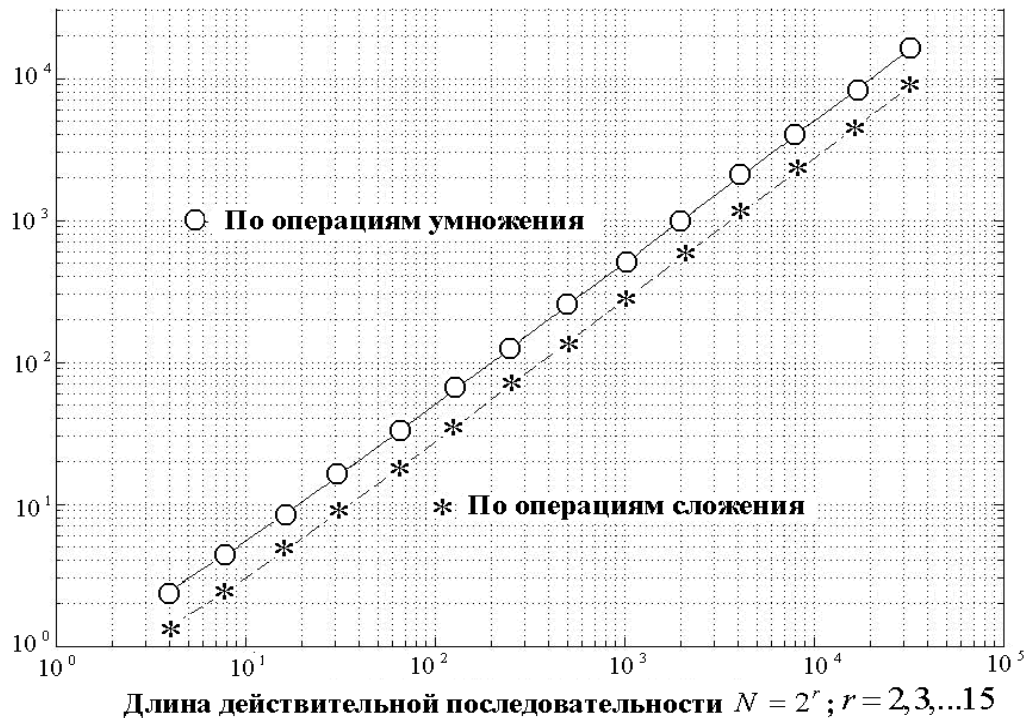


Рисунок 2.13 – Экономия числа операций в алгоритме СДПФ-П по отношению к алгоритму Герцеля

2.5. Обобщения алгоритма Герцеля для цифровой обработки информационных сигналов

Для эффективного решения задач цифровой обработки ДИС со скрытыми периодичностями методами цифровой фильтрации, реализуемыми как КИХ-фильтрами (и/или БИХ-фильтрами), так и методом параметрического дискретного преобразования Фурье, важно обеспечить:

- высокую разрешающую способность косвенного измерения спектра по частоте;
- устойчивость выбранной дискретной системы фильтрации;
- полный контроль над резонансной частотой выбранной дискретной системы фильтрации;
- минимизацию времени измерения частотного спектра и объема необходимой оперативной памяти для его реализации ПрИС.

В разделе 2.1 отмечалось, что стандартный фильтр Герцеля является эффективным методом вычисления однобинового дискретного преобразования Фурье (ДПФ), стандартная структура которого приведена на рисунке 2.1,а.

Алгоритм Герцеля нашел широкое применение при решении задач по декодированию DTMF сигналов (DTMF - Dual Tone Multi Frequency) - двухтональных многочастотных сигналов, используемых при тональном наборе телефонного номера. Фильтр Герцеля, как справедливо отмечено в [23, 46], используется нестандартно, не как обычный фильтр, в котором запоминаются все выходные отсчеты. В алгоритме Герцеля обработка проводится блоками в N отсчетов, при этом *каждое N -значение выходного отсчета* является результатом измерения спектра на k -й частоте (причина обработки блоками будет пояснена ниже). Отметим, что эти выходные отсчеты равны соответствующим коэффициентам ДПФ.

Для получения указанных значений k -го коэффициента ДПФ в алгоритме Герцеля (рисунок 2.1, а, б), на каждые N входных отсчетов алгоритма проводится одна операция комплексного умножения в прямой цепи фильтра (операция отвечает за реализацию нуля фильтра) и N умножений действительных коэффициентов на входные отсчеты алгоритма при вычислении промежуточных результатов в обратной цепи фильтра (операции отвечают за реализацию полюса фильтра). Далее будет показано, что именно отказ от получения всех промежуточных выходных отсчетов, а следовательно, и отсчетов на входе прямой цепи фильтра, обеспечивает алгоритму Герцеля возможность экономии в числе вычислений по сравнению с определением k -го коэффициента ДПФ $S_N(k)$ согласно соотношению (1.3).

При комплекснозначном входном сигнале алгоритм Герцеля позволяет примерно вдвое сократить число операций по сравнению с алгоритмом ДПФ. Для действительного входного сигнала как алгоритм БПФ, так и алгоритм Герцеля позволяют получить дополнительную экономию в числе проводимых операций.

Алгоритм Герцеля, кроме фиксированности набора анализируемых частот: $\{2\pi k/N\}$, где $k = \overline{0, N-1}$, N - число отсчетов сигнала, обладает более существенным недостатком. Дело в том, что фильтр Герцеля находится *на грани устойчивости*, так как его полюс расположен на единичной окружности z -плоскости. Если за счет округления коэффициентов фильтра (снижения их точности) полюс выйдет за пределы единичной окружности, *фильтр Герцеля теряет устойчивость*.

Известен метод борьбы с указанным недостатком – это обработка сигналов блоками длительностью в N отсчетов и обнуление внутренних регистров фильтра в начале обработки каждого нового блока данных [46]. Таким образом, устойчивость алгоритма Герцеля обеспечивается *сокращением обрабатываемой длительности входного сигнала до N отсчетов* (хотя при этом, как отмечено в [46], N может измеряться сотнями).

Можно показать, что в основе *стандартного* фильтра и *модифицированного* фильтра Герцеля лежат комплексные резонаторы, приведенные соответственно на рисунках 2.14, а и 2.14, б. Обозначим их, как комплексный резонатор № 1 (рисунок 2.14, а) и комплексный резонатор № 2 (рисунок 2.14, б).

Нетрудно видеть, что указанные резонаторы отличаются друг от друга резонансными частотами, значения которых определяются соответственно значениями переменных k и $(k + \theta)$.

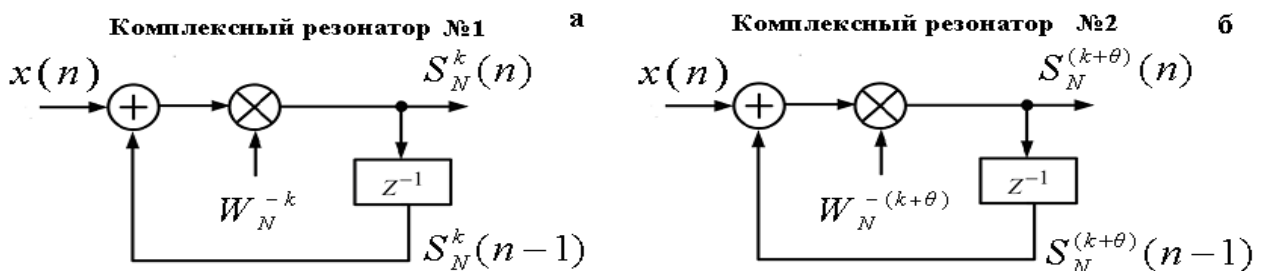


Рисунок 2.14 – Структуры комплексных резонаторов

Рассмотрим вычисление выходных отсчетов комплексного резонатора № 2, как более общего случая (в дальнейшем изложении резонатор № 2 может обозначаться, если это не вызывает путаницы, как просто резонатор).

Согласно (2.16), значение k -го бина ДПФ-П описывается следующим соотношением:

$$S_N(k, \theta) = x(0) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 0} + x(1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 1} \dots + \\ + x(N-2) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-2)} + x(N-1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-1)}. \quad (2.53)$$

Комплексный резонатор № 2 является БИХ-фильтром, разностное уравнение которого имеет вид:

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = W_N^{-(k+\theta)} [x(n) + S_N^{(k+\theta)}(n-1)], \text{ где } n - \text{ номер шага; } n=0,1,\dots \quad (2.54)$$

Обозначив z -преобразование $x(n)$ и $S_N^{(k+\theta)}(n)$ через $X(z)$ и $Y(z)$ соответственно, выражение (2.54) представим в следующем виде: $Y(z) = W_N^{-(k+\theta)} \cdot (X(z) + z^{-1} \cdot Y(z))$.

Тогда передаточная функция БИХ-фильтра (рисунок 2.14, б) равна:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_N^{-(k+\theta)}}{1 - z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)}}. \quad (2.55)$$

На N -м шаге значение выходного отсчета комплексного резонатора задается следующим соотношением:

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = x(0) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot N} + x(1) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (N-1)} \dots \\ \dots + x(N-2) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (2)} + x(N-1) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (1)}. \quad (2.56)$$

Вынося в выражении (2.56) $W_N^{-(k+\theta) \cdot N}$ за скобки, а также учитывая, что $W_N^{-k \cdot N} = 1$ и $W_N^{-\theta \cdot N} = \exp(j2\pi\theta)$, получим:

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = \exp(j2\pi\theta) [x(0) + x(1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 1} \dots \\ \dots + x(N-2) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-2)} + x(N-1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-1)}]. \quad (2.57)$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (2.53), устанавливаем, что на шаге $n = (N-1)$ значение выходного отсчета рассматриваемого резонатора равно:

$$S_N^{(k+\theta)}(n) = \exp(j2\pi\theta) S_N(k, \theta). \quad (2.58)$$

Таким образом, значение выходного отсчета БИХ-фильтра (рисунок 2.14, б) отличается от значения k -го коэффициента ДПФ-П приращением фазы на $\varphi = (j2\pi\theta)$. Это как раз тот «набег» фазы, о котором говорилось в разделе 2.4 по

поводу предложенной Р. Лайонсом модификации алгоритма Герцеля. Очевидно также, что вычисление k -го коэффициента ДПФ-П с помощью БИХ-фильтра осуществляется ровно за столько же операций, что и вычисление k -го спектрального отсчета с помощью ДПФ-П, т.е. выигрыша в числе операций нет! Умножив числитель и знаменатель передаточной функции $H(z)$ (2.55) на выражение $(1 - z^{-1} \cdot W_N^{(k+\theta)})$:

$$H(z) = \frac{W_N^{-(k+\theta)}}{1 - z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)}} = \frac{W_N^{-(k+\theta)} \cdot (1 - z^{-1} \cdot W_N^{(k+\theta)})}{(1 - z^{-1} \cdot W_N^{-(k+\theta)}) \cdot (1 - z^{-1} \cdot W_N^{(k+\theta)})} =$$

$$= \frac{W_N^{-(k+\theta)} - z^{-1}}{1 - z^{-1} \cdot 2 \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)\right] + z^{-2}},$$

мы приходим к обобщению структур БИХ-фильтров стандартного алгоритма Герцеля (рисунок 2.1, а, рисунок 2.1, б), – к структурам БИХ-фильтров, реализующих модифицированный алгоритм Герцеля (рисунок 2.15 а, б).

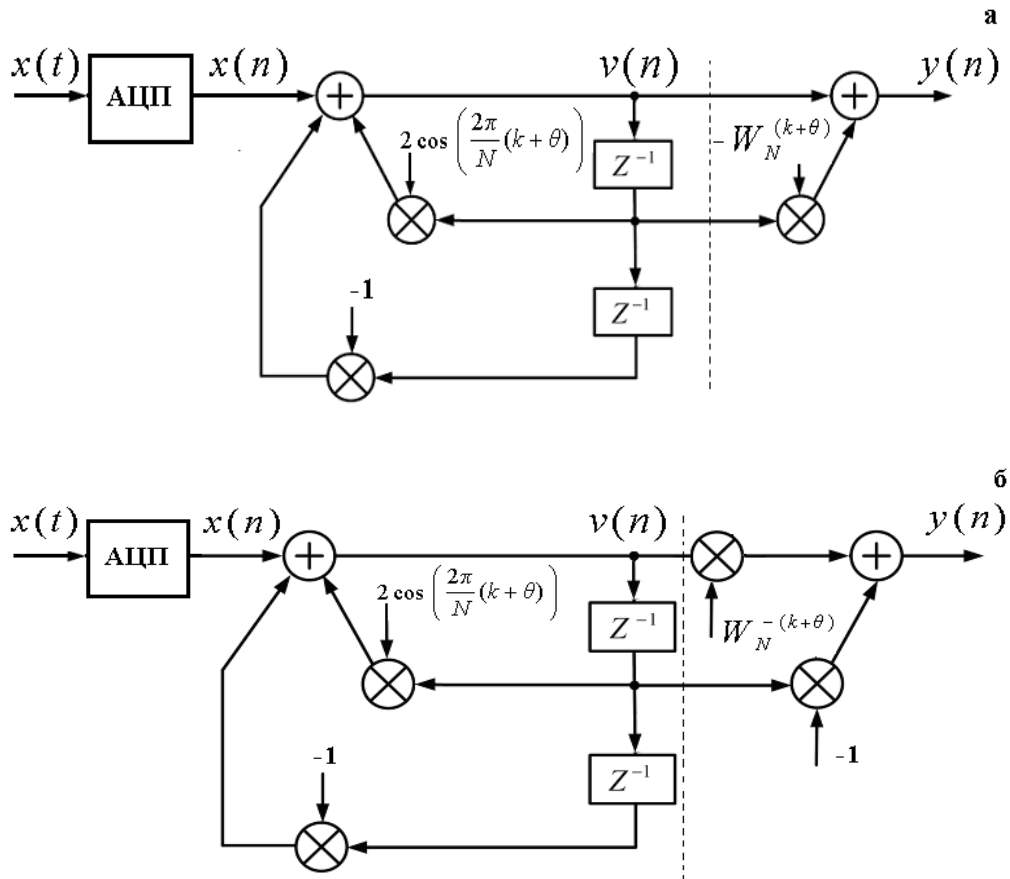


Рисунок 2.15 – Структуры БИХ-фильтров, реализующие модифицированный алгоритм Герцеля

Нетрудно видеть, что модифицированный алгоритм Герцеля, как и стандартный алгоритм Герцеля, дает существенную экономию в числе операций.

Рассмотрим работу резонатора №2 на последующих шагах (т.е. после $(N-1)$ шага).

Найдем выходной отсчет на $(N-1+m)$ -м шаге ($m=1, 2, 3, \dots$) БИХ-фильтра (рисунок 2.14, б):

$$\begin{aligned} S_N^{(k+\theta)}(N-1+m) = & x(0) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m)} + x(1) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m-1)} \dots + \\ & + x(N-3+m) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (3)} + x(N-2+m) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (2)} + \\ & + x(N-1+m) \cdot W_N^{-(k+\theta) \cdot (1)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Вынося в выражении (2.59) $W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m)}$ за скобки и учитывая замечания, сделанные при выводе формулы (2.56), получим:

$$\begin{aligned} S_N^{(k+\theta)}(N-1+m) = & \exp(j2\pi\theta) W_N^{-(k+\theta) \cdot (N+m)} [x(0) + x(1) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot 1} \dots + \\ & + x(N-3+m) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-3+m)} + x(N-2+m) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-2+m)} + \\ & + x(N-1+m) \cdot W_N^{(k+\theta) \cdot (N-1+m)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Согласно (2.16), значение k -го бина ДПФ-П при $n = \overline{0, N-1+m}$ задается следующим соотношением:

$$\begin{aligned} S_{N+m}(k, \theta) = & x(0) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot 0} + x(1) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot 1} \dots + \\ & + x(N-3+m) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot (N-3+m)} + x(N-2+m) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot (N-2+m)} + \\ & + x(N-1+m) \cdot W_{N+m}^{(k+\theta) \cdot (N-1+m)}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Сравнивая соотношения (2.60) и (2.61), получим обобщение выражения (2.58):

$$S_N^{(k+\theta)}(N-1+m) = \exp(j2\pi\theta) W_{N+m}^{-(k+\theta) \cdot (N+m)} S_{N+m}(k, \theta). \quad (2.62)$$

Полученные результаты позволяют сделать ряд важных выводов.

1. Выходной отсчет резонатора № 1 ($\theta=0$) на шагах, удовлетворяющих соотношению: $n = (s \cdot N - 1)$, где $s=1, 2, \dots$, будет в точности равен $s \cdot k$ -му коэффициенту ДПФ:

$$S_N^k(s \cdot N - 1) = S_{N \cdot s}(s \cdot k), \quad k = \overline{0, (N \cdot s - 1)}. \quad (2.63)$$

Согласно (2.16), значение $(k \cdot s)$ -го бина ДПФ-П при длительности сигнала $(N \cdot s - 1)$ отсчетов равно:

$$S_{N \cdot s}(s \cdot k) = \sum_{n=0}^{(s \cdot N - 1)} x(n) W_{N \cdot s}^{k \cdot s \cdot n} = \sum_{n=0}^{(s \cdot N - 1)} x(n) W_N^{kn}, k = 0, (N \cdot s - 1), s = 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

Так как дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ) обладают свойством периодичности:

$$\text{def}(k, n \pm rN) = \text{def}(k, n), r = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.65)$$

то сумму (2.65) можно представить в виде s сумм:

$$S_{s \cdot N}(s \cdot k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n + N) W_N^{kn} + \dots + \sum_{n=0}^{N-1} x(n + (s - 1) \cdot N) W_N^{kn}. \quad (2.66)$$

Следовательно, возможна своеобразная процедура блочной обработки отсчетов входного сигнала, которую автор назвал **цифровой блочной обработкой с накоплением** (ЦБОН). Поясним пошагово процедуру ЦБОН.

- Разбиваем исходный сигнал на s блоков по N отсчетов в каждом:

$$\text{Блок 1} \Rightarrow [x(0), \dots, x(N-1)], \text{ Блок 2} \Rightarrow [x(N), \dots, x(2N-1)] \dots$$

$$\dots \text{Блок } s \Rightarrow [x((s-1)N), \dots, x(s \cdot N - 1)].$$

- Вычисляем k -е коэффициенты ДПФ каждого блока согласно (1.3):

$$S_{N,1}(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) \cdot W_N^{kn}, \quad S_{N,2}(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n + N) \cdot W_N^{kn}, \dots,$$

$$S_{N,s}(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n + (s-1) \cdot N) \cdot W_N^{kn}; \quad \text{где } W_N^{kn} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn).$$

- Суммируем полученные значения k -х коэффициентов ДПФ:

$$S_{N \cdot s}(s \cdot k) = \sum_{i=1}^s S_{N,i}(k).$$

Полученный результат в точности совпадает с m -м коэффициентом ДПФ ($m = (s \cdot k)$), в чем несложно убедиться.

Как известно, в классическом алгоритме Герцеля вычисление коэффициента ДПФ входного сигнала проводится блоками, при этом в начале каждого измерения выполняется начальная установка («обнуление») всех внутренних

регистров памяти (что и гарантирует устойчивость работы фильтра Герцеля). Таким образом, *разрешение по частоте* фильтра Герцеля ограничивается длительностью дискретного сигнала в блоке.

Введя процедуру ЦБОН (2.66) для целых значений переменной k (т.е. когда $\theta = 0$), можно выполнить *первое обобщение алгоритма Герцеля* (напомним, что переменная k в фильтре Герцеля отвечает за частоту). Введенная автором процедура ЦБОН позволяет фильтром Герцеля, обрабатывающим блоки по N отсчетов, определять значение ks -го бина Ns -точечного ДПФ. При этом обеспечивается:

- высокая разрешающая способность по частоте при измерении спектра, за счет увеличения длительности обрабатываемого входного сигнала до Ns отсчетов;
- устойчивость работы фильтра, за счет выполнения «последовательного обнуления» всех внутренних регистров памяти в начале обработки каждого блока в N отсчетов.

Первый обобщенный алгоритм Герцеля можно реализовать в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рисунок 2.16.

2. Выходной отсчет резонатора № 2 ($\theta \neq 0$) на шагах, кратных $(N - 1)$, не будет равен k -му коэффициенту ДПФ-П, задаваемому формулой (2.16):

$$S_{s \cdot N}(s \cdot k, s \cdot \theta) = \sum_{n=0}^{(s \cdot N - 1)} x(n) W_{s \cdot N}^{s \cdot (k + \theta)n} = \sum_{n=0}^{(s \cdot N - 1)} x(n) W_N^{(k + \theta)n}, \quad (2.67)$$

где $0 \leq \theta < 1$, $W_N^{(k + \theta)n} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n)$, $k = \overline{0, s \cdot N - 1}$, $s = 1, 2, \dots$,

так как параметрические дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ-П) не обладают свойством периодичности по переменной n :

$$\text{def}(k, n \pm rN, \theta) \neq \text{def}(k, n, \theta), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

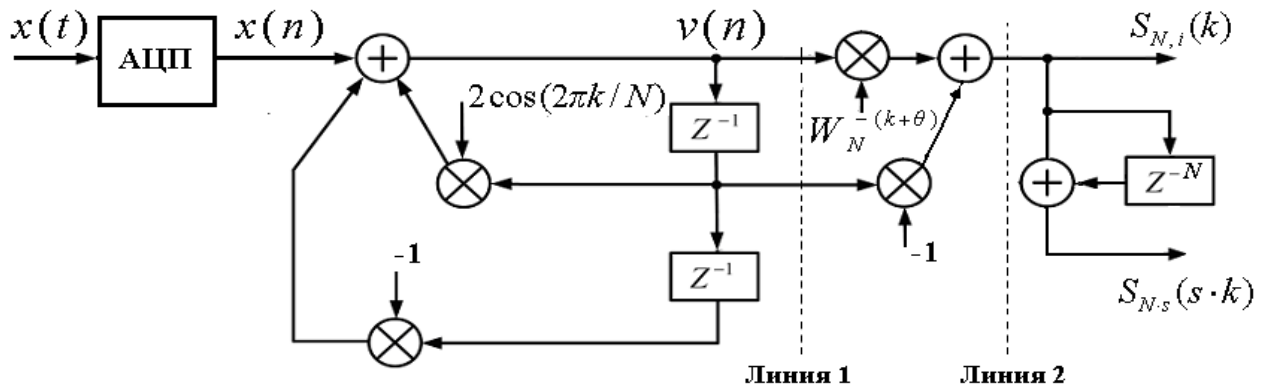


Рисунок 2.16 – Структура БИХ-фильтра, реализующего первый обобщенный алгоритм Герцеля

Покажем, что и в этом случае, при определенной модификации метода ЦБОН, также возможно применение процедуры блочной обработки ДИС. Обобщение ЦБОН основывается на том, что ДЭФ-П, не обладая свойством периодичности по переменной n , обладают более общим свойством, получившим название «*свойство параметрической периодичности ДЭФ-П по переменной n* »:

$$def(k, n \pm rN, \theta) = def(k, n, \theta) W_N^{\pm \theta N r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Используя параметрическую периодичность ДЭФ-П, сумму (2.67) можно также представить в виде s сумм:

$$\begin{aligned} S_{s \cdot N}(s \cdot k, s \cdot \theta) = & \exp(-j2\pi\theta) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n} + \\ & + [\exp(-j2\pi\theta)]^2 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N) W_N^{(k+\theta)n} + \dots \\ & \dots + [\exp(-j2\pi\theta)]^s \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n+(s-1) \cdot N) W_N^{(k+\theta)n} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Исходя из выражения (2.68), **модифицированную цифровую блочную обработку с накоплением** (МЦБОН) можно представить в виде выполнения следующих этапов.

Приведем пошагово процедуру модифицированной ЦБОН.

➤ Разбиваем исходный сигнал на s блоков по N отсчетов в каждом:

- Блок 1 $\Rightarrow [x(0), \dots, x(N-1)]$, Блок 2 $\Rightarrow [x(N), \dots, x(2N-1)]$, ...,

▪ Блок $s \Rightarrow [x((s-1)N), \dots, x(s \cdot N - 1)]$.

➤ Вычисляем k -е коэффициенты ДПФ-П каждого блока согласно (2.16):

$$S_{N,1}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n) \cdot W_N^{(k+\theta)n}, S_{N,2}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n+N) \cdot W_N^{(k+\theta)n}, \dots,$$

$$S_{N,s}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n+(s-1) \cdot N) \cdot W_N^{(k+\theta)n},$$

где $W_N^{(k+\theta)n} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta)n)$.

➤ Проводим фазовые повороты k -х коэффициентов ДПФ-П i -х блоков путем их умножения на фазовый коэффициент $\{[\exp(-j2\pi\theta)]^i\}$:

$$S_{N,1}^\circ(k, \theta) = \exp(-j2\pi\theta) \cdot S_{N,1}(k, \theta),$$

$$S_{N,2}^\circ = [\exp(-j2\pi\theta)]^2 \cdot S_{N,2}(k, \theta), \dots$$

$$S_{N,s}^\circ(k, \theta) = [\exp(-j2\pi\theta)]^s \cdot S_{N,s}(k, \theta).$$

➤ Суммируем полученные значения k -х коэффициентов ДПФ-П i -х блоков:

$$S_{N \cdot s}(s \cdot k) = \sum_{i=1}^s S_{N,i}^\circ(k, \theta).$$

Полученный результат в точности совпадает с m -м коэффициентом ДПФ-П (2.67) ($m = (s \cdot k, s \cdot \theta)$), в чем также несложно убедиться.

Предлагаемая автором процедура модификации ЦБОН позволяет, обрабатывая модифицированным фильтром Герцеля блоки по N отсчетов, выполнить **второе обобщение алгоритма Герцеля** для нецелых значений переменной $(k+\theta)$ (т.е. когда $\theta \neq 0$) и вычислить значение ks -го бина Ns -точечного ДПФ-П. При этом обеспечивается:

➤ высокая разрешающая способность по частоте при измерении спектра, за счет увеличения длительности обрабатываемого входного сигнала до Ns отсчетов;

- устойчивость работы фильтра, за счет выполнения *«последовательного обнуления»* всех внутренних регистров памяти в начале обработки каждого блока в N отсчетов;
- полный контроль над резонансной частотой фильтра Герцеля.

Цифровая блочная обработка сигналов с накоплением и ее модификация основаны, соответственно, на периодичности ДЭФ и параметрической периодичности ДЭФ-П, а также обеспечении непрерывности импульсной характеристики фильтра Герцеля $h(n)$.

Действительно, при использовании ЦБОН и целых значениях переменной k фильтр Герцеля будет иметь *«непрерывную» импульсную характеристику* бесконечной длительности в силу периодичности ДЭФ:

$$h(n) = \sum_{k=(s-1)N}^{(s \cdot N - 1)} \exp(j2\pi \cdot k \cdot n / N), n = \overline{0, s \cdot N - 1}, s = \overline{1, \infty}. \quad (2.69)$$

Если же добавить к целому числу k некоторую дробную часть θ , то фильтр Герцеля будет иметь уже *«кусочно-непрерывную» импульсную характеристику бесконечной длительности:*

$$h(n) = \sum_s [\exp(j2\pi\theta)]^s \sum_{k=(s-1)N}^{(s \cdot N - 1)} \exp(j2\pi \cdot k \cdot n / N), n = \overline{0, s \cdot N - 1}, s = \overline{1, \infty}. \quad (2.70)$$

Несложно заметить, что выражение (2.70) является обобщением выражения (2.69), и при $\theta = 0$ они тождественны.

При обработке каждого блока данных в N отсчетов алгоритм Герцеля при наличии дробной части θ дает приращение фазы выходного отсчета фильтра на $\varphi = j2\pi\theta$.

Чтобы обеспечить в этом случае *«непрерывность» импульсной характеристики бесконечной длительности* (2.70), необходимо после обработки каждого блока не только выполнять начальную установку («обнуление») всех внутренних регистров памяти, гарантируя таким образом устойчивую работу фильтра Герцеля, но и осуществлять *компенсацию*

приращения фазы путем умножения выходного отсчета фильтра Герцеля на $\alpha = \exp(-j2\pi\theta)$.

Второй обобщенный алгоритм Герцеля можно реализовать в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рисунке 2.17.

Передаточная функция обобщенного фильтра Герцеля имеет ноль в точке $z = \exp[-j(2\pi/N)(k + \theta)]$ и два комплексно-сопряженных полюса в точках $z = \exp[\pm j(2\pi/N)(k + \theta)]$ на z -плоскости (ноль и полюс в точке $z = \exp[-j(2\pi/N)(k + \theta)]$ компенсируют друг друга).

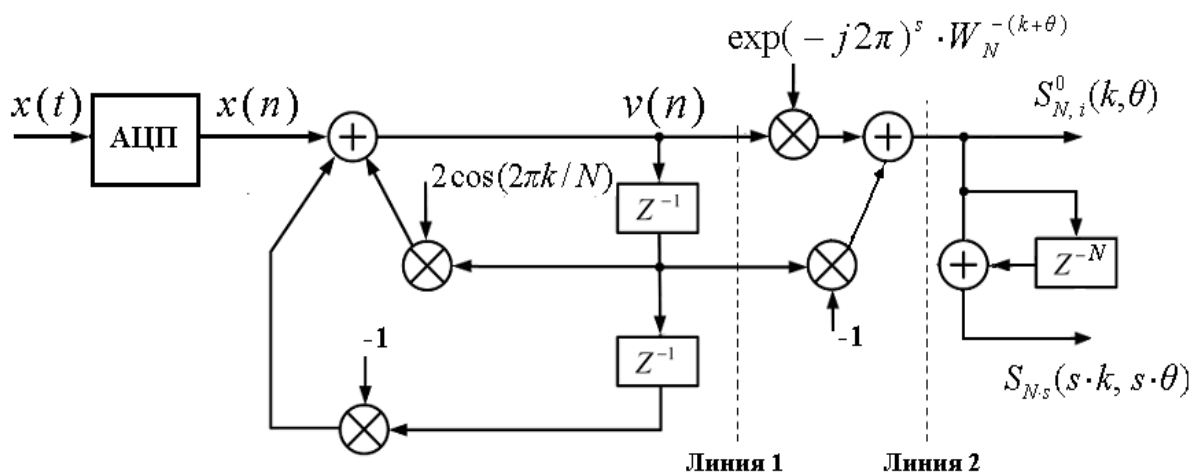


Рисунок 2.17 – Структура БИХ-фильтра, реализующего второй обобщенный алгоритм Герцеля

Таким образом, при значении параметра $\theta = 0$ получаем **первый обобщенный алгоритм Герцеля**, а при значении параметра $\theta \neq 0$ – **второй обобщенный алгоритм Герцеля**. Соответственно, и передаточные функции обобщенных фильтров Герцеля можно описать общим выражением. Они имеют при соответствующем значении параметра θ ноль в точке $z = \exp[-j(2\pi/N)(k + \theta)]$ и два комплексно-сопряженных полюса в точках $z = \exp[\pm j(2\pi/N)(k + \theta)]$ на z -плоскости (ноль и полюс в точке $z = \exp[-j(2\pi/N)(k + \theta)]$ компенсируют друг друга).

Последовательность выполнения операций в обобщенных алгоритмах Герцеля и их число при длительности блока N отсчетов, числе блоков s аналогичны:

- операции слева от пунктирной линии 1 выполняются N раз для каждого блока;
- операции между линиями 1 и 2 выполняются один раз после обработки каждого блока;
- операции справа от пунктирной линии 2 выполняются s раз по числу блоков.

Таким образом, автором работы введена новая процедура блочной обработки, названная «*цифровой блочной обработкой с накоплением*» – ЦБОН, на основе которой предложено *два обобщения алгоритма Герцеля*.

Первый обобщенный алгоритм Герцеля, в отличие от стандартного алгоритма Герцеля, позволяет одновременно обеспечить:

- высокую разрешающую способность по частоте при измерении спектра;
- устойчивость работы фильтра.

Второй обобщенный алгоритм Герцеля, сохраняя перечисленные преимущества, дает возможность осуществить:

- полный контроль резонансной частоты фильтра Герцеля.

2.6. Инвариантность скользящего энергетического спектра действительного гармонического ИС в базисе Фурье

Перед рассмотрением вопроса инвариантности скользящего энергетического спектра действительного гармонического ИС при скользящих измерениях на основе преобразования ДПФ, сделаем ряд вводных замечаний.

Во второй главе при рассмотрении методов измерений спектров детерминированных сигналов на конечных интервалах в дискретном базисе

Фурье дано определение дискретного частотно-временного спектра (дискретного скользящего спектра).

Заметим, что в литературе встречаются также и другие названия дискретного частотно-временного спектра: дискретный мгновенный спектр или дискретный текущий спектр [25, 49, 149].

Во второй главе также дано понятие *скользящего спектрального измерения*, которое заключается в измерении дискретного частотно-временного спектра дискретного ИС на k -частоте *в скользящем временном окне в N отсчетов* (окно называется скользящим, так как перед повторным спектральным измерением оно смещается на один отсчет по исходному сигналу, рисунок 2.18).

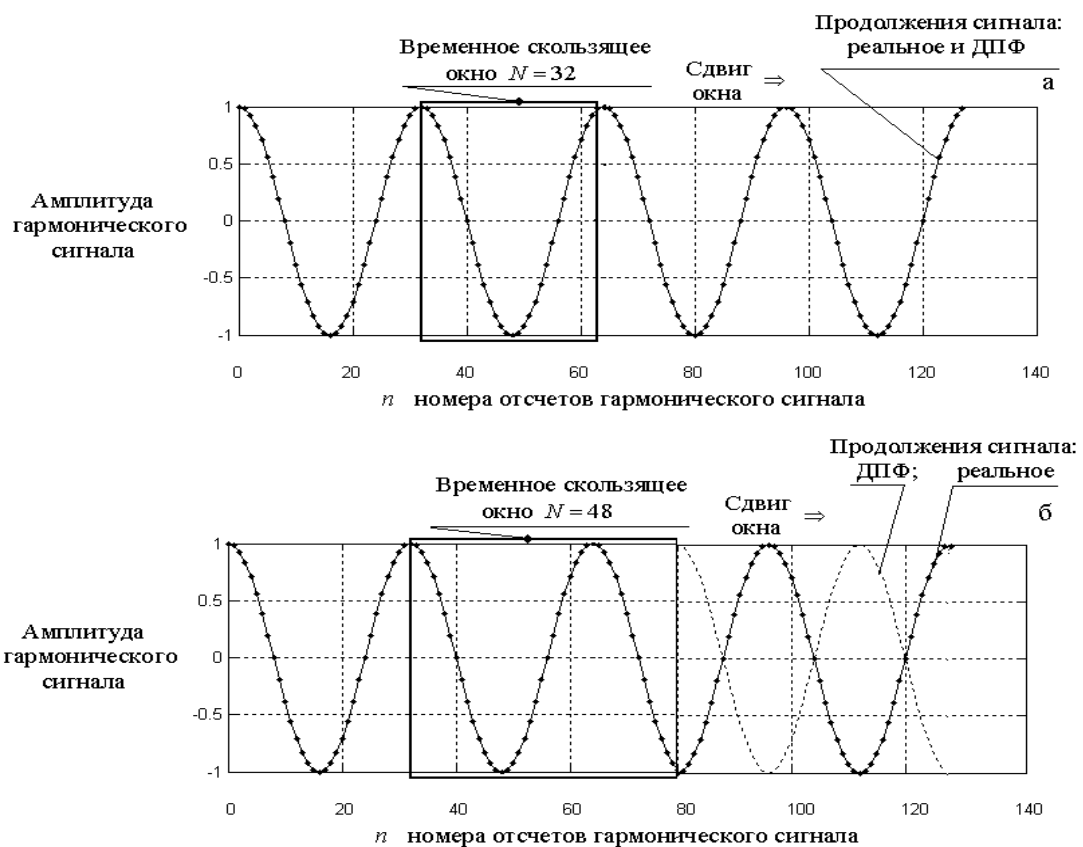


Рисунок 2.18 – Скользящее временное окно

Энергетический спектр действительного гармонического ИС $x(n)$ определяется следующими соотношениями:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N |S_N(k)|^2, P_N(k) = |S_N(k)|^2, \Delta f = \frac{1}{N};$$

$$\text{где } S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), k = \overline{0, (N-1)}. \quad (2.71)$$

Отметим, что переход от нормированной Δf к «истинной» $\Delta f_{\text{эпд}}$ осуществляется согласно выражению:

$$\Delta f_{\text{эпд}} = \Delta f \cdot F_s, \text{ где } F_s - \text{ частота дискретизации ИС } x(n). \quad (2.72)$$

Во второй главе диссертации также отмечалось, что при практическом применении ДПФ возникает ряд проблем, появление которых связано с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его использование. Один из них – это эффект размывания спектральных составляющих (эффект утечки, англ. leakage). Проявление данного эффекта связано с тем, что при выполнении спектрального анализа исследуемой функции мы измеряем циклическую свертку истинного спектра исследуемой функции с функцией вида $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$, которая *не локализована, а размыта по частоте* (отсюда и название эффекта).

Обращаясь к рисунку 2.19, **а**, когда длительность временного окна *в точности равна периоду гармонического ИС*, несложно видеть, что ДПФ обладает «*виртуальными избирательными свойствами*», так как отсчеты ДПФ попадают в нули функции $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$, что проиллюстрировано на рисунке 2.18, **а**.

В том случае, когда длительность временного окна не равна периоду гармонического ИС, мы видим (рисунок 2.19, **б**) проявление эффекта размывания спектральных составляющих.

Можно назвать целый ряд работ, например [21, 22, 46], в которых исследуется вопрос измерения частоты гармонических сигналов при ее несовпадении с сеткой частот измерительного преобразования ДПФ [21, 22]. При этом априори, по умолчанию, предполагается инвариантность энергетического спектра (4.51) гармонического ИС.

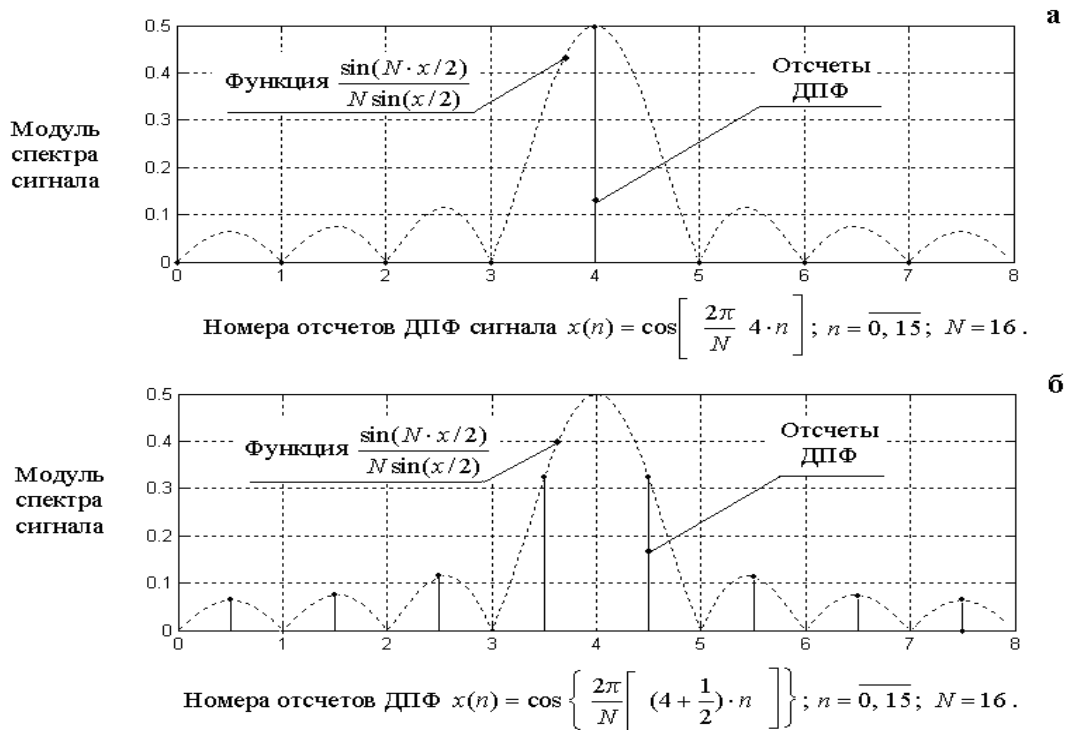


Рисунок 2.19 – Эффект размывания спектральных составляющих дискретного ИС на конечном интервале

Действительно, широкое применение ДПФ для измерения параметров квазидетерминированных и случайных ИС на конечных интервалах во многом объясняется тем, что скользящий энергетический спектр Фурье N -периодических сигналов $x(n \pm p \cdot N) = x(n); n = \overline{0, N-1}; p = 1, 2, 3, \dots$ (рисунок 2.18, а) *инвариантен временному сдвигу исходного ИС.*

Однако на практике исследуемый гармонический ИС на интервале обработки, как правило, не является N -периодическим сигналом (даже если сам сигнал периодичен), так как его продолжения, задаваемое ДПФ и реальное (естественное), не совпадают (рисунок 2.18, б). Это объясняется тем, что мы не знаем априори период гармонического ИС, поэтому не можем выбрать N -интервал равным периоду исходного ИС.

К сожалению, приходится констатировать, что в известной автору литературе рассмотрение вопроса об инвариантности энергетического спектра Фурье временному сдвигу гармонического ИС, не являющегося N -периодическим сигналом, отсутствует. В то же время экспериментальные

исследования на модельных и реальных ИС, проведенные автором настоящей работы, показали, что предположение об инвариантности скользящего энергетического спектра Фурье (СЭСФ) гармонического (тонального) ИС его временному сдвигу, как в базисе ДЭФ, так и в базисе ДЭФ-П, в общем случае несправедливо. Представляется также очевидным, что потеря инвариантности СЭСФ *неизбежно должна приводить* к погрешностям методического характера при решении задач обработки гармонических ИС.

Восполним указанный пробел в теории обработки ИС путем теоретических и экспериментальных исследований инвариантности СЭСФ действительных дискретных гармонических ИС на конечных интервалах, не являющихся N -периодическими ИС для двух видов его продолжения (рисунок 2.18, а, б):

- «естественного» (реального) продолжения входного ИС;
- «искусственного» продолжения ИС, «навязанного» ДПФ.

Введем символическое обозначение для ДПФ: $S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$

и ОДПФ: $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn}$ циклической (N -периодической)

последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$:

$$x(n) \xleftarrow{F} S_N(k). \quad (2.73)$$

Тогда теорему сдвига для ДПФ можно записать в следующем виде:

$$\text{если } x(n) \xleftarrow{F} S_N(k), \text{ то } x(n+m) \xleftarrow{F} W_N^{-km} S_N(k); \quad (2.74)$$

где $m = 1, 2, \dots$ – сдвиг временного окна;

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), \quad k = \overline{0, (N-1)}.$$

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность энергетического спектра N -периодической последовательности $x_N(n \pm p \cdot N) = x(n)$, $p = 1, 2, 3, \dots$, $n = \overline{0, N-1}$ ее сдвигу (например, при «искусственном» продолжении ИС, «навязанном» ДПФ (рисунок 2.18, б), или при

естественном продолжении ИС, если оно совпадает с «навязанным» ДПФ (рисунок 2.18, а).

Разностное уравнение СДПФ (2.13) скользящего измерения на k -й частоте фурье-спектра действительного дискретного ИС $x(n)$ *при естественном его продолжении* (рисунок 2.18) и сдвиге временного окна на m отсчетов, запишем в следующем виде :[65, 66, 72]:

$$S_m(k) = W_N^{-k} S_{(m-1)}^\circ(k); \quad (2.75)$$

где $W_N^{-k} = \exp(j \frac{2\pi}{N} k)$; $m = 1, 2, 3, \dots$ - сдвиг временного окна;

$$S_{(m-1)}^\circ(k) = [S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)];$$

N - число отсчетов во временном окне (длительность окна);

$S_0(k) = S_{(m-1)}(k) \big|_{m=1}$ - значение на k -й частоте коэффициента ДПФ при выходе алгоритма на режим скользящего измерения.

Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, запишем $S_{(m-1)}(k)$, $S_{(m-1)}^\circ(k)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_{(m-1)}(k) &= |S_{(m-1)}(k)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}) + j \sin(\varphi_{(m-1)})]; \\ S_{(m-1)}^\circ(k) &= |S_{(m-1)}^\circ(k)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ)]; \end{aligned} \quad (2.76)$$

где $|S_{(m-1)}(k)| = \sqrt{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k)]\}^2}$

$$\cos(\varphi_{(m-1)}) = \frac{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k)]}{|S_{(m-1)}(k)|}; \quad \sin(\varphi_{(m-1)}) = \frac{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k)]}{|S_{(m-1)}(k)|};$$

$$|S_{(m-1)}^\circ(k)| = \sqrt{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k)]\}^2};$$

$$\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ) = \frac{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k) - x(m-1) + x(m-1+N)]\}}{|S_{(m-1)}^\circ(k)|}; \quad \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ) = \frac{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k)]}{|S_{(m-1)}^\circ(k)|}.$$

Учитывая, что:

$$W_N^{-k} = \cos(\beta_k) + j \sin(\beta_k); \quad \beta_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k; \quad |W_N^{-k}| = 1;$$

$$|(a + jb) \cdot (c + jd)| = |(a + jb)| \cdot |(c + jd)|;$$

$$S_m(k) = |S_m(k)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k)]; \quad |S_{(m-1)}^\circ(k)| = |S_m(k)|,$$

представим разностное уравнение (2.75) в следующей форме:

$$\begin{aligned} S_m(k) &= W_N^{-k} S_{(m-1)}^\circ(k) = |S_{(m-1)}^\circ(k)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k)] = \\ &= |S_m(k)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k)]; \end{aligned}$$

$$\varphi_{(m-1)}^\circ = \arccos \frac{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}^\circ(k)]}{|S_{(m-1)}^\circ(k)|}. \quad (2.77)$$

Из соотношения (2.77) непосредственно следует, что значение СЭСФ действительного дискретного ИС на k -й частоте равно:

$$\begin{aligned} G_m(k) &= N \cdot |S_{(m-1)}^\circ(k)|^2 = \\ &= N \cdot \{\operatorname{Re}[(S_{(m-1)}^\circ(k)) - x(m-1) + x(m-1+N)]\}^2 + N \cdot \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}^\circ(k)]\}^2 = \\ &= N \cdot \{\operatorname{Re}[(S_{(m-1)}^\circ(k)) + c(m)]\}^2 + N \cdot \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}^\circ(k)]\}^2. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Таким образом, СЭСФ действительного дискретного ИС $x(n)$ на k -й частоте будет **инвариантным временному сдвигу ИС** $x(n)$, когда сумма $c(m) = \{x(m-1+N) - x(m-1)\}$ в выражении (2.78) будет равна нулю.

Частный случай, когда это будет иметь место на практике, рассмотрен выше (соотношение (2.73)). В общем же случае СЭСФ действительного дискретного ИС $x(n)$ не будет инвариантным временному сдвигу при естественном продолжении ИС.

Данный эффект автор, по примеру уже существующих эффектов, сопровождающих практическое применение ДПФ (некоторые из которых рассмотрены выше), назвал **эффектом неинвариантности** (предлагаемый английский термин «*non-invariance*»).

Графическая интерпретация измерения СЭСФ дискретного действительного сигнала приведена на рисунке 2.20. Точка **А** соответствует СЭСФ на k -й частоте, измеренному на предыдущем шаге, точка **Б** – СЭСФ на k -й частоте, измеренному на следующем шаге.

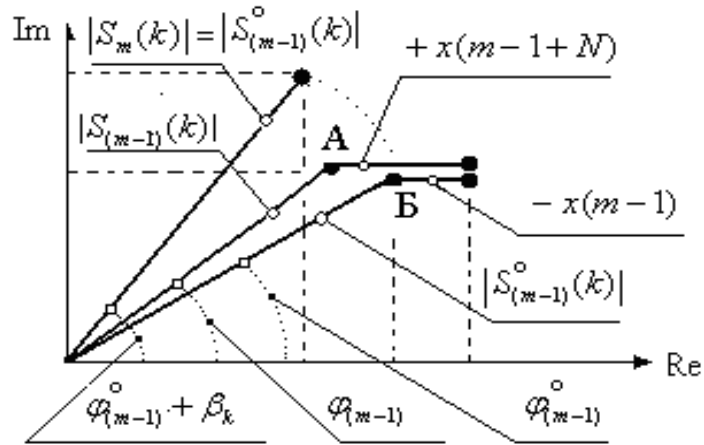


Рисунок 2.20 – Рекуррентное измерение m -го значения модуля СЭСФ дискретного действительного ИС на k -й частоте

Рассмотрим инвариантность СЭСФ действительных гармонических компонент вида:

$$x(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)n \right], \text{ где } 0 \leq q < 1, k = \overline{1, N/2}. \quad (2.79)$$

Нетрудно видеть, что если параметр q , характеризующий «несогласованность» периода гармонической компоненты с N -интервалом, равен нулю, то действительный тональный ИС (2.79) «укладывается» на N -интервале целое число раз, и его СЭСФ инвариантен временному сдвигу исходного ИС. Так как в этом случае естественное продолжение ИС во временном окне будет совпадать с циклическим (периодическим) продолжением ИС, которое «навязывается» ДПФ.

Выше было показано (выражение (2.78)), что для произвольного входного ИС $x(n)$ для инвариантности его СЭСФ на k -й частоте временному сдвигу $x(n)$ достаточно равенства нулю суммы: $c(m) = \{x(m-1+N) - x(m-1)\}$. Для рассматриваемого случая введем функцию двух переменных $c(m, q)$ аналогичную функции $c(m)$:

$$\begin{aligned} c(m, q) &= x(m-1+N) - x(m-1) = \\ &= \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)(m-1+N) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)(m-1) \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Применив тригонометрическое тождество разности косинусов, преобразуем это выражение к виду:

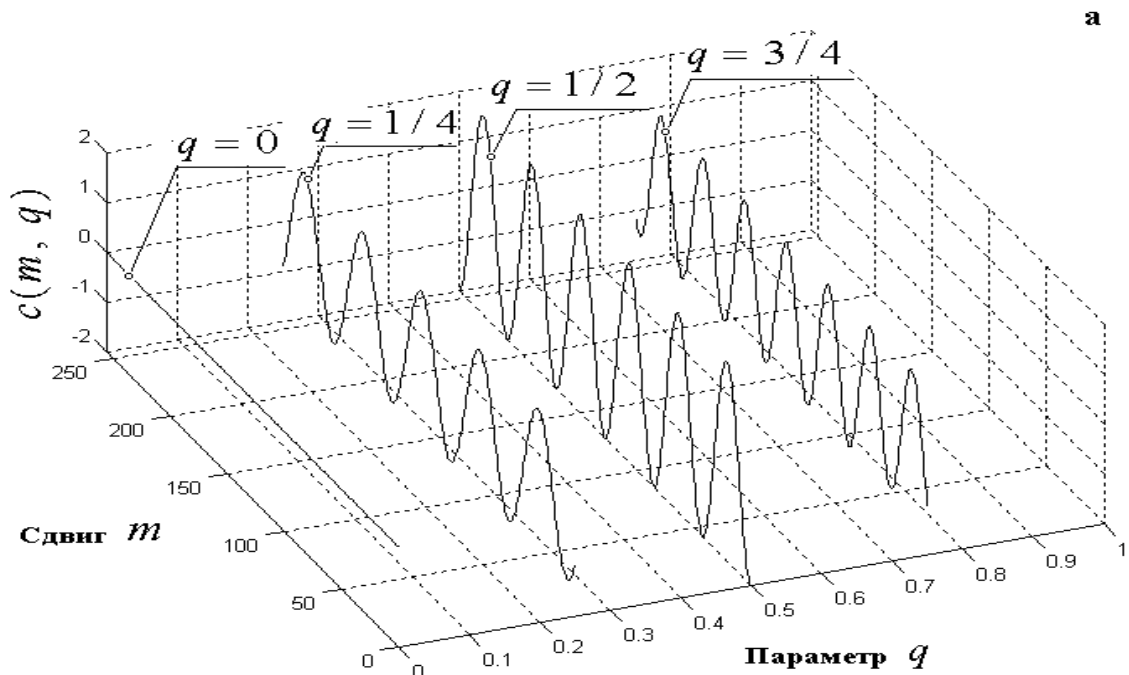
$$c(m, q) = -2 \sin(\pi q) \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)(m - 1) + \pi q \right]. \quad (2.81)$$

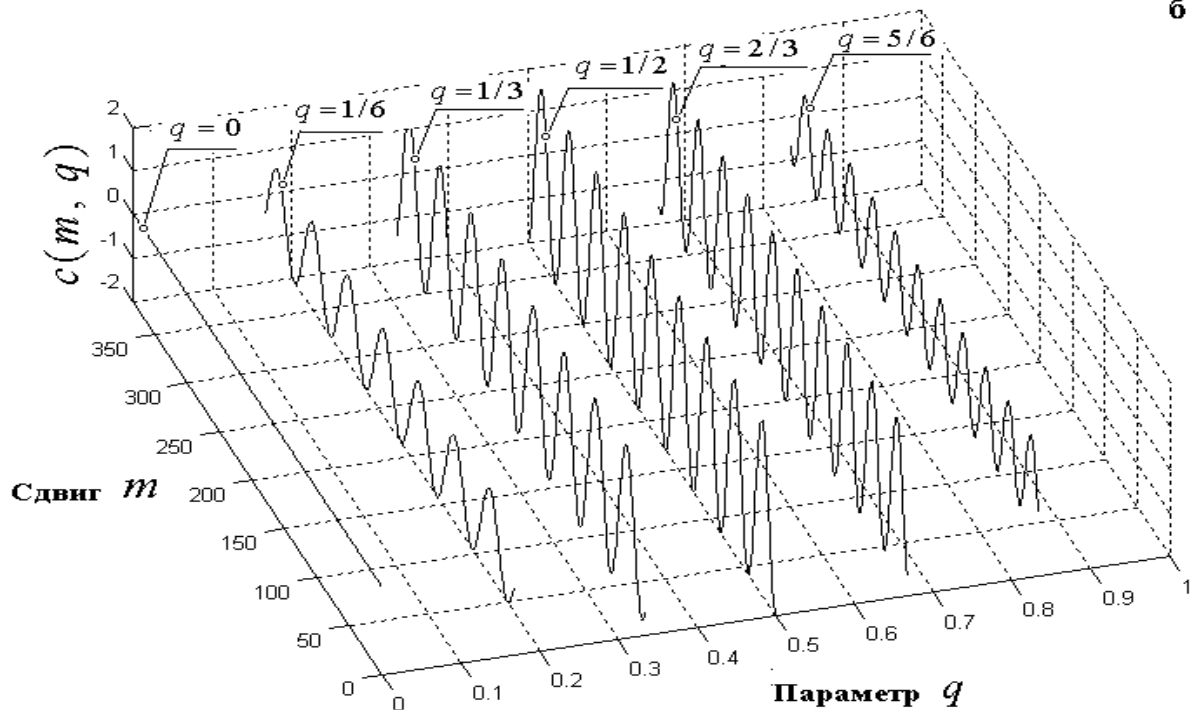
Таким образом, функция $c(m, q)$, характеризующая инвариантность СЭСФ ИС $x(n)$ (2.79) на k -й частоте, при каждом конкретном значении параметра q представляет собой *гармоническое колебание с амплитудой* $2 \sin(\pi q)$, фазой πq и частотой $(k + q)$. При этом инвариантность СЭСФ ИС $x(n)$ имеет место, как и следовало ожидать, только при значении параметра $q = 0$.

На рисунке 2.21 **а, б** показано изменение функции $c(m, q)$ (в координатах: значение $c(m, q)$, сдвиг m , параметр q) для различных значений параметра q при фиксированных значениях частоты k и длительности окна в N отсчетов.

Как мы видим, гармоническая компонента функции $c(m, q)$ при значении параметра $q = 1/2$ имеет максимальную амплитуду, равную двум.

Очевидно, что при изменении частоты гармонического ИС (2.79), амплитуды гармонических компонент функции $c(m, q)$ зависят исключительно от значения параметра q и не зависят ни от N , ни от k .





$$k = 1 \text{ и } N = 64$$

Рисунок 2.21 – Изменение амплитуды функции $c(m, q)$ в зависимости от сдвига m при различных значениях параметра q

Рассмотрим характеристики гармонических компонент функции $c(m, q)$. Если представить у действительной гармонической компоненты $x(n)$ (4.59) значение параметра q в виде дроби $q = 1/p$, где p – целое число, то интервал $N_1 = N \cdot p$ будет являться периодом для функции $x_1(n)$ реального продолжения $x(n)$. Следовательно, при любых q и k среднее значение гармонических компонент функции $c(m, q)$ на интервале $N_1 = N \cdot p$ будет равно нулю:

$$M = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) = 0, \text{ а дисперсия: } D(q) = \frac{1}{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1^2(n)$$

будет зависеть от q , но не зависеть от k .

На рисунке 2.22 приведен график изменения дисперсии функции $c(m, q)$ в зависимости от q , откуда видно, что она имеет максимальное значение при значении параметра $q = 1/2$.

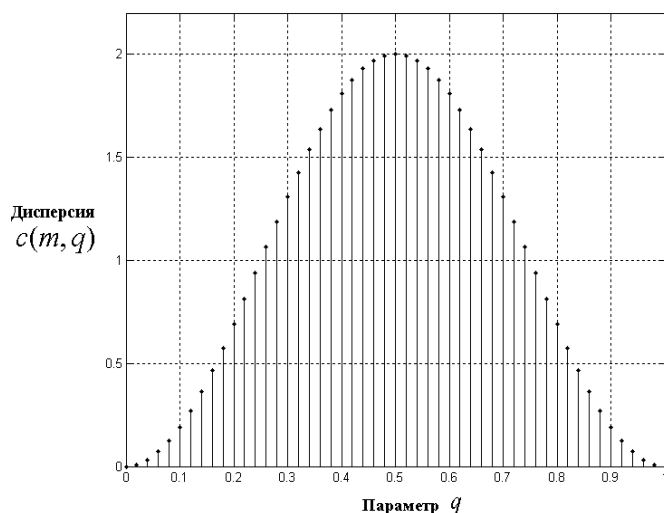


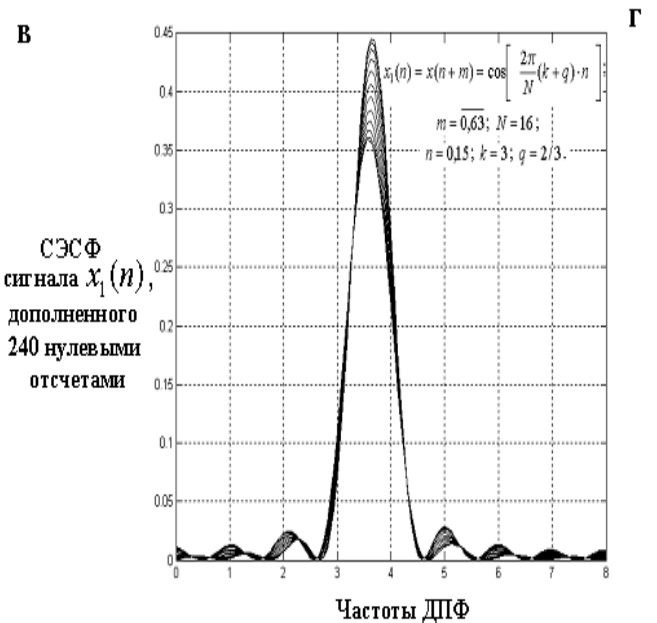
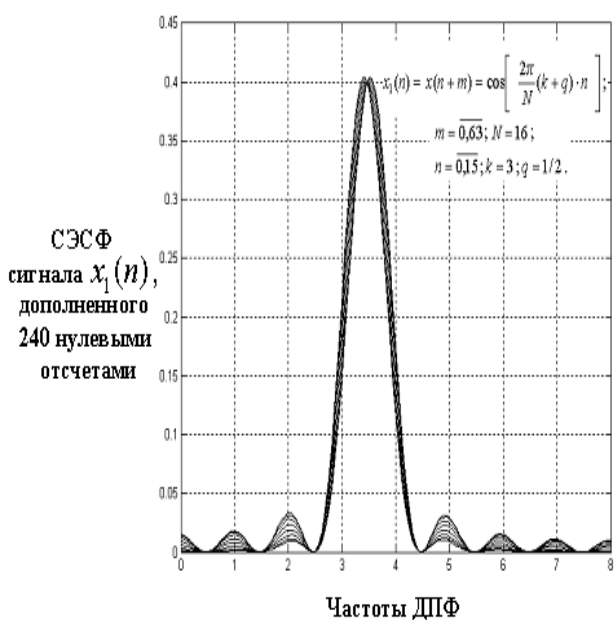
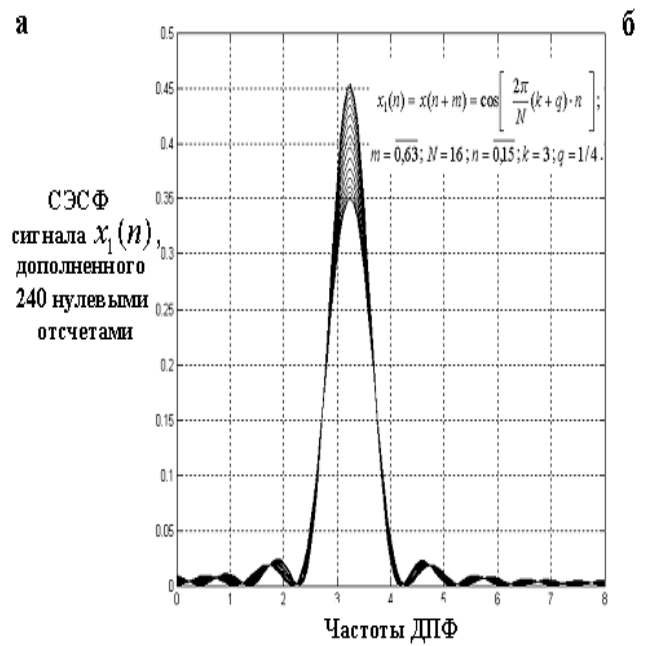
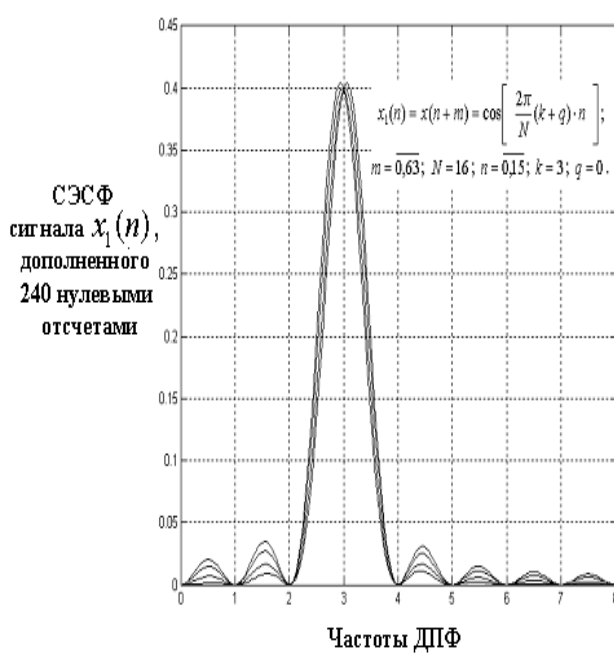
Рисунок 2.22 – Изменение дисперсии функции $c(m, q)$ в зависимости от параметра q

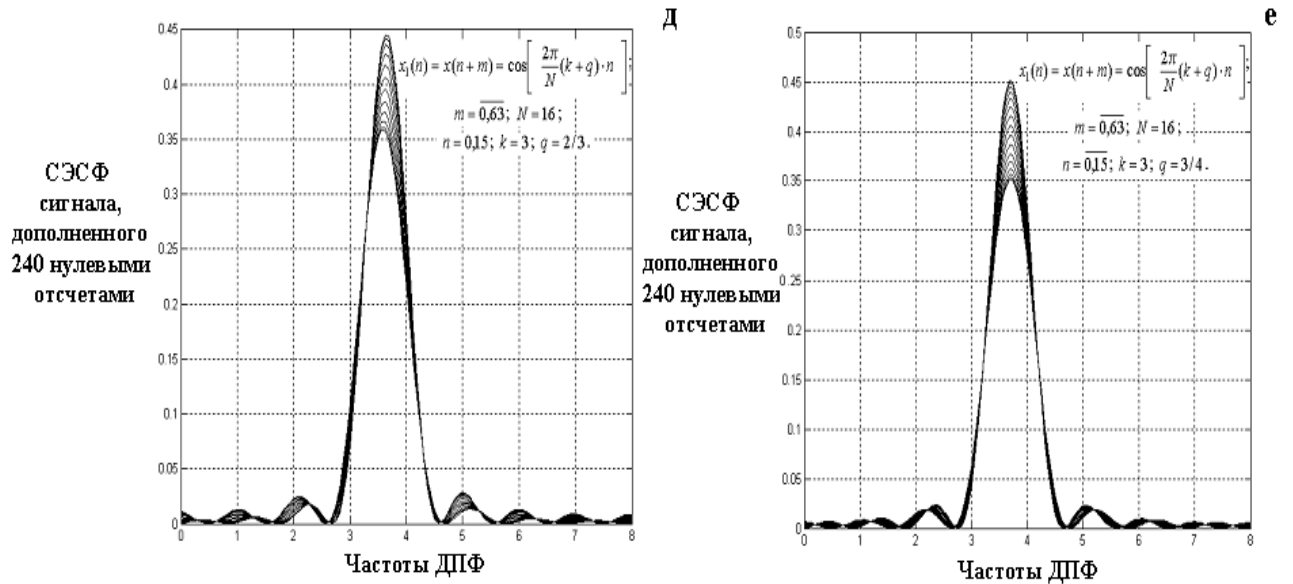
В разделе 2.1 второй главы показано, что ДПФ некоторого дискретного ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ позволяет измерять СЭСФ в дискретном множестве точек $\{2\pi k/N\}$, $k = \overline{0, N-1}$, **непрерывный спектр взвешенного дискретно-временного преобразования Фурье** (ДВПФ) этого ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$. Следовательно, полученный методом ДПФ спектр ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, будет инвариантным временному сдвигу тогда и только тогда, когда модуль взвешенного ДВПФ этого ИС в точках $\{2\pi k/N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$ не будет зависеть от временного сдвига ИС.

Сделаем одно важное замечание, которое следует из полученных результатов.

СЭСФ ИС $x(n)$, состоящего из суммы действительных гармонических колебаний вида (2.79), периоды которых могут быть не кратны интервалу анализа N , не будет инвариантным временному сдвигу, так как для такого ИС теорема сдвига несправедлива. Отметим, что при этом часть гармонических колебаний (или все гармонические колебания), входящие в состав ИС $x(n)$, могут быть также периодическими, но на другом интервале $N_1 > N$. СЭСФ действительной гармонической компоненты $x(n)$ вида (2.79) при $q \neq 0$ не будет инвариантен ее временному сдвигу. Для иллюстрации эффекта неинвариантности СЭСФ был

выбран сигнал в виде гармонической компоненты (2.79) при следующих параметрах: $N=16$, $k=3$, $q=0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4$, число нулевых отсчетов 240, число сдвигов (по одному отсчету) в окне в 16 отсчетов – $m=\overline{0,63}$. При каждом сдвиге во временном окне естественного продолжения ИС с заданным параметром q , он (сигнал) дополнялся нулевыми отсчетами. После каждого сдвига ИС и дополнения его нулевыми отсчетами находилась его СЭСФ. Все СЭСФ при определенном значении параметра q выводились на один график. Полученные графики представлены соответственно на рисунке 2.23, а, б, в, г, д, е.





$$m = \overline{0,63}; N = 16; n = \overline{0,15}; k = 3$$

Рисунок 2.23 – Неинвариантность СЭСФ ИС

$$x_1(n) = x(n+m) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k+q) \cdot n \right],$$

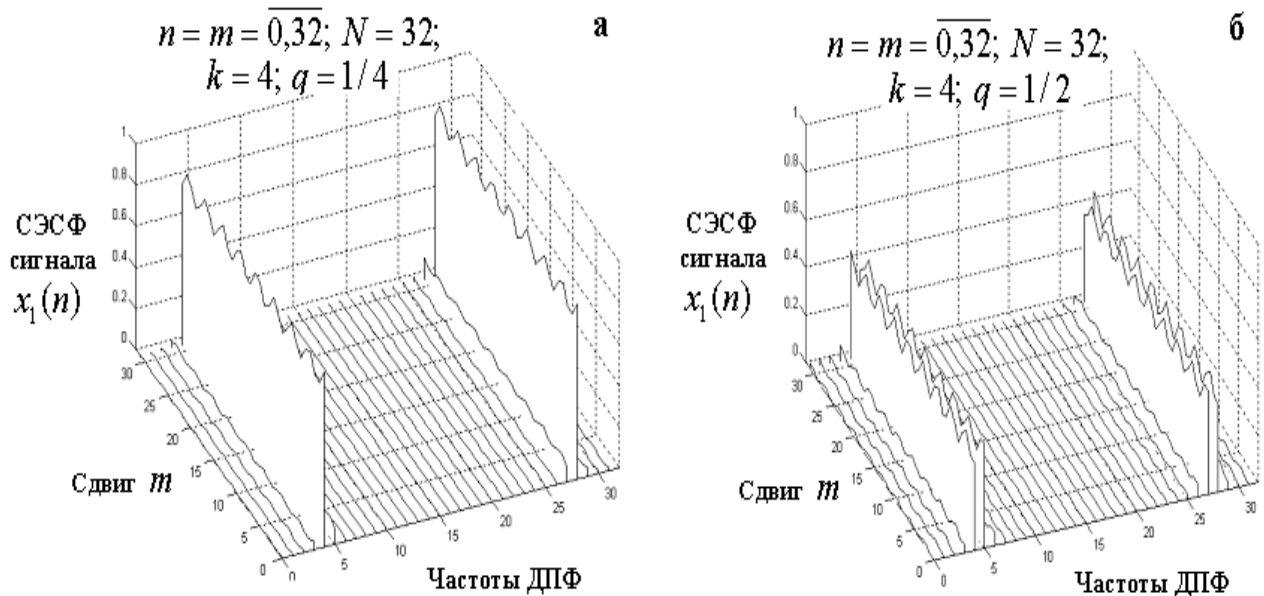
дополненного 240 нулевыми отсчетами, при различных значениях q

На графиках выведены значения СЭСФ только на положительных частотах в силу того, что СЭСФ действительных сигналов симметричны относительно точки $N/2$.

«Размытость» кривой на рисунке 2.23 характеризует изменение ДВПФ исходного ИС от сдвига при «естественном» (реальном) продолжении входного ИС, и, следовательно, с учетом взаимосвязи ДПФ и ДВПФ, характеризует на частотах измерений неинвариантность СЭСФ исходного ИС при его реальном продолжении.

С другой стороны, эффект неинвариантности СЭСФ ИС (4.59) можно проиллюстрировать результатами измерения его при различных значениях параметра q , которые приведены на рисунке 2.24. На рисунке 2.24 **а, б** мы видим проявление сразу двух явлений, сопровождающих измерения спектров рассматриваемого ИС методом ДПФ. Это известный **эффект размывания спектральных составляющих** (называемый часто «эффектом утечки») и

эффект неинвариантности, выявленный в настоящей работе (предлагаемый английский термин «*non-invariance*»).



а $\Rightarrow q = 1/4$, б $\Rightarrow q = 1/2$

Рисунок 2.24 – СЭСФ гармонической компоненты $x_1(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)n \right]$

Отметим, что если значение параметра q равно нулю, то ни один из эффектов не проявляется. Отсутствие проявления эффекта утечки объясняется тем, что коэффициенты ДПФ «падают» в нули взвешенного ДВПФ отрезка гармонической компоненты. Отсутствие проявления эффекта неинвариантности связано с тем, что естественное (реальное) продолжение ИС во временном окне совпадает с циклическим (периодическим) продолжением, «навязываемым» ДПФ.

В том случае, когда значение параметра q не равно нулю (рисунок 2.24, а и б), проявляются оба эффекта: **эффект размывания спектральных составляющих и эффект неинвариантности**.

С точки зрения приложений методов обработки ДИС важно учитывать, что метод ДПФ, определяя значения взвешенного ДВПФ на частотах $\{2\pi(k)/N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$, не дает ответа на вопрос, каковы значения взвешенного ДВПФ между этими частотами, порождая эффект частотокола [151]. Следовательно, ДПФ

не дает ответа и на вопрос об инвариантности в других точках, не равных $\{2\pi(k)/N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$.

Для ответа на эти вопросы рассмотрим инвариантность энергетического спектра действительного гармонического ИС при дискретных скользящих измерениях на основе преобразования ДПФ-П.

4.6. Инвариантность скользящего энергетического спектра действительного гармонического ИС в параметрических базисах Фурье

Введем символическое обозначение для ДПФ-П и ОДПФ-П параметрической N -периодической последовательности $x_\theta(n)$, $n = \overline{0, N-1}$:

$$x_\theta(n) \xleftrightarrow{F-P} S_N(k, \theta). \quad (2.82)$$

Тогда теорему сдвига для ДПФ-П можно записать в следующем виде [64 – 66, 72]:

$$\text{если } x_\theta(n) \xleftrightarrow{F-P} S_N(k, \theta), \text{ то } x_\theta(n+m) \xleftrightarrow{F-P} W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k, \theta). \quad (2.83)$$

Из данной теоремы непосредственно следует инвариантность параметрического скользящего энергетического спектра Фурье (СЭСФ-П):

$$G_N(k, \theta) = \frac{P_N(k, \theta)}{\Delta f} = N |S_N(k, \theta)|^2, P_N(k, \theta) = |S_N(k, \theta)|^2, \Delta f = \frac{1}{N}; \quad (2.84)$$

$$\text{где } S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n};$$

$$W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), k = \overline{0, (N-1)}; \quad (2.85)$$

параметрической N -периодической последовательности $x_\theta(n)$ (2.24).

Полученный результат не является неожиданным, так как «искусственное» продолжение ИС, навязанное ДПФ-П, согласовано с используемым преобразованием. Рассмотрим скользящее измерение на $(k + \theta)$ -й частоте СЭСФ-П дискретного действительного ИС $x(n)$ при «естественном» его продолжении. Разностное уравнение СДПФ (2.51) скользящего измерения на k -й частоте спектра Фурье действительного дискретного ИС $x(n)$ при реальном его

продолжении (рисунок 2.18) и сдвиге временного окна на m отсчетов, запишем в следующем виде: [73, 74]:

$$S_m(k, \theta) = W_N^{-(k+\theta)} S_{(m-1)}^\circ(k, \theta); \quad (2.86)$$

где $W_N^{-(k+\theta)} = \exp\left[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)\right]$; $m = 1, 2, 3, \dots$ - сдвиг временного окна;

$$S_{(m-1)}^\circ(k, \theta) = [S_{(m-1)}(k, \theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)];$$

N - число отсчетов во временном окне.

Положим, что итерационный процесс выхода алгоритма СДПФ-П на режим скользящего измерения происходит на нулевом шаге, т. е. когда выходное значение СДПФ-П равно значению коэффициента ДПФ-П:

$$S_0(k, \theta) = S_{(m-1)}(k, \theta) \Big|_{(m-1)=0}. \quad (2.87)$$

Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, запишем $S_{(m-1)}(k, \theta)$ и $S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_{(m-1)}(k, \theta) &= |S_{(m-1)}(k, \theta)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}) + j \sin(\varphi_{(m-1)})]; \\ S_{(m-1)}^\circ(k, \theta) &= |S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ)]; \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\text{где } \cos(\varphi_{(m-1)}) = \frac{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k, \theta)]}{|S_{(m-1)}(k, \theta)|};$$

$$\sin(\varphi_{(m-1)}) = \frac{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k, \theta)]}{|S_{(m-1)}(k, \theta)|};$$

$$\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ) = \frac{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k)] - \operatorname{Re}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]\}}{|S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)|};$$

$$\sin(\varphi_{(m-1)}^\circ) = \frac{\{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k, \theta)] + \operatorname{Im}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1)]\}}{|S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)|};$$

$$|S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)| =$$

$$= \sqrt{\{\operatorname{Re}[S_{(m-1)}(k, \theta)] - \operatorname{Re}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[S_{(m-1)}(k, \theta)] + \operatorname{Im}[\exp(-j2\pi\theta)x(m-1)]\}^2}.$$

Учитывая, что:

$$|W_N^{-(k+\theta)}| = \cos^2\left[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)\right] + \sin^2\left[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)\right] = 1; \quad W_N^{-k} = 1 \cdot [\cos(\beta_k) + j \sin(\beta_k)];$$

$$\beta_k = \frac{2\pi}{N}(k + \theta); \quad |(a + jb) \cdot (c + jd)| = |(a + jb)| \cdot |(c + jd)|;$$

$$S_m(k, \theta) = |S_m(k, \theta)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k)];$$

$$|S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)| = |S_m(k, \theta)|, \quad (2.89)$$

представим разностное уравнение (4.66) в следующей форме:

$$\begin{aligned} S_m(k, \theta) &= W_N^{-(k+\theta)} S_{(m-1)}^\circ(k, \theta) = |S_{(m-1)}^\circ(k, \theta)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k)] = \\ &= |S_m(k, \theta)| \cdot [\cos(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k) + j \sin(\varphi_{(m-1)}^\circ + \beta_k)]; \end{aligned} \quad (2.90)$$

Из соотношения (2.90) непосредственно следует, что значение скользящего параметрического энергетического фурье-спектра на $(k + \theta)$ -й частоте на m -м шаге равно:

$$G_m(k, \theta) = N \cdot |S_{(m-1)}^*(k, \theta)|^2 = N \cdot |S_m(k, \theta)|^2. \quad (2.91)$$

Из понятия инвариантности временному сдвигу непосредственно следует, что параметрический скользящий энергетический спектр ИС $x(n)$ на $(k + \theta)$ -й частоте будет инвариантен к временному сдвигу ИС тогда, когда при любом целом $m \geq 1$:

$$G_m(k, \theta) = G_0(k, \theta) = N \cdot |S_0(k, \theta)|^2. \quad (2.92)$$

Учитывая соотношение (2.87), представим выражение (2.92) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} G_m(k, \theta) &= N \cdot |S_m(k, \theta)|^2 = \\ &= N \cdot |[S_{(m-1)}(k, \theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]|^2, \end{aligned} \quad (2.93)$$

и введем переменную:

$$c_\theta(m) = [-\exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)], \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.94)$$

Представляется очевидным, что СЭСФ-П ИС $x(n)$ на $(k + \theta)$ -й частоте будет иметь место при выполнении равенства:

$$|S_m(k, \theta)| = |[S_{(m-1)}(k, \theta) - \exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)]|. \quad (2.95)$$

Несложно установить, что это возможно в двух частных случаях.

1. Для периодической входной последовательности $x(n)$ при $\theta = 0$:
 $x(n \pm N) = x(n)$; $n = 0, N-1$.
2. Для параметрической N -периодической последовательности $x_\theta(n)$
при $0 < \theta < 1$: $x_\theta(n) = x(n \bmod N)W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}$.

В общем же случае СЭСФ-П ИС $x(n)$ не будет инвариантен временному сдвигу ИС. На рисунке 2.25 приведена графическая интерпретация полученных результатов.

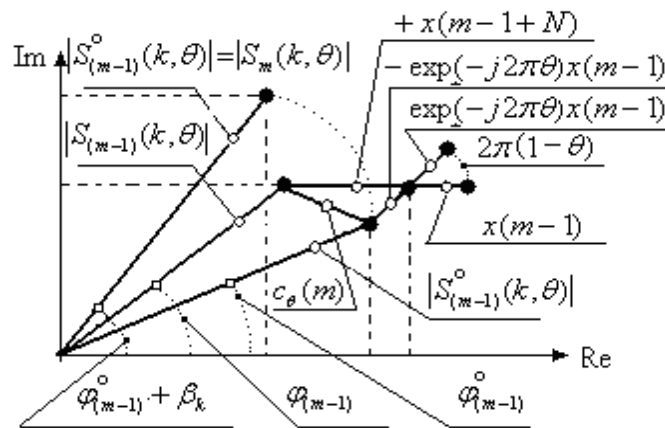


Рисунок 2.25 – Рекуррентное измерение m -го значения модуля параметрического скользящего спектра дискретного действительного ИС на $(k + \theta)$ -й частоте

Оценим количественные показатели, характеризующие неинвариантность параметрического скользящего энергетического спектра Фурье сдвигу действительного дискретного тонального ИС.

Рассмотрим измерение СЭСФ-П во временном окне в N отсчетов для действительнзначной тональной компоненты вида:

$$x(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)n \right], \text{ где } 0 \leq q < 1. \quad (2.96)$$

Функция $c_\theta(m)$ (2.94) в этом случае описывается следующим соотношением:

$$\begin{aligned} c_\theta(m) &= [-\exp(-j2\pi\theta)x(m-1) + x(m-1+N)] = \\ &= -\cos(2\pi\theta) \cdot \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)(m-1) \right] \right\} + j \sin(2\pi\theta) \cdot \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)(m-1) \right] \right\} + \\ &+ \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)(m-1+N) \right]. \end{aligned} \quad (2.97)$$

В силу периодичности функции $\cos\alpha$ третий член суммы (2.97) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1+N) \right] &= \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) + 2\pi q \right] = \\ &= \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right] \cos(2\pi q) + \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right] \sin(2\pi q). \end{aligned} \quad (2.98)$$

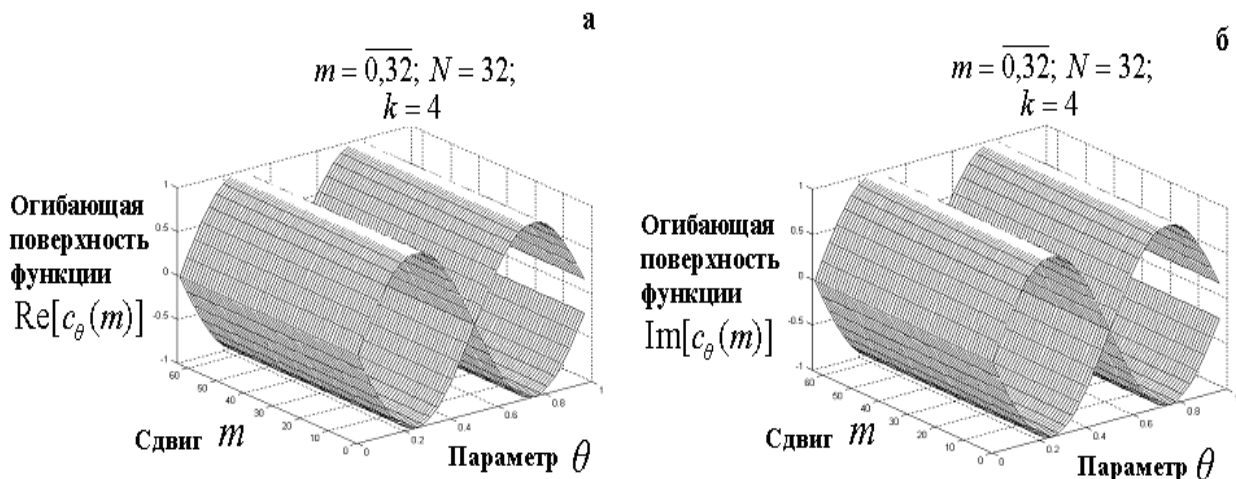
Подставив (2.98) в (2.97) окончательно получим:

$$\begin{aligned} c_\theta(m) &= \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right] \cdot [-\cos(2\pi\theta) + \cos(2\pi q)] + \\ &+ \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right] \sin(2\pi q) + j \sin(2\pi\theta) \cdot \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+q)(m-1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если параметр θ ДПФ-П равен параметру q ИС (2.96), то получим:

$$c_\theta(m) = \left\{ \sin \left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)(m-1) \right] + j \cos \left[\frac{2\pi}{N}(k+\theta)(m-1) \right] \right\} \cdot \sin(2\pi\theta). \quad (2.99)$$

На рисунке 2.26 **а**, **б** показано изменение реальной и мнимой частей огибающей функции $c_\theta(m)$ в координатах сдвиг m и параметр θ при определенных значениях частоты k и длительности ИС N .



а – реальная часть огибающей комплексной функции $c_\theta(m)$;

б – мнимая часть огибающей комплексной функции $c_\theta(m)$

Рисунок 2.26 – Изменение комплексной функции $c_\theta(m)$ в координатах сдвиг m и параметр θ при значении частоты $k = 3$ и длительности ИС $N = 16$

Как мы видим, максимумы амплитуд функций $\text{Re}[c_\theta(m)]$ и $\text{Im}[c_\theta(m)]$ равны единице и соответствуют значениям $\theta = 1/4$ и $\theta = 3/4$.

Можно показать, что они (максимумы) не зависят от N и k , а средние значения функций $\text{Re}[c_q(m)]$ и $\text{Im}[c_q(m)]$ при фиксированном θ равны нулю.

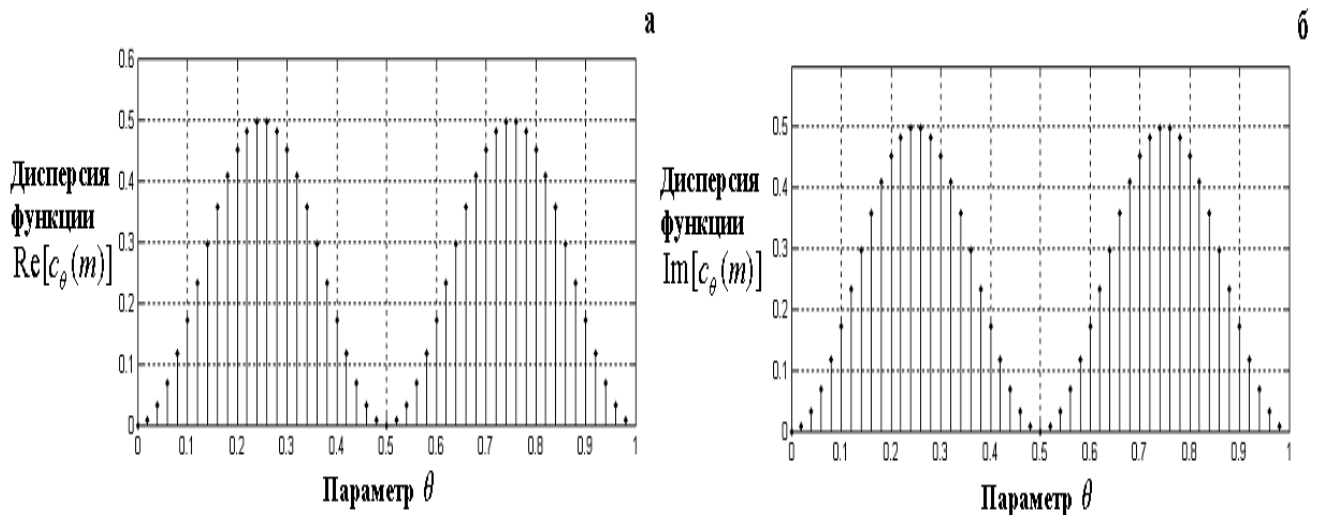
На рисунке 2.27 приведено изменение дисперсий функций: $\text{Re}[c_\theta(m)]$ и $\text{Im}[c_\theta(m)]$ в зависимости от параметра θ .

Измерения СЭСФ-П проведем для модельных действительных сигналов $y_i(n)$; $i = \overline{1, 3}$ вида:

$$y_1(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k_1 + q_1)n \right]; y_2(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k_2 + q_2)n \right];$$

$$y_3(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k_3 + q_3)n \right];$$

где $k_1 = 4$, $k_2 = 7$; $k_3 = 8$; $\theta_1 = q_1 = 0$, $\theta_2 = q_2 = 1/2$, $\theta_3 = q_3 = 3/4$.

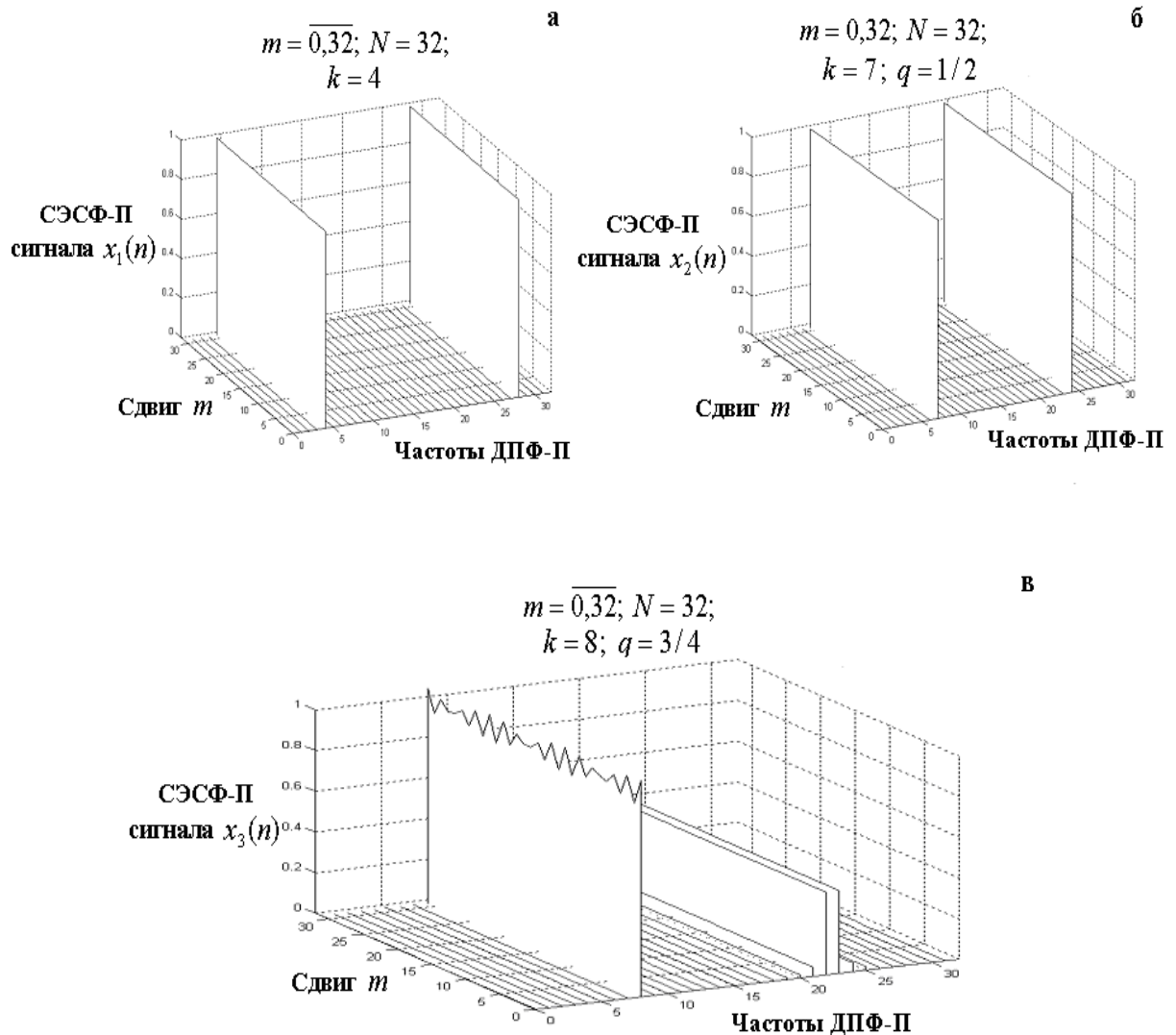


а – дисперсия реальной части комплексной функции $c_\theta(m)$;

б – дисперсия мнимой части комплексной функции $c_\theta(m)$

Рисунок 2.27 – Изменение дисперсии комплексной функции $c_\theta(m)$

На рисунке 2.28 приведены результаты измерения параметрических скользящих энергетических спектров Фурье действительных сигналов $y_1(n); y_2(n); y_3(n)$.



$$k_1 = 4, k_2 = 7; k_3 = 8; \theta_1 = q_1 = 0, \theta_2 = q_2 = 1/2, \theta_3 = q_3 = 3/4$$

Рисунок 2.28 – СЭСФ-П гармонических компонент

$$x_i(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k_i + q_i)n \right]; i = \overline{1,3}$$

По результатам проведенного моделирования можно сделать ряд выводов, крайне важных для практики обработки ИС на базе преобразования ДПФ-П.

Как известно, СЭСФ ИС (4.76) при $q = 0$ инвариантен к его временному сдвигу, что и иллюстрирует рисунок 2.28, а. При этом эффект размывания спектральных составляющих (эффект утечки) в этом случае не проявляется.

Отсутствие проявления этого эффекта объясняется тем, что коэффициенты ДПФ-П при $\theta = 0$ «падают» в нули функции $\frac{\sin x}{N \sin(x/N)}$.

Рисунок 2.28, б иллюстрирует появление при $\theta = q = 1/2$ **нового явления**, которое не наблюдается в системе ДЭФ, а именно, проявление **эффекта инвариантности параметрического текущего энергетического фурье-спектра ИС**. При этом эффект размывания спектральных составляющих практически не наблюдается и при условии, что $0 \leq (\theta = q) < 1$. Отсутствие проявления данного эффекта объясняется тем, что коэффициенты ДПФ-П «падают» в нули взвешенного ДВПФ гармонической компоненты (4.76). При этом эффект размывания спектральных составляющих (эффект утечки) в этом случае практически не проявляется. Эффект неинвариантности СЭСФ-П (рисунок 2.28, в), напротив, проявляется тогда, когда $(\theta = q) \neq 0, 1/2$.

В заключение раздела укажем на один **феномен**, проявившийся при моделировании процесса измерения СЭСФ-П сигналов вида (4.76). Суть которого заключается в том, что для гармонической компоненты $x(n) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k + q)n \right]$, при $\theta = q$ и естественном ее продолжении во временном окне:

- СЭСФ-П на положительных частотах неинвариантен временному сдвигу, но проявление эффекта размывания спектральных составляющих отсутствует;
- на отрицательных частотах в СЭСФ-П проявляется эффект размывания спектральных составляющих, в то же время наблюдается инвариантность СЭСФ-П временному сдвигу.

Проявление этого феномена для частного случая $k_3 = 8$; $\theta_3 = q_3 = 3/4$ мы наблюдаем на рисунке 2.28, в. Объяснение этого явления достаточно простое, но только после того, когда на него указали. Вернемся к рисунку 2.23, е и построим в логарифмическом масштабе СЭСФ $G_{x_1, m, \text{ÄÄïð}}$ ИС

$$x_1(n) = x(n+m) = \cos \left[\frac{2\pi}{N} (k+q) \cdot n \right]; m = \overline{0,63}; N = 16; n = \overline{0,15}; k = 3,$$

дополненного 240 нулевыми отсчетами:

$$G_{x_1, m, \text{ÄÄÏÖ}}^{\text{lg}} = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{G_{x_1, m, \text{ÄÄÏÖ}}}{\max[G_{x_1, m, \text{ÄÄÏÖ}}]} \right].$$

СЭСФ данного ИС приведена на рисунке 2.29.

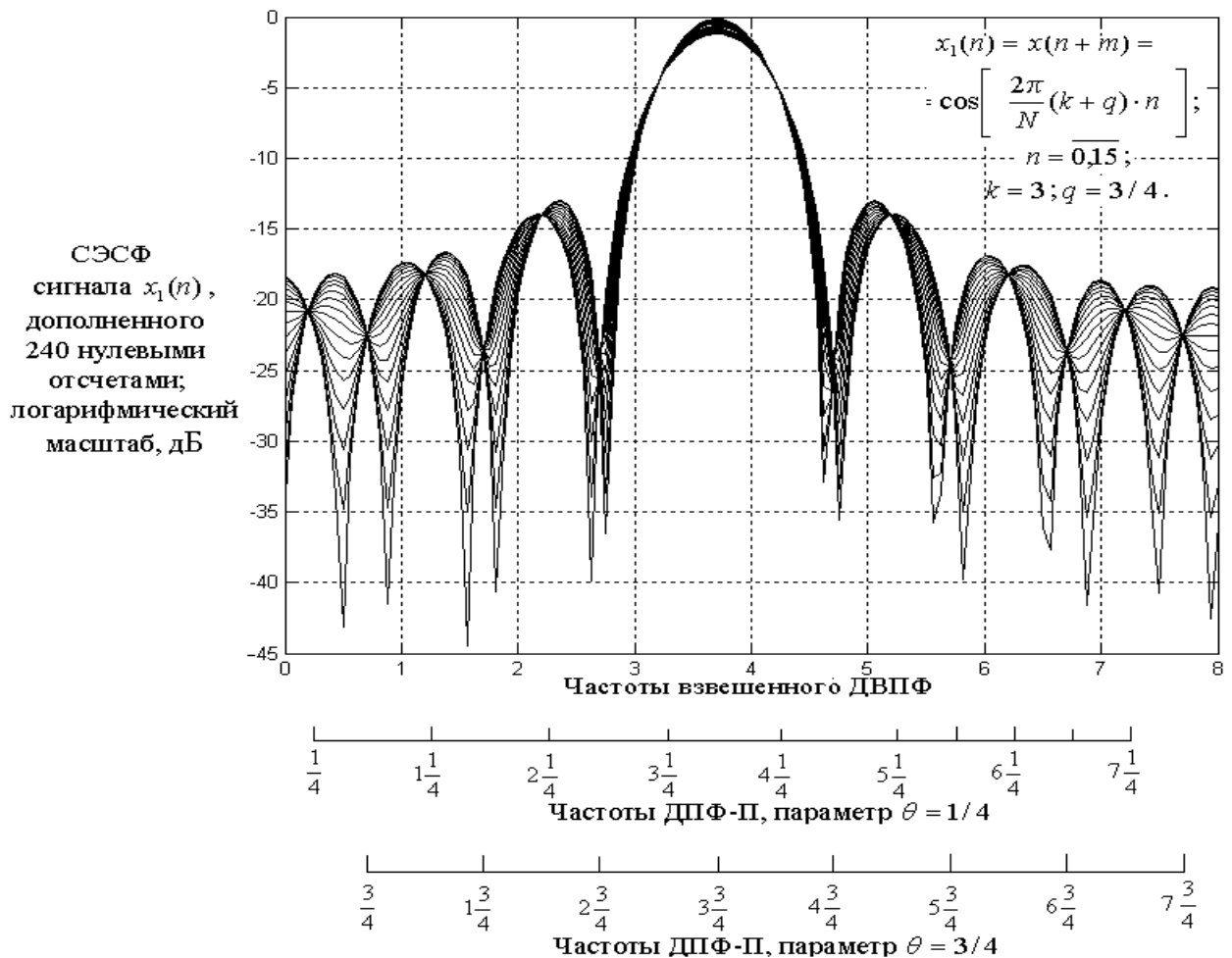


Рисунок 2.29 – Измерение методом СЭСФ-П взвешенного ДВПФ при значениях параметра $\theta = 1/4$ и $\theta = 3/4$

Как мы видим, сетка частот параметрического дискретного преобразования Фурье при значениях параметра $\theta = 1/4$ и $\theta = 3/4$ попадает в узлы взвешенного дискретно-временного преобразования Фурье. Представляется очевидным, что при измерении СЭСФ в узлах взвешенного ДВПФ мы имеем инвариантность этих

значений СЭСФ временному сдвигу. При этом СЭСФ-П позволяет измерять СЭСФ на сетке частот, задаваемой параметром θ .

При измерении методом СЭСФ-П взвешенного ДВПФ на сетке частот, согласованной (параметром θ) с гармоническим сигналом, мы наблюдаем на частотах $(k + \theta)$ провалы более 20 децибел относительно максимального значения взвешенного ДВПФ на частоте гармонического ИС.

Проявление рассматриваемого феномена на отрицательных частотах объясняется тем, что, как показано в разделе 2.4 второй главы, ДПФ-П для действительных последовательностей при $\theta \neq 0, 1/2$ обладает одним очень важным свойством, которое автор назвал *перекрестной комплексно-сопряженной симметрией*.

ВЫВОДЫ

1. Дискретное преобразование Фурье занимает ведущую роль среди методов обработки ДИС в частотной и частотно-временной областях. В рамках ДПФ определены три основных положения теории ЦОИС: определение ИС на конечном интервале, определение сдвига ИС как циклической перестановки его отсчетов, определение полной базисной системы в виде системы дискретных экспоненциальных базисных функций.
2. При практическом применении ДПФ возникает ряд проблем, появление которых связано с проявлением нежелательных, специфических эффектов (эффекты наложения и частотокола, эффект утечки, гребешковый эффект). Известные методы борьбы с принципиальными недостатками ДПФ (операция дополнения нулями, использование временных, частотных и спектральных окон и т.д.), с одной стороны, обладают ограниченными возможностями по подавлению нежелательных эффектов ДПФ, с другой стороны, в свою очередь порождают новые проблемы.
3. С целью разработки методов обработки ДИС на конечных интервалах во временной области в теорию ЦОИС автором работы предложено

дискретно-частотное преобразование Фурье, которое ставит в соответствие дискретному спектру сигнала непрерывный временной сигнал.

4. Для решения задач обработки ДИС сложной структуры предложен новый класс базисных систем, основанный на параметрических дискретных экспоненциальных функциях, введенных автором.
5. Разработано, исследовано и внедрено в практику обработки ДИС параметрическое дискретное преобразование Фурье, которое является обобщением дискретного преобразования Фурье. Для данного преобразования доказана справедливость теорем линейности, сдвига, корреляции и Парсеваля. Параметрическое дискретное преобразование Фурье позволяет повысить точность результатов измерения информационных параметров ДИС в частотной и частотно- временной областях.
6. Для решения проблем обработки ДИС, порождаемых эффектом частотокола во временной области, предложено новое преобразование – модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье, которое позволяет определять значения временных спектров. Исследованы аналитические свойства базисной системы модифицированных параметрических дискретных экспоненциальных функций, лежащей в основе данного преобразования.
7. Исследование параметрического дискретного преобразования Фурье действительных ИС выявило фундаментальное свойство перекрестной комплексно-сопряженной симметрии их коэффициентов (бинов). Данное свойство позволяет комплексным параметрическим дискретным преобразованием Фурье получать одновременно два спектра действительных ИС: при значении параметра θ и при значении параметра $1 - \theta$.
8. Предложено обобщение структуры гребенчатого фильтра, которое позволяет решить проблему погрешностей коэффициентов фильтров на основе частотной выборки, не теряя при этом одно из важных достоинств

данного вида фильтров – возможность рекуррентного получения значений спектра ДИС.

9. Проведено два обобщения алгоритма Герцеля – для целых и дробных значений частот, обеспечивающих высокую разрешающую способность по частоте, устойчивость работы фильтра, полный контроль над резонансной частотой фильтра Герцеля.
10. Широкое применение ДПФ при цифровой обработке детерминированных, квазидетерминированных и случайных ДИС на конечных интервалах во многом объясняется тем, что скользящий энергетический спектр Фурье N -периодических сигналов инвариантен временному сдвигу исходного ИС. Однако на практике исследуемый гармонический ИС на интервале обработки, как правило, не является N -периодическим сигналом (даже если сам сигнал периодичен), так как его продолжения, задаваемое ДПФ и реальное (естественное), не совпадают. Рассмотрен вопрос инвариантности скользящего энергетического спектра действительного гармонического ИС в базисе Фурье и в параметрических базисах Фурье. Исследованы свойства открытого автором эффекта неинвариантности скользящего энергетического спектра Фурье и скользящего энергетического параметрического спектра Фурье гармонического ИС.

ГЛАВА 3

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ

3.1. Теоретико-вероятностные характеристики случайных информационных сигналов и аксиомы их измерения

Исторически сложилось два взаимосвязанных, но не подменяющих друг друга, направления в обработке случайных ДИС (СДИС):

- частотный подход (называемый также *спектральным* или *гармоническим* подходом);
- корреляционный подход (иногда называемый *временным* подходом).

Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки. Однако с появлением эффективных алгоритмов получения коэффициентов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) – алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), частотный подход получил дополнительное (и решающее) преимущество перед корреляционным подходом. Оказалось, что даже при выборе исследователем корреляционного подхода, обработку СДИС эффективнее проводить в спектральной области с последующим переходом в корреляционную область.

Прежде чем переходить к изложению теоретических основ обработки СДИС на конечных интервалах, сделаем ряд замечаний и дадим краткие пояснения по применяемому понятийному аппарату. Необходимость таких пояснений связана с тем, что, к сожалению, понятия, термины и определения, принятые в «*математической*» и в «*технической*» литературе, очень часто не совпадают. А терминология, применяемая авторами прикладных публикаций по обработке СДИС в различных предметных областях, может заметно различаться между собой. Например, наиболее часто путают свойства дискретного

преобразования Фурье со свойствами непрерывно-временного преобразования Фурье и/или дискретно-временного преобразования Фурье.

В предлагаемых теоретических основах цифровой обработки СДИС (включающих дискретные статистические измерения (ДСИ) вероятностных характеристик СДИС) на конечных интервалах автор делает (аналогично работе [27, 28]) различие между следующими оценками теоретико-вероятностных характеристик СДИС стационарных по А.Я. Хинчину (т.е. в широком смысле):

- **выборочная оценка** (оценка, полученная в конкретном эксперименте, «*estimates*»). В работе приняты следующие обозначения для выборочных оценок математического ожидания, корреляционной функции, дисперсии, энергетического спектра и параметрического энергетического спектра:

$$M_{x,N}, K_{x,N}(r), K_{x,N}^1(r), D_{x,N}, G_{x,N}(k), G_{x,N}(k, \theta).$$

- **оценка, рассматриваемая как случайная величина** («*estimators*»). В работе приняты следующие обозначения для оценок математического ожидания, корреляционной функции, дисперсии, энергетического спектра и параметрического энергетического спектра:

$$M_{X,N}, K_{X,N}(r), K_{X,N}^1(r), D_{X,N}, G_{X,N}(k), G_{X,N}(k, \theta)$$

- **истинные (теоретические) значения характеристик стационарных случайных сигналов** («*the theoretical value*»). В работе приняты следующие обозначения истинных значений математического ожидания, корреляционной функции, дисперсии, энергетического спектра и параметрического энергетического спектра:

$$M_X, K_X(r), D_X, \Gamma_X(k), \Gamma_X(k, \theta).$$

В случае дискретного варианта возможны две интерпретации полученной реализации СДИС $x_k(n)$, $n = \overline{0, N-1}$.

С одной стороны, ее можно считать значением $X_{N,x} = [(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})]^T$ (здесь T – символ операции транспонирования) N -мерной случайной величины

$X_N = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$, с другой – отрезком $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ СДИС $X(n)$. В диссертационной работе применяются оба эти подхода.

Остановимся кратко и на таком важном моменте, как **выбор аксиом измерения (способов измерения, процедур оценивания)** теоретико-вероятностных характеристик СДИС. На практике, благодаря работам по спектральному анализу и математической статистике [4, 27, 28, 40, 172], широкое распространение получили следующие аксиомы измерения теоретико-вероятностных характеристик СДИС $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$:

для математического ожидания M_x :

$$M_{X,N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n); \quad (3.1)$$

для корреляционной функции $K_x(r)$:

$$K_{X,N}(r) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|r|} [X(n) - M_{X,N}] [X(n+|r|) - M_{X,N}], & 0 \leq |r| \leq N-1; \\ 0 & |r| > N-1 \end{cases} \quad (3.2)$$

или:

$$K_{X,N}^1(r) = \begin{cases} \frac{1}{N-|r|} \sum_{n=0}^{N-|r|} [X(n) - M_{X,N}] [X(n+|r|) - M_{X,N}], & 0 \leq |r| \leq N-1; \\ 0 & |r| > N-1 \end{cases} \quad (3.3)$$

для дисперсии D_x :

$$D_{X,N} = \frac{N}{N-1} K_{X,N}(0); \quad (3.4)$$

для энергетического спектра $\Gamma_x(k)$:

$$G_{X,N}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{(k)n} \right|^2; \quad (3.5)$$

$$W_N = \exp(-j2\pi/N); k = \overline{0, N-1};$$

для параметрического энергетического спектра $\Gamma_x(k, \theta)$:

$$G_{X,N}(k, \theta) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{(k+\theta)n} \right|^2; \quad (3.6)$$

$$W_N = \exp(-j2\pi / N); k = \overline{(0, N-1)}; 0 \leq \theta < 1.$$

Сделаем два замечания по рассмотренным аксиомам измерения теоретико-вероятностных характеристик СДИС стационарных по А.Я. Хинчину.

Во-первых, они, как допускается многими [27], **выбраны по интуиции** и не являются оптимальными в смысле какого-нибудь критерия. Во-вторых, известно, что оценки $K_{X,N}(r)$ (3.2), $K_{X,N}^1(r)$ (3.3) обладают **свойством эргодичности** (свойство, при котором среднее по времени сходится по вероятности к среднему по ансамблю). Математическое ожидание оценок: $M_{X,N}$ сходится по вероятности к M_X , $K_{X,N}(r)$ и $K_{X,N}^1(r)$ сходится по вероятности к $K_X(r)$, а их дисперсии пропорциональны $1/N$. В то же время оценка $G_{X,N}(k)$ свойством эргодичности не обладает [7, 27, 51]. Отметим, что ошибочная посылка: «**если оценка обладает эргодическим свойством, то и ее Фурье-преобразование обладает этим же свойством**» была источником многих заблуждений при измерениях теоретико-вероятностных характеристик случайных сигналов.

Шустер [49, 57, 174], предложивший оценку $G_{X,T}(f)$ для дискретного случая и назвавший ее **периодограммой**, указывал на необходимость усреднения оценок $G_{X,N}(f)$. Игнорирование этого факта, в том числе, возможно, из-за отсутствия на тот момент глубоких теоретических исследований процедур сглаживания $G_{X,N}(f)$ (такие исследования впоследствии были проведены Н. Винером), привело к двум последствиям в области цифровой обработки СДИС:

- потере интереса к периодограммному анализу Шустера, и он, как сейчас выясняется, незаслуженно, был забыт более чем на полвека;
- появлению иных методов спектрального анализа, так называемых параметрических (регрессионных) методов спектрального анализа, основу которых заложил Юл. Суть этих методов заключается в аппроксимации эмпирических значений корреляционных функций (или

энергетических спектров) несложными аналитическими выражениями. Справедливости ради, необходимо отметить, что задолго до Юла такой «подгонкой» данных занимался барон Прони [49].

Не отрицая результатов, достигнутых в области альтернативных методов цифровой обработки СДИС, необходимо отметить, что существенным недостатком регрессионных методов является *их значительная субъективность* [174]. Эффективное применение регрессионных методов в практике статистических измерений теоретико-вероятностных характеристик СДИС возможно лишь тогда, когда априори известны значения (или, по крайней мере, некоторые параметры) энергетического спектра. Именно поэтому автор, руководствуясь тезисом о том, что «*данные должны говорить сами за себя*», практически не рассматривает в дальнейшем изложении этот вид спектрального оценивания.

Как отмечалось в разделе 1.4, возможны два подхода к получению оценок теоретико-вероятностных характеристик СДИС: *методом вычислений* и *методом измерений*. В силу крайней важности и актуальности разграничения этих двух подходов к определению значений вероятностных характеристик, рассмотрим вопрос разделения этих подходов.

Определение оценок теоретико-вероятностных характеристик СДИС *методом вычислений* проводится с помощью вычислительного алгоритма обработки массива данных, полученных вне процедуры измерения.

Определение оценок теоретико-вероятностных характеристик СДИС *методом измерений* [172] проводится с помощью алгоритмической обработки массива количественных данных (промежуточных или конечных) о *физическом объекте*. При этом элементы обрабатываемого массива представляют собой *результаты измерения некоторой физической величины (физических величин)*. Таким образом, определение оценок некоторой вероятностной характеристики СДИС методом измерений проводится обязательно в рамках измерительной процедуры (1.17).

Данные определения получения оценок теоретико-вероятностных характеристик СДИС методом вычислений и методом измерений решают вопросы их разграничения и противопоставления.

Рассмотрим условия, при которых смешанные ДИС в рамках корреляционной теории являются стационарными и эргодическими. То есть являются смешанными ДИС, для которых оценки той или иной конкретной вероятностной характеристики в виде пределов выборочных средних, полученные по ансамблю реализаций или по одной реализации дискретного случайного сигнала бесконечной длительности, сходятся по вероятности к истинным значениям выбранной вероятностной характеристики. Для стационарности и эргодичности аддитивного смешанного случайного сигнала:

$$X(n) = Z(n) + Y(n); \quad (3.7)$$

где $Y(n)$ – дискретный случайный ДИС;

$Z(n)$ – дискретный квазидетерминированный ДИС,

необходимым, но не достаточным условием является стационарность и эргодичность дискретного случайного сигнала $Y(n)$. Следующим условием стационарности и эргодичности аддитивного смешанного случайного сигнала является стационарность и эргодичность дискретного квазидетерминированного сигнала $Z(n)$. Условия стационарности и эргодичности дискретного периодического квазидетерминированного сигнала $Z(n)$:

$$Z(n) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k n + \varphi_k); \quad (3.8)$$

частично рассмотрены в работах [7, 62, 52, 174]. Обобщение полученных в этих работах результатов позволяет сформулировать следующие условия стационарности и эргодичности дискретного квазидетерминированного ДИС $Z(n)$:

- если у гармонических компонент сигнала $Z(n)$ (3.8) $\forall i \in \{k\}$ частоты f_i являются детерминированными величинами, фазы φ_i и амплитуды A_i

взаимно независимы и фазы φ_i распределены по равномерному закону на интервале $(0, 2\pi)$, то сигнал $Z(n)$ строго стационарен;

- если у гармонических компонент сигнала $Z(n)$ (3.8) $\forall i \in \{k\}$ частоты f_i и амплитуды A_i являются детерминированными величинами, а фазы φ_i распределены по равномерному закону на интервале $(0, 2\pi)$, то сигнал $Z(n)$ эргодичен.

Остановимся кратко и на некоторых свойствах (характеристиках) оценок (раздел 1.3) вероятностных характеристик СДИС, которые получили широкое распространение в практике оценивания. Необходимость этого связана с тем, что определения свойств оценок в литературе часто не совпадают.

Достаточная оценка – это оценка, при определении которой используется вся информация, содержащаяся в объеме выборки.

Смещение оценки – это разность между истинным значением случайной величины и математическим ожиданием ее оценки:

$$\Delta\psi[X(n)] = \psi[X(n)] - M\{\psi_d[X(n)]\}, \quad (3.9)$$

где M – символ операции определения математического ожидания.

Если $\Delta\psi[X(n)] = 0$, то оценка несмещенная. Если $\Delta\psi[X(n)] \neq 0$, то оценка смещенная. Если $\Delta\psi[X(n)] = 0$ только при $d \rightarrow \infty$, то оценка асимптотически несмещенная.

Оптимальность оценки по некоторому критерию. Если в качестве критерия принять, например, дисперсию оценки, то оценку с наименьшей дисперсией при фиксированном объеме выборки можно считать оптимальной по критерию минимизации дисперсии. Такую оценку $D\{\psi_d[X(n)]\}_i$ называют эффективной оценкой:

$$D\{\psi_d[X(n)]\}_i = \inf D\{\psi_d[X(n)]\}, \quad (3.10)$$

где D – символ операции определения дисперсии.

Состоятельность оценки. Если смещение и дисперсия оценки стремятся к нулю при возрастании объема выборки, то такая оценка называется состоятельной оценкой.

Точность и надежность оценки. Разность между оценкой и истинным значением называют отклонением оценки:

$$\Delta\psi[X(n)] = \psi[X(n)] - \psi_d[X(n)]. \quad (3.11)$$

Надежность и точность оценки характеризуют **доверительной вероятностью** β события того, что абсолютная величина отклонения $\Delta\psi[X(n)]$ будет меньше некоторой выбранной величины ε :

$$P \{ |\psi[X(n)] - \psi_d[X(n)]| < \varepsilon \} = \beta. \quad (3.12)$$

В соотношении (3.12) величина ε характеризует точность оценки, а вероятность β – надежность оценки. В теории оценивания широко применяется понятие **доверительного интервала** H_β :

$$H_\beta = \{ \psi_d[X(n)] - \varepsilon, \psi_d[X(n)] + \varepsilon \}. \quad (3.13)$$

Если произвести тождественное преобразование выражения (3.13) в виде:

$$P \{ \psi_d[X(n)] - \varepsilon < \psi[X(n)] < \psi_d[X(n)] + \varepsilon \} = \beta, \quad (3.14)$$

то нетрудно видеть, что интервал H_β с вероятностью β «накрывает» $\psi[X(n)]$ (откуда и название интервала – доверительный).

В заключение краткого рассмотрения свойств (характеристик) оценок отметим, что в теории цифровой обработки СДИС в качестве показателей точности оценок используют **абсолютную среднеквадратичную погрешность**:

$$\mu_\psi = \sqrt{D \{ \psi_d[X(n)] \}}, \quad (3.15)$$

и **относительную среднеквадратичную погрешность**:

$$\delta_\psi = \frac{\sqrt{D \{ \psi_d[X(n)] \}}}{\psi[X(n)]}. \quad (3.16)$$

3.2. Аperiodическое дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим метод измерения (3.5) выборочного энергетического спектра $G_{x,N}(k)$. Пусть на N -интервале (т.е. $n = \overline{0, N-1}$) задана реализация $x(n)$ стационарного дискретного случайного сигнала $X(n)$. ДПФ $x(n)$ и его комплексное сопряжение, соответственно $S_N(k), S_N^*(k)$, в обычной форме задаются следующими соотношениями:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad (3.17)$$

$$S_N^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-km}; \quad (3.18)$$

Очевидно, что:

$$G_{x,N}(k) = N [S_N(k) S_N^*(k)] = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \right] \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-km} \right];$$

или:

$$G_{x,N}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n)x(m) \cdot W_N^{k(n-m)}. \quad (3.19)$$

Проведя замену переменных $r = (n - m)$ и преобразуя область суммирования, как показано на рисунке 3.1, приведем выражение (3.19) к виду:

$$G_{x,N}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=-m}^{N-1-m} x(m)x(m+r) W_N^{kr}. \quad (3.20)$$

Меняя порядок суммирования, преобразуем соотношение (3.20):

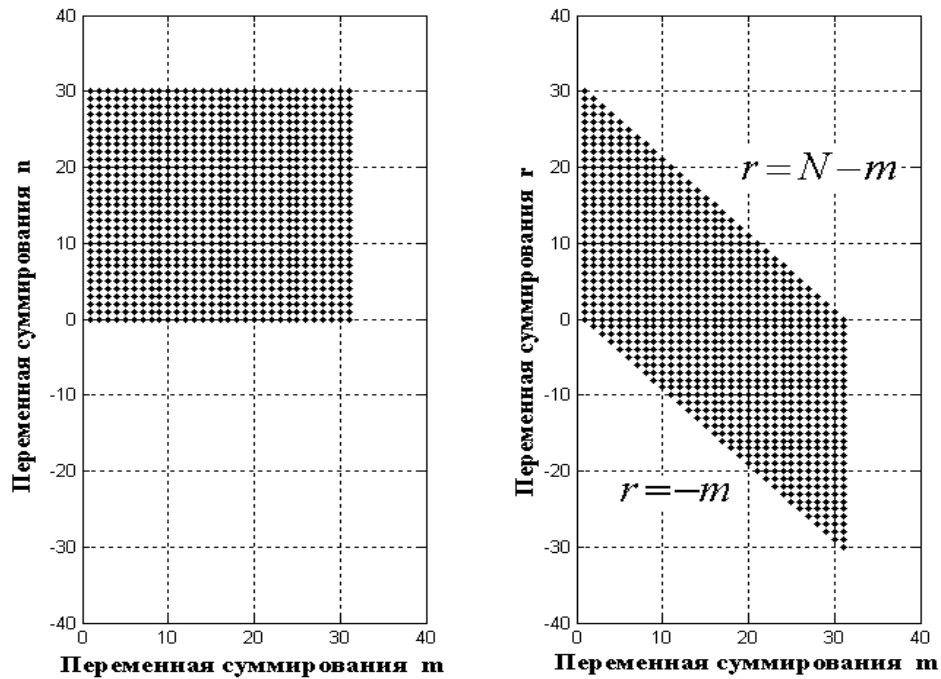
$$G_{x,N}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1-r} x(m)x(m+r) \right] W_N^{kr} + \sum_{r=-(N-1)}^0 \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-r}^{N-1} x(m)x(m+r) \right] W_N^{kr}. \quad (3.21)$$

Из выражения (3.21), с учетом соотношения (3.2), непосредственно следует:

$$G_{x,N}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} K_{x,N}(r) W_N^{kr} + \sum_{r=-(N-1)}^0 K_{x,N}(r) W_N^{kr}. \quad (3.22)$$

Так как ДПФ всегда проводится над последовательностями с положительным аргументом, проведем подстановку: $v = -r$ во втором члене

суммы (3.22). Принимая во внимание четность корреляционной функции, преобразуем выражение (3.22) к виду:



$$N = 30$$

Рисунок 3.1 – Преобразование переменных суммирования для оценки корреляционной функции

$$G_{x,N}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} K_{x,N}(r) W_N^{kr} + \sum_{v=0}^{N-1} K_{x,N}(v) W_N^{-kv}. \quad (3.23)$$

Положив $v = N - r$ в (3.23), и, с учетом того, что $W_N^{-kN} = 1$, окончательно получим:

$$G_{x,N}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} [K_{x,N}(r) + K_{x,N}(N - r)] \cdot W_N^{kr}. \quad (3.24)$$

Таким образом, оценка энергетического спектра СДИС $x(n)$, полученная с помощью ДПФ, *не является преобразованием оценки корреляционной функции (3.2) (апериодической корреляционной функции)*, а преобразованием некой новой оценки корреляционной функции – *циклической корреляционной функции*:

$$K_{x,N}^{\ddot{0}\ddot{e}\ddot{e}\ddot{0}} = K_{x,N}(r) + K_{x,N}(N - r); \quad r = \overline{0, N - 1}. \quad (3.25)$$

Оценка, получаемая с помощью выражения (3.26), на интервале $r = \overline{0, N-1}$ совпадает с точностью до нормирующего множителя с оценкой апериодической корреляционной функции (3.2):

$$K_{x,2N}^{\text{Öežž,Äir}} = K_{x,N}(r); r = \overline{0, N-1}. \quad (3.28)$$

Рассмотрим соотношение частот канонического разложения В.С. Пугачева стационарных (в широком смысле) СДИС с частотами их преобразований Фурье. В.С. Пугачев для повышения эффективности обработки случайных функций, предложил *метод канонических разложений* [13].

Идея метода заключается в представлении исходного случайного процесса $X(t)$ в виде суммы так называемых *элементарных случайных функций* $V_i \varphi_i$, характерной особенностью которых является *разделение* случайности (коэффициенты разложения V_i) и детерминированности (координатные функции φ_i) [13]:

$$X(t) = M_X(t) + \sum_{i=1}^m V_i \varphi_i(t), \quad (3.29)$$

где $V_i, i = \overline{1, m}$ – коэффициенты разложения (некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю и дисперсией D_i);

$\varphi_i, i = \overline{1, m}$ – координатные функции (детерминированные функции).

Такой подход позволяет существенно упростить обработку случайных ИС, подвергшихся линейным преобразованиям. Если задано каноническое разложение случайной функции $X(t)$ (3.29), то каноническое разложение ее корреляционной функции имеет вид [13]:

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i. \quad (3.30)$$

В работе [13] доказано и обратное утверждение: если задано соотношение (3.30), то справедливо выражение (3.29). Так как корреляционные функции стационарных случайных функций зависят только от разности $\tau = t_2 - t_1$, то для центрированной стационарной случайной функции (случайная функция центрирована, если ее $M_X = 0$) $\overset{\circ}{X}(t)$, заданной на конечном интервале $(0, T)$, соотношение (3.29) при $m \rightarrow \infty$ приводится к виду [13]:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (3.31)$$

где U_k, V_k – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю и дисперсией D_k ;

$\omega_k = k\omega_0, \omega_0 = \pi/T$ – частоты координатных функций

Таким образом, для функции $\overset{\circ}{X}(t)$, заданной на интервале $(0, T)$, набор частот координатных функций: $\omega_k = k\omega_0; \omega_0 = \pi/T$ в ее каноническом разложении *не совпадает* с набором частот коэффициентов ДПФ: $\omega_{k,F} = k\omega_{0,F}; \omega_{0,F} = 2\pi/T$.

Анализируя соотношения (3.2), (3.24), (3.27) и (3.31), приходим к важному выводу: *цикличность корреляционной функции (3.25) является результатом наложения в корреляционной области циклических корреляционных функций из-за дискретизации энергетического спектра с частотой в два раза меньшей, чем требуется при каноническом разложении Пугачева.*

Дополняя реализацию $x(n), n = \overline{0, N-1}$, СДИС N нулями, мы при выполнении ДПФ модифицированной таким образом реализации СДИС, по сути дела, увеличиваем в два раза частоту дискретизации энергетического спектра, и решаем, таким образом, проблему наложения циклических корреляционных функций. При этом мы вводим в рассмотрение новый дискретный сигнал X_N^{Don} и оценка (3.5) преобразуется к виду:

$$G_{x,2N}^{\ddot{A}ir}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{2N-1} X_{2N}^{\ddot{A}ir}(n) W_{2N}^{-kn} \right|^2; \text{ где } W_{2N} = \exp(-j\pi/N); k = \overline{0, 2N-1}, \quad (3.32)$$

а оценка энергетического спектра конкретной реализации $x^{\ddot{A}ir} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_N)$ определяется следующей формулой:

$$G_{x,2N}^{\ddot{A}ir}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{2N-1} x^{\ddot{A}ir}(n) W_{2N}^{-kn} \right|^2; \text{ где } W_{2N} = \exp(-j\pi/N); k = \overline{0, 2N-1}. \quad (3.33)$$

Разделим последовательность $G_{x,2N}^{\ddot{A}ir}(k)$ на две последовательности $G_{x,2N,1}^{\ddot{A}ir}(k)$ и $G_{x,2N,2}^{\text{Don}}(k)$, которые состоят соответственно из четных и нечетных членов последовательности $G_{x,2N}^{\ddot{A}ir}(k)$:

$$G_{x,N,1}(k) = G_{x,2N}^{\ddot{A}ir}(2k); G_{x,N,2}(k) = G_{x,2N}^{\ddot{A}ir}(2k+1); k = \overline{0, (N-1)}. \quad (3.34)$$

Тогда формулу (3.33) можно представить в виде выполнения двух преобразований:

$$G_{x,N,1}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn} \right|^2; k = \overline{0, (N-1)}; \quad (3.35)$$

$$G_{x,N,2}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-(k+1/2)n} \right|^2; k = \overline{0, (N-1)}; \quad (3.36)$$

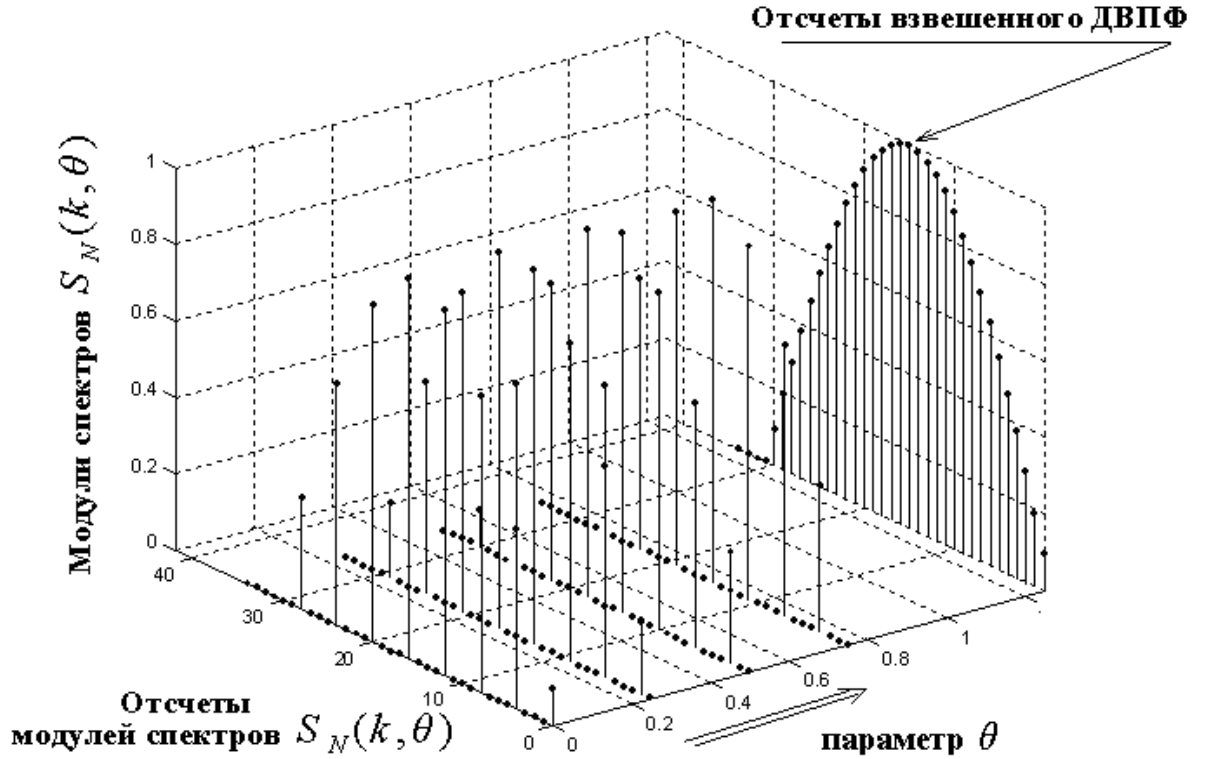
Преобразования (3.35) и (3.36) являются квадратами модулей частных случаев параметрического дискретного преобразования Фурье (ДПФ-П) реализации $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, при значениях параметра $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$. Аналитические свойства этого преобразования подробно рассмотрены во второй главе. Здесь просто приведем пример (рисунок 3.2), каким образом можно, меняя параметр θ , измерять взвешенное ДВПФ сигнала $x(n)$ на «дробных» частотах (т.е. между отсчетами спектра $S_N(k)$, полученного с помощью стандартного ДПФ исходного сигнала $x(n)$).

В главе 2 доказано, что ДИС X_N , заданный на интервале $\overline{0, N-1}$ и дополненный нулевыми отсчетами, число которых равно $N(r-1)$, может быть представлен в виде суммы параметрических N -периодических функций (2.28):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{r-1} x_i(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{r-1} x_{\theta_i}(n) \Big|_{\theta=i\frac{1}{r}},$$

где $x_{\theta_i}(n) = x_i(n \bmod N) W_N^{\theta N \text{ent}[n/N]}$;

$\text{ent} [\cdot]$ – символ взятия целой части.



Стрелкой показано направление объединения модулей спектров $G_{x,N}(k, \theta)$

Рисунок 3.2 – Значения модулей коэффициентов ДПФ-П при

$$N = 8; \theta = 1/4, 1/2, 3/4$$

Проиллюстрируем это соотношение с помощью параметрических циркулянтных матриц (2.20) $C_{N,\theta}$ при $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$.

Очевидно, что эти матрицы по определению периодичны. Другими словами, строки матрицы $C_{N,\theta}$ соответствуют сдвигу окна в N отсчетов по параметрически-периодическому продолжению сигнала, которое «навязывается» соответствующим преобразованием. В нашем случае это матрицы вида:

$$C_{N,0}^{\text{ïäð}} = \begin{bmatrix} C_{N,0} \\ C_{N,0} \end{bmatrix}; \quad C_{N,1/2}^{\text{ïäð}} = \begin{bmatrix} C_{N,1/2} \\ C_{N,1/2} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Сложив матрицы $C_{N,0}^{i\ddot{a}\delta}$ и $C_{N,1/2}^{i\ddot{a}\delta}$ получим:

$$C_{N,0}^{i\ddot{a}\delta} + C_{N,1/2}^{i\ddot{a}\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \\ 0 & x(0) & x(1) & \dots & x(N-1) \\ 1 & 0 & x(0) & \dots & x(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (N-1) & 0 & 0 & \dots & x(0) \\ N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (N+1) & x(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (2N-1) & x(1) & x(2) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Из сравнения выражений (3.38) и (3.27) становится очевидно, каким образом ДПФ последовательности $x^{\ddot{A}i} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_N)$ можно заменить двумя ДПФ-П последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, получая при этом экономию в необходимом объеме памяти в два раза и числе вычислений в $p/(p-1)$ раз, где p – определяется из формулы $N = 2^p$ для алгоритма БПФ-П по основанию два.

Рассмотрим более подробно применение параметрического экспоненциального базиса при измерении спектров детерминированных сигналов и энергетических спектров ДИС и смешанных ДИС. Отметим, что получение методом ДПФ-П дополнительных значений спектров по сравнению с методом ДПФ позволяет существенно улучшить условия различения и измерения параметров гармонических компонент при решении задач выявления скрытых периодичностей (решение задачи «локализации пиков»). При косвенных измерениях в спектральной области необходимо различать два больших класса задач, решение которых требует различных методов измерения:

- задачи измерения энергетических спектров случайных сигналов **в целом**, т.е. как функции частоты;
- задачи измерения **локального поведения спектров** в некотором узком диапазоне частот. Например, измерение частоты, амплитуды или

фазы гармонической компоненты (гармонических компонент, звукорядов) в шуме.

Оценка эффективности применения ДПФ-П при решении задач как первой, так и второй группы достаточно подробно рассмотрена в публикациях автора [64-147]. С точки зрения решения задач обработки спектрально-временных характеристик дискретных сигналов на конечных интервалах, полученные выше результаты позволяют сделать очень важный вывод.

При спектральном разложении детерминированных ДИС базис ДПФ является адекватным математическим аппаратом, который позволяет полно описывать их спектральный состав. Применяя к частотному спектру обратное ДПФ (ОДПФ), мы можем восстановить исходный дискретный временной сигнал. Однако при измерении взвешенного ДВПФ аппарата ДПФ недостаточно. Необходимо применение аппарата ДПФ-П, как наиболее эффективного метода получения значений взвешенного ДВПФ. Получение значений взвешенного ДВПФ, если поступиться эффективностью этого процесса (что и делалось до сих пор), возможно (с соответствующими ограничениями) и с помощью дополнения нулевыми отсчетами исходного сигнала.

Здесь отметим, что возможны еще два метода получения значений взвешенного ДВПФ:

- с помощью матриц перехода, построенных для выбранных значений параметра θ ;
- с помощью экспоненциальных трансформаций сигнала во временной области при выбранных значениях параметра θ .

Суть первого метода заключается в следующем. Если в матрично-векторной операции (3.26) под матрицами B_N понимать матрицы перехода от коэффициентов ДПФ к коэффициентам ДПФ-П, а под вектором X_N понимать коэффициенты ДПФ, то полученные в результате реализации соотношения (3.34) вектора Y_N – это соответствующие значения взвешенного ДВПФ при выбранном значении параметра θ .

Идея второго метода состоит в умножении исходного сигнала на экспоненциальную функцию при выбранном значении параметра θ и последующим нахождением спектра методом ДПФ.

Отметим, что если в цифровой обработке сигналов дополнение исходной последовательности во временной области нулевыми отсчетами для решения тех или иных задач практикуется относительно давно и упоминается во многих монографиях, посвященных исследованиям в данном научном направлении, то первый из указанных методов не упоминается вообще. Кроме того, не рассматривалась и *существующая глубинная взаимосвязь метода дополнения нулями с методом экспоненциальной трансформации*. При этом изложение метода дополнения нулями в учебной, методической и научной литературе носит не системный, а фрагментарный характер и, к сожалению, часто изобилует неточностями и ошибками. Например, в [149] утверждается: «Таким образом, простое дополнение последовательности конечной длины нулевыми отсчетами позволяет достичь *любого разрешения* (выделение курсивом авт.) при расчете преобразования Фурье этой последовательности для совокупности точек, равномерно распределенных по единичной окружности». Аналогичное утверждение есть и в [46].

Отметим, что при использовании метода дополнения нулями авторами работ по ЦОС совершенно игнорировался тот факт, что матрица преобразования Фурье, как было показано во второй главе, усекается и из квадратной матрицы превращается в прямоугольную матрицу. Следовательно, полученный в результате базис является избыточным, так как полный базис спектрального разложения дискретного сигнала в N отсчетов не может содержать более N базисных функций.

Возвращаясь к решению задач обработки спектрально-временных характеристик ДИС на конечных интервалах, отметим, что переход к измерению их энергетических спектров возможен, но не обязателен (естественно, при этом теряется информация о фазах гармонических составляющих измерительного сигнала). В случае же измерения спектрально-временных характеристик СДИС и

смешанных СДИС на конечных интервалах переход в энергетическую область является обязательным. Если при этом потребовать выполнение условия апериодичности (по крайней мере, в пределах интервала измерения) оценки корреляционной функции (методы получения такой оценки изложены выше), то базиса ДПФ оказывается недостаточно для адекватного описания СДИС в частотной области. Действительно, возможны только два варианта. Либо мы признаем указанный факт, либо соглашаемся, что циклические корреляционные функции, в рамках корреляционной теории, позволяют *адекватно описывать СДИС*. Выше было показано, по каким причинам такое соглашение неприемлемо.

Таким образом, для *адекватного описания дискретных случайных* (и смешанных) сигналов на конечных интервалах *в частотной области* необходимо иметь как минимум два базиса из набора базисов, предлагаемых ДПФ-П. Наиболее приемлемыми параметрическими экспоненциальными базисами являются, как показано выше, базисы ДПФ-П при значениях параметра $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$. Одновременное преобразование по этим двум базисам автор назвал *апериодическим дискретным преобразованием Фурье* (АДПФ).

Рассмотрим стохастические (вероятностные) свойства АДПФ-П.

3.3. Стохастические свойства параметрического дискретного преобразования Фурье

Пусть на N -интервале задан действительный дискретный белый шум $X(n)$ с нормальной плотностью распределения, математическим ожиданием $M_x = 0$ и дисперсией D_x . Другими словами, в качестве модели информационного сигнала выберем совершенно случайный сигнал – *белый гауссов шум*. Очевидно, что СДИС, встречающиеся на практике, как показано в главе 1 диссертационной работы, в общем случае таковыми не являются и могут быть, казалось бы, описаны данной моделью СДИС весьма условно. Но это только на первый взгляд.

Во-первых, АДПФ-П позволяет измерять спектр дискретного случайного сигнала на $N/2 + 1$ частотах, и измерение спектра может интерпретироваться как

цифровая фильтрация реализации сигнала $x_i(n)$, $n = \overline{0, N-1}$; $N/2 + 1$ полосовыми фильтрами. И предположение о том, что в полосе пропускания фильтра значение спектра есть величина постоянная, может быть принято с достаточной для практики точностью.

Во-вторых, предположение о нормальной плотности распределения измерительного дискретного случайного сигнала в связи с известным эффектом «нормализации» [153], полученные ниже результаты исследования стохастических свойств параметрического дискретного преобразования Фурье могут быть применены и для дискретных случайных сигналов, плотность распределения которых не описывается нормальным законом.

Представим оценку энергетического спектра $X(n)$, без потери общности, в следующем виде:

$$G_{x,N}(k, \theta) = g_{\cos}^2(k, \theta) + g_{\sin}^2(k, \theta); 0 \leq \theta < 1; \quad (3.39)$$

$$\text{где: } g_{\cos}(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n, \quad (3.39, \text{a})$$

$$g_{\sin}(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n; k = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (3.39, \text{б})$$

Очевидно, что $M[g_{\cos}(k, \theta)] = M[g_{\sin}(k, \theta)] = 0$. Совместную плотность распределения на частоте $(k + \theta)$ коэффициентов ДПФ-П можно представить в следующем виде:

$$f(A) = \left(\frac{1}{2\pi \sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{A^T K^{-1} A}{2} \right) \right); \quad (3.40)$$

где $A^T = [g_{\cos}(k, \theta), g_{\sin}(k, \theta)]$ – вектор-строка;

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \text{ – корреляционная матрица вектора } A;$$

\det – детерминант матрицы K .

Докажем, что:

$$k_{11} = \frac{D_x}{2} \{ 1 + F(u) \cos[(N-1)u] \}; \quad k_{22} = \frac{D_x}{2} \{ 1 - F(u) \cos[(N-1)u] \};$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{D_x}{2} \left\{ F(u) \sin[(N-1)u] \right\};$$

$$\text{где } F(u) = \frac{\sin(u)}{N \sin(u/N)}; \quad u = 2\pi(k + \theta); \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (3.41)$$

Доказательство.

Элементы корреляционной матрицы \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix},$$

определяются следующими соотношениями:

$$k_{11} = \mathbf{M} [g_{\cos}(k, \theta) \cdot g_{\cos}(k, \theta)]; \quad (3.42)$$

$$k_{12} = \mathbf{M} [g_{\cos}(k, \theta) \cdot g_{\sin}(k, \theta)]; \quad (3.43)$$

$$k_{21} = \mathbf{M} [g_{\sin}(k, \theta) \cdot g_{\cos}(k, \theta)]; \quad k_{22} = \mathbf{M} [g_{\sin}(k, \theta) \cdot g_{\sin}(k, \theta)]. \quad (3.44)$$

Или в векторной форме:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} g_{\cos}(k, \theta) \\ g_{\sin}(k, \theta) \end{bmatrix} [g_{\cos}(k, \theta), g_{\sin}(k, \theta)]; \quad (3.45)$$

Подставив в (3.43) (3.39, а) получим:

$$\begin{aligned} k_{11} = \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right) \right] \times \right. \\ \left. \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right) \right] \right\} = \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos^2\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right) x(m) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)m\right) \right]. \quad (3.46) \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} k_{11} = \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos^2\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right) \right] + \\ + \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)n\right) x(m) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k + \theta)m\right) \right]. \quad (3.47) \end{aligned}$$

Из определения белого гауссова шума непосредственно следует равенство нулю второго члена суммы (3.47):

$$\frac{1}{N} \mathbf{M} \left[2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) x(m) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)m\right) \right]. \quad (3.48)$$

Следовательно, выражение (3.47) преобразуется к виду:

$$k_{11} = \frac{D_X}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) \right]. \quad (3.49)$$

Воспользовавшись тригонометрическими тождествами:

$$\cos^2 \alpha = \frac{(1 + \cos 2\alpha)}{2}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos 2\alpha n = \cos[(N-1)\alpha] \sin(N\alpha) \operatorname{cosec} \alpha,$$

и выполнив подстановки $\alpha = \frac{2\pi}{N}(k+\theta)$ и $u = N\alpha = 2\pi(k+\theta)$, преобразуем (3.49) к виду:

$$k_{11} = \frac{D_X}{2} \left\{ 1 + F(u) \cos[(N-1)u] \right\}; \quad (3.50)$$

$$\text{где: } F(u) = \frac{\sin(u)}{N \sin(u/N)}.$$

Так как выражение: $\sin^2 \alpha = \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2}$ отличается от выражения $\cos^2 \alpha = \frac{(1 + \cos 2\alpha)}{2}$ только знаком, то:

$$k_{22} = \frac{D_X}{2} \left\{ 1 - F(u) \cos[(N-1)u] \right\}.$$

Из формул (3.43) и (3.44) непосредственно следует, что $k_{12} = k_{21}$. Поэтому найдем только k_{12} :

$$\begin{aligned}
k_{12} &= \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) x(m) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)m\right) \right]. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, из определения белого гауссова шума непосредственно следует равенство нулю второго члена суммы (3.51). Следовательно, выражение (3.51) преобразуется к виду:

$$k_{12} = \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right) \right]. \quad (3.52)$$

Учитывая тригонометрические тождества:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}; \quad \sum_{n=0}^{N-1} \sin 2\alpha n = \sin[(N-1)\alpha] \sin(N\alpha) \operatorname{cosec} \alpha;$$

и выполнив, как и в предыдущем случае, подстановки $\alpha = \frac{2\pi}{N}(k+\theta)$ и $u = N\alpha = 2\pi(k+\theta)$ получим:

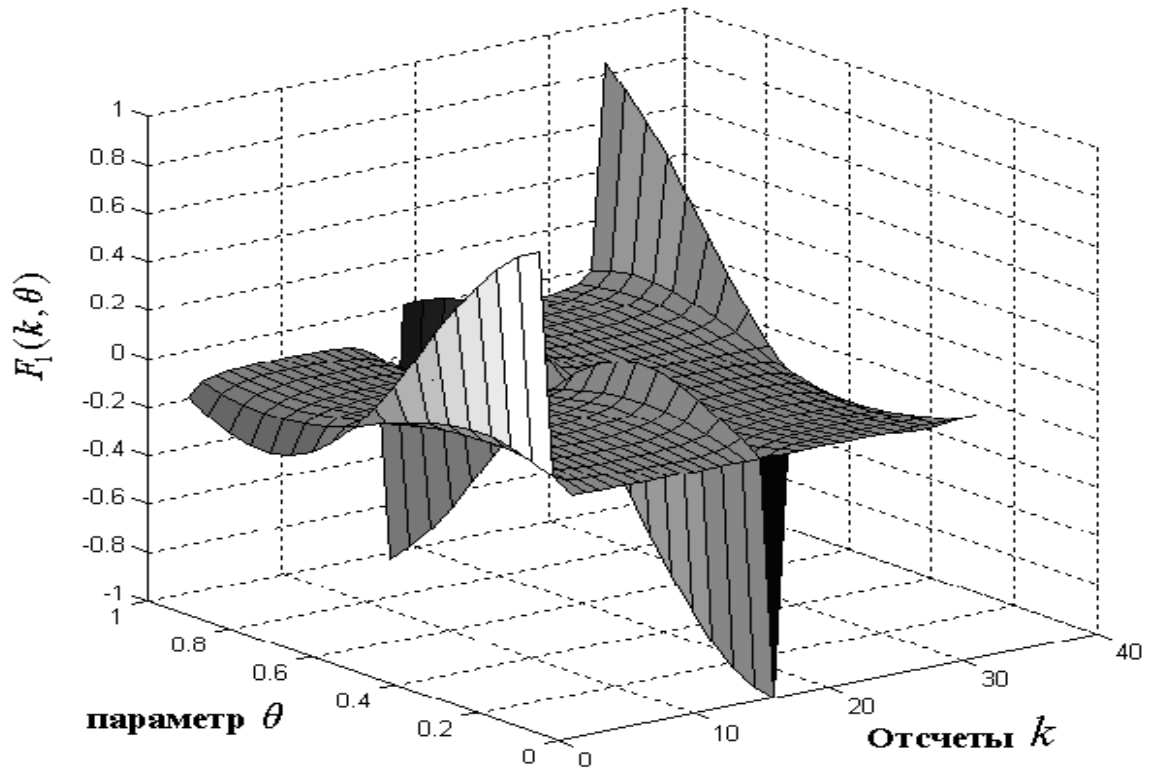
$$k_{12} = k_{21} = \frac{D_x}{2} \left\{ F(u) \sin[(N-1)u] \right\}. \quad (3.53)$$

Таким образом, соотношения (3.41) доказаны.

На рисунке 3.3 приведена функция $F_1(k, \theta) = \frac{\sin[(k+\theta)]}{N \sin[(k+\theta)/N]}$ для $N=32$ и с шагом 0.05 по параметру θ .

Из формулы (3.53) непосредственно следует **некоррелированность** элементов вектора $A^T = [g_{\cos}(k, \theta), g_{\sin}(k, \theta)]$ при значениях параметра $\theta = 0, \quad \theta = 1/2$.

А в силу того, что дискретный белый шум $X(n)$ по определению выбран с нормальной плотностью распределения, следует и **независимость** элементов вектора $A^T = [g_{\cos}(k, \theta), g_{\sin}(k, \theta)]$ (коэффициентов ДПФ-П) при значениях параметра $\theta = 0, \theta = 1/2$.



$N = 32$; шаг по параметру θ равен 0.05

Рисунок 3.3 – Значения функции $F(u) = \frac{\sin(u)}{N \sin(u/N)}$

При косвенных измерениях спектрально-временных характеристик дискретных сигналов широко используется χ^2 -распределение в силу целого ряда его полезных свойств [13, 27, 28, 40].

Известно, что плотность распределения случайной величины Y :

$$Y = \sum_{i=1}^p X_i^2; i = \overline{1, p};$$

где X_i – независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону с математическим ожиданием $M_x = 0$ и дисперсией $D_x = 1$;

является χ^2 -распределением с p степенями свободы.

В общем виде плотность вероятности χ_v^2 -распределения с v степенями свободы задается следующим выражением:

$$f_{\chi_v^2}(x) = \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} x^{(v/2)-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad (0 \leq x < \infty), \quad (3.54)$$

где $\Gamma(v/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(v/2)-1} dt$ – гамма-функция от аргумента $v/2$.

Первые два момента случайной величины χ_v^2 равны:

$$M[\chi_v^2] = v; D[\chi_v^2] = 2v. \quad (3.55)$$

В целом χ^2 -распределение широко применяется для приближения случайных величин, принимающих только положительные значения [27]. Например, если для некоторой случайной величины G известны первые два момента $M_G; D_G$, то, приравняв их первым двум моментам распределения случайной величины $b\chi_v^2$, можно получить параметры аппроксимирующего χ_v^2 распределения плотности вероятности случайной величины G через плотность вероятности случайной величины $b\chi_v^2$ [27]:

$$\left. \begin{array}{l} M_G = bv; \\ D_G = 2b^2v; \end{array} \right\} \Rightarrow v = \frac{2 [M_G]^2}{D_G}; b = \frac{D_G}{2M_G}. \quad (3.56)$$

При обработке энергетических спектров ДИС можно использовать это свойство χ^2 -распределения для характеристики статистической устойчивости оценок энергетических спектров.

При измерении энергетического спектра дискретного белого шума, полученного методом ДПФ-П, в качестве характеристики его *статистической устойчивости* используем число степеней свободы $\nu(k, \theta)$ аппроксимирующего χ^2_ν распределения:

$$\nu(k, \theta) = \frac{2M^2 [G_{x,N}(k, \theta)]}{D [G_{x,N}(k + \theta)]}. \quad (3.57)$$

Данная характеристика статистической устойчивости энергетического спектра однозначно связана со среднеквадратичной относительной погрешностью (3.16):

$$\delta(k, \theta) = \frac{\sqrt{D[G_{x,N}(k, \theta)]}}{M[G_{x,N}(k, \theta)]} = \sqrt{\frac{2}{\nu(k, \theta)}}. \quad (3.58)$$

Отметим, что чем большим числом степеней свободы обладает случайная величина $G_{x,N}(k + \theta)$, тем меньше дисперсия оценки энергетического спектра.

Найдем моменты случайной величины $G_{x,N}(k, \theta)$, воспользовавшись методом *производящих функций моментов* [13, 40]:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= M [\exp(u (g_{\cos}^2(k, \theta) + g_{\sin}^2(k, \theta)))] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(g_{\cos}(k, \theta), g_{\sin}(k, \theta)) \exp u(g_{\cos}^2(k, \theta) + g_{\sin}^2(k, \theta)) dg_{\cos} dg_{\sin}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Подставляя (3.40) в (3.59) и используя интеграл вида [40]:

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\Psi(x, y)\right] dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{I_2}} \exp(-I_3/2I_2); \quad (3.59, a)$$

где

$$\Psi(x, y) = d_{11} x^2 + 2d_{12} xy + d_{22} y^2 + 2d_{13} x + 2d_{23} y + d_{33};$$

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}; \quad I_3 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix};$$

после несложных преобразований получим:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2u(k_{11} + k_{22}) + 4u^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}}. \quad (3.60)$$

Вычисляя первую и вторую производные производящей функции моментов $\varphi(u)$, найдем математическое ожидание $M_{G_{x,N}(k,\theta)} = M[G_{x,N}(k + \theta)]$ и дисперсию $D_{G_{x,N}(k,\theta)} = D[G_{x,N}(k + \theta)]$ оценки параметрического энергетического спектра $G_{x,N}(k, \theta)$:

$$\begin{aligned} M_{G_{x,N}(k,\theta)} &= \left. \frac{d\varphi(u)}{du} \right|_{u=0} = \left. \frac{k_{11} + k_{22} - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)u}{\sqrt{[1 - 2u(k_{11} + k_{22}) + 4u^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)]^3}} \right|_{u=0} = \\ &= k_{11} + k_{22} = D_X; \\ \left. \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} \right|_{u=0} &= 3(k_{11} + k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}^2). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Используя доказанные соотношения (3.41), найдем:

$$D_{G_{x,N}(k,\theta)} = \left[\left. \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)^2 \right] \right|_{u=0} = D_X^2 \left[1 + \frac{\sin^2[2\pi(k + \theta)]}{N^2 \sin^2\left[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)\right]} \right]; \quad (3.62)$$

Следовательно, согласно (3.57):

$$v(k, \theta) = \frac{2}{\left[1 + \frac{\sin^2[2\pi(k + \theta)]}{N^2 \sin^2\left[\frac{2\pi}{N}(k + \theta)\right]} \right]}; \quad k = \overline{0, N/2}; \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (3.63)$$

Из соотношения (3.63) и структуры функции $F_1(k, \theta) = \frac{\sin[N(k + \theta)]}{N \sin[(k + \theta)/N]}$

(рисунок 3.3) непосредственно следует, что не только при значении параметра $\theta = 0$, как утверждается, например в [27], но и при $\theta = 1/2$, **число степеней свободы** $\nu(k, \theta)$ (3.57) **в точности равно двум**. При этом для значений энергетического спектра $G_{x,N}(k, 0)$ при $k = 0$ и $k = N/2$ число степеней свободы равно единице. Этот факт объясняется тем, что согласно (3.39, б) коэффициенты ДПФ-П $g_{\sin}(k, \theta)$ при значении параметра $\theta = 0$ в точках $k = 0$ и $k = N/2$ тождественно равны нулю. В то же время, для всех значений энергетического спектра $G_{x,N}(k, 1/2)$, $k = \overline{0, N/2 - 1}$ число степеней свободы в точности равно двум.

На рисунке 3.4 и рисунке 3.5 проиллюстрированы эти утверждения для частных значений длительностей реализаций: $N = 8$ и $N = 16$.

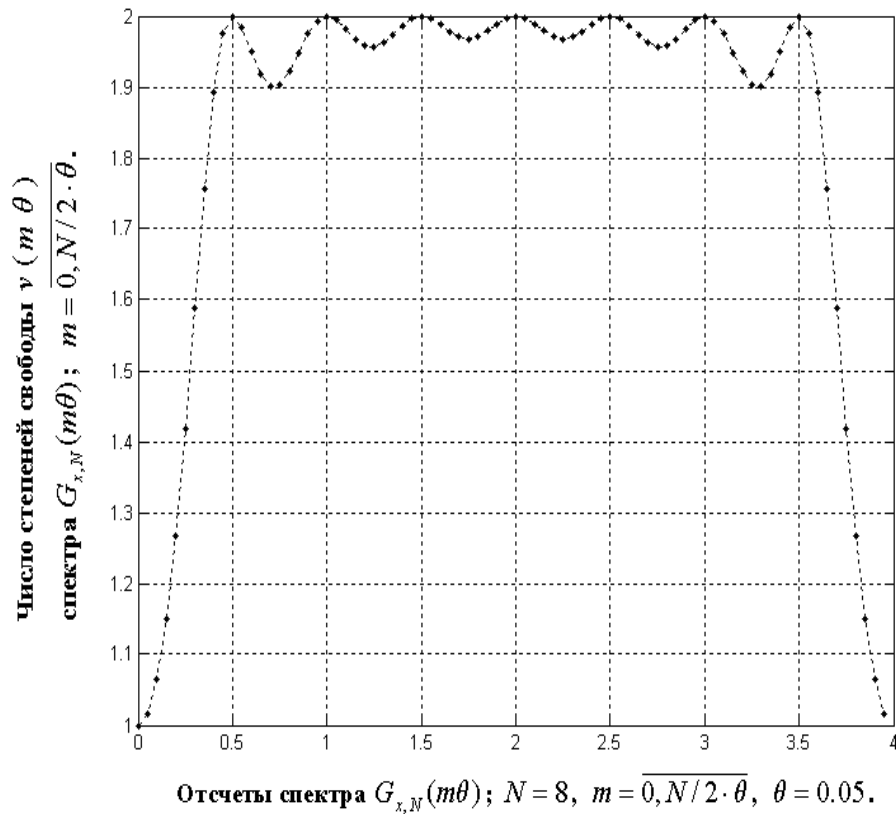


Рисунок 3.4 – Число степеней свободы аппроксимирующего χ_v^2 распределения для значений спектра дискретного гауссова белого шума

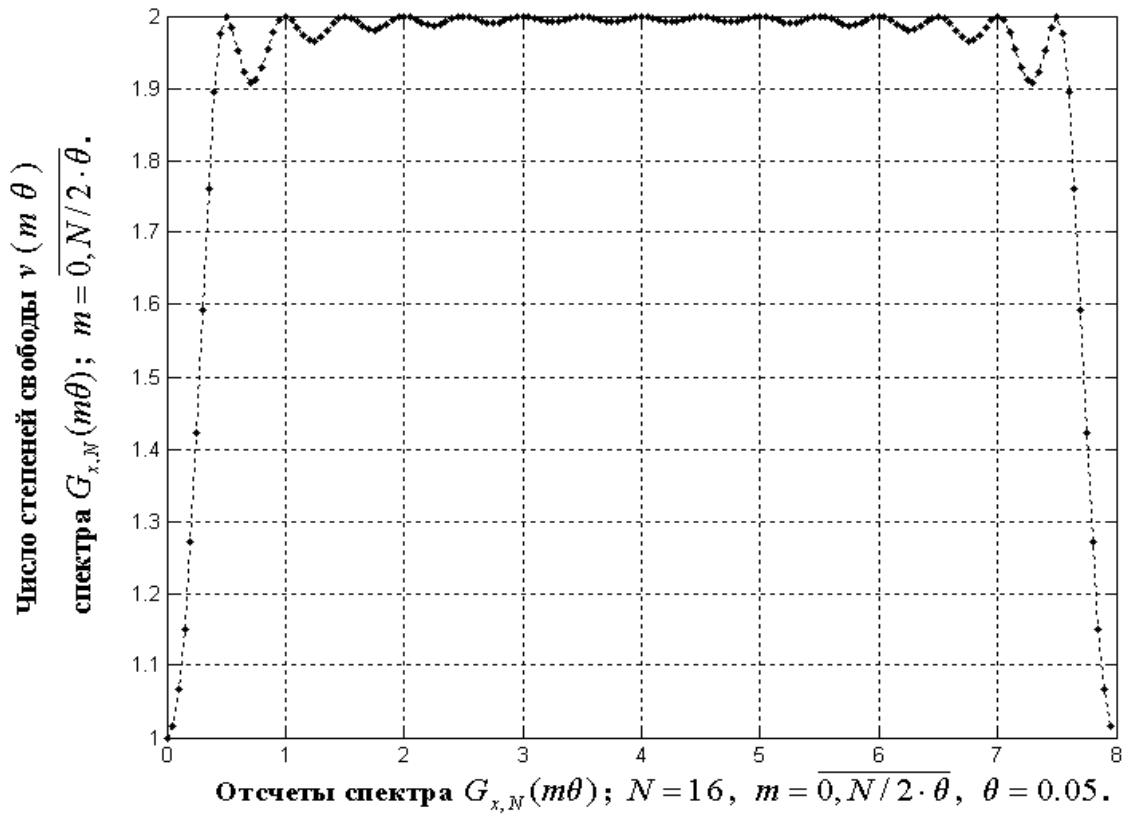


Рисунок 3.5 – Число степеней свободы аппроксимирующего χ_v^2 распределения для значений спектра дискретного гауссова белого шума

На рисунке 3.6, рисунке 3.7 и рисунке 3.8 для различных N представлено в логарифмическом масштабе относительное изменение числа степеней свободы спектра дискретного гауссова белого шума в зависимости от нормализованной частоты $f_i = (k + \theta)/N$ с шагом по параметру $\theta = 0.0025$ (нуль соответствует -100 дБ).

Поскольку функция $F_1^2(k, \theta) = \frac{\sin^2[(k + \theta)]}{N^2 \sin^2[(k + \theta)/N]}$ является симметричной

относительно точки $f_i = 1/4$ и быстро затухающей функцией, то на рисунке 3.6, рисунке 3.7, рисунке 3.8 выведены только значения в интервале $f_i = [0, 0.25]$.

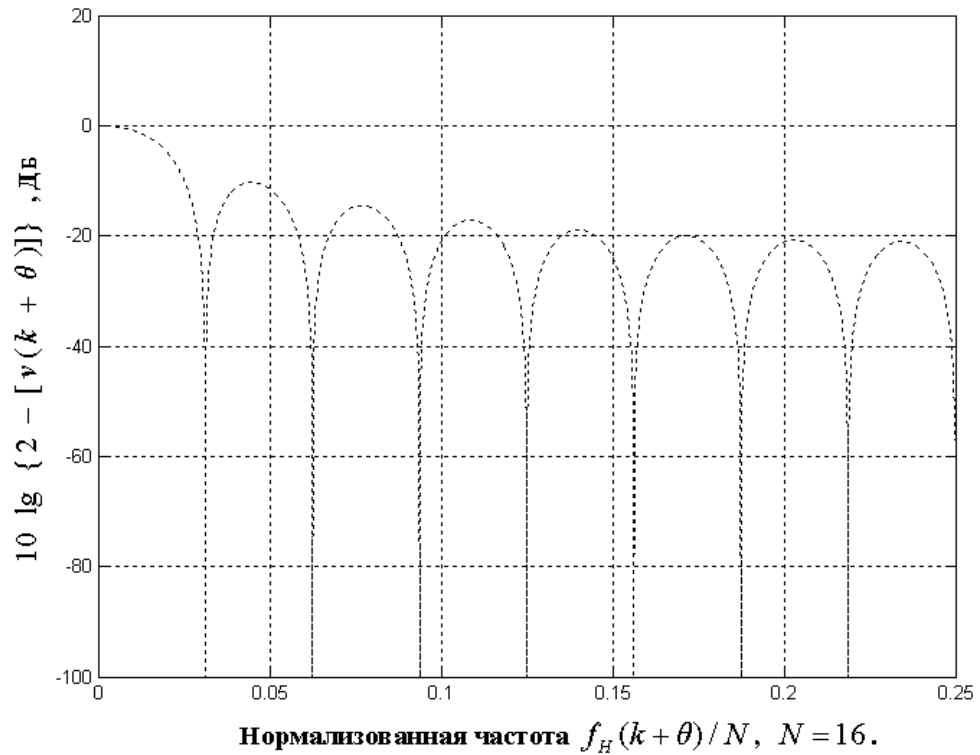


Рисунок 3.6 – Относительное изменение числа степеней свободы значений спектра дискретного гауссова белого шума

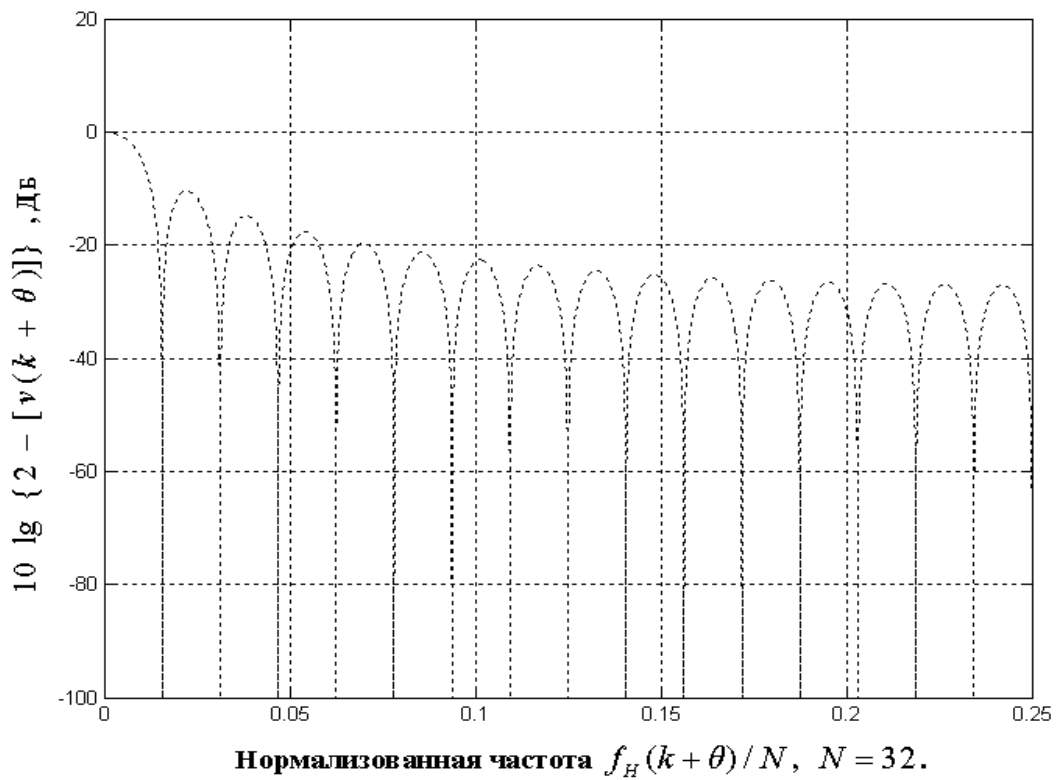


Рисунок 3.7 – Относительное изменение числа степеней свободы значений спектра дискретного гауссова белого шума

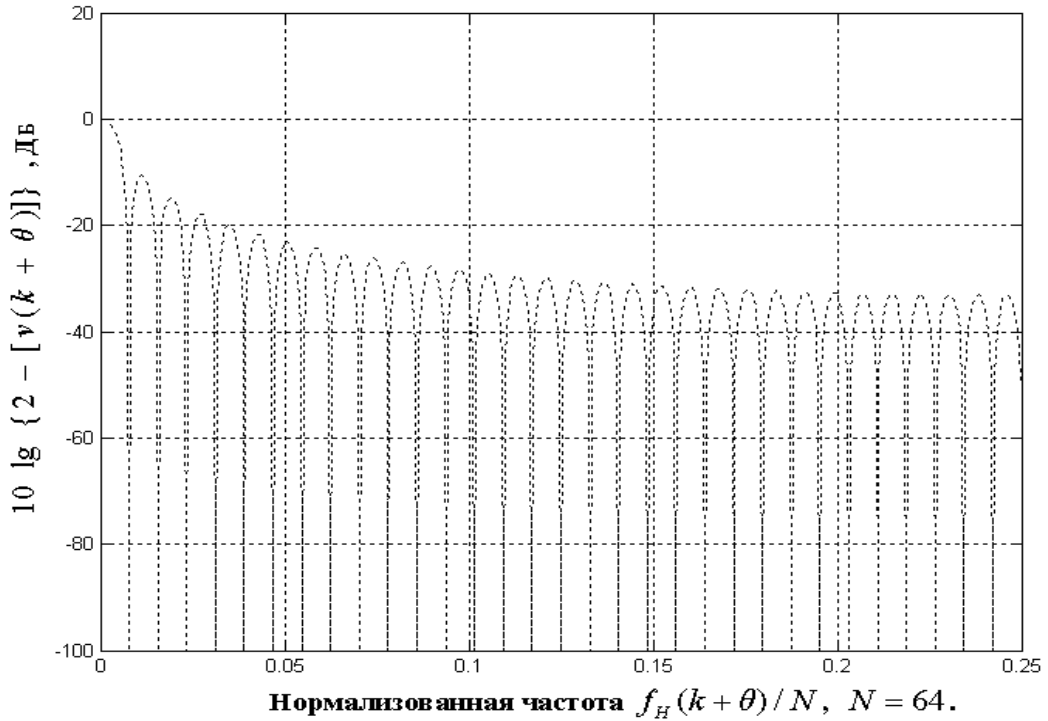


Рисунок 3.8 – Относительное изменение числа степеней свободы значений спектра дискретного гауссова белого шума

Несложно видеть, что с ростом N растет спад относительного изменения числа степеней свободы спектра дискретного гауссова белого шума в зависимости от нормализованной частоты $f_i = (k + \theta) / N$. Используя (3.55), (3.56) и (3.63) несложно установить справедливость следующих утверждений:

оценка $G_{x,N}(k, \theta)$ является несмещенной оценкой спектра белого шума с нормальной плотностью распределения:

$$M [G_{x,N}(k, \theta)] = D_x ; \quad (3.64)$$

дисперсия оценки $G_{x,N}(k, \theta)$ не зависит от длины реализации $x(n)$, $0, N-1$ и, следовательно, оценка $G_{x,N}(k, \theta)$, с учетом (3.64), **не является состоятельной оценкой** спектра белого шума с нормальной плотностью распределения:

$$D [G_{x,N}(k, \theta)] = D_x^2 . \quad (3.65)$$

В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей, закон распределения коэффициентов ДПФ-П ($g_{\cos}(k, \theta)$ и $g_{\sin}(k, \theta)$) при $N \rightarrow \infty$, т.е.

увеличении числа слагаемых сумм (3.39а) и (3.39б), будет стремиться к гауссову закону независимо от того какова плотность распределения сигнала $X(n)$.

Следовательно, плотность распределения оценки $\frac{2 [G_{x,N}(k + \theta)]}{D_x}$ будет приближенно χ^2 -распределением с двумя степенями свободы и в случае *не гауссова белого шума*.

Здесь целесообразно обратить внимание на то, что название «*центральная предельная теорема*» объединяет множество теорем, целью рассмотрения которых является поведение распределения сумм случайных величин при неограниченном росте числа слагаемых. Теоремы указанного множества отличаются между собой ограничениями, накладываемыми на случайные слагаемые [153].

Рассмотрим вопросы статистических измерений спектрально-временных характеристик случайных информационных сигналов на конечных интервалах.

3.4. Статистические измерения и обработка энергетических спектров случайных информационных сигналов в параметрических базисах Фурье

Для получения *состоятельных оценок энергетических спектров эргодических ДИС* методом ДПФ широкое применение нашли два вида обработки: метод *усреднения по времени* и *метод усреднения по частоте*. Рассмотрим возможности применения этих методов при измерении энергетического спектра эргодического дискретного случайного сигнала методом ДПФ-П.

Метод усреднения по времени. В случае применения ДПФ-П, метод усреднения по времени предполагает разбиение исходной реализации эргодического дискретного случайного сигнала $x(n)$; $n = \overline{0, N-1}$ на p частей $x_i(n)$; $i = \overline{1, p}$, $M = N / p$ (считается, без потери общности, что M – целое число):

$$\begin{aligned}
x_1(n) &= x(n); n = \overline{0, M-1}; \\
x_2(n) &= x(M+n); n = \overline{0, M-1}; \\
&\dots\dots\dots \\
x_p(n) &= x[(p-1)M+n]; n = \overline{0, M-1}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Далее, после выбора шага $\Delta\theta$ по параметру θ , последовательно измеряются для каждой реализации $x_i(n)$ энергетические спектры $G_{x_i, M}(k, t\Delta\theta)$, $k = \overline{0, M-1}$, $i = \overline{1, p-1}$, $t = \overline{0, (\theta/\Delta\theta - 1)}$. Затем из полученных спектров реализации $x_i(n)$ формируется (со сквозной нумерацией отсчетов) для каждой реализации $x_i(n)$ объединенный спектр $G_{x_i, M}(m, \Delta\theta)$ (рисунок 3.2), $m = \overline{0, M/\Delta\theta - 1}$. Отметим, что спектр $G_{x_i, M}(m, \Delta\theta)$ при $m = k/\Delta\theta$ тождественен спектру $G_{x_i, M}(k, 0)$. Оценка спектра $G_{x_i, M}^{cp}(m, \Delta\theta)$ в методе усреднения по времени определяется как среднее арифметическое значение спектров $G_{x_i, M}(m, \Delta\theta)$:

$$G_{x_i, M}^{cp}(m, \Delta\theta) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p G_{x_i, M}(m, \Delta\theta); m = \overline{0, (N/p-1)/\Delta\theta}. \tag{3.67}$$

Несложно установить, что число степеней свободы ν_1 аппроксимирующего $\chi_{\nu_1}^2$ распределения случайной величины $G_{x_i, M}^{cp}(m, \Delta\theta)$ определяется следующим выражением:

$$\nu_1(m) = p \cdot \nu(m); \text{ где } \nu(m) = \frac{2}{\left[1 + \frac{\sin^2[2\pi(m)]}{(M)^2 \sin^2\left[\frac{2\pi}{M}(m)\right]} \right]}; m = \overline{0, (M-1)/\Delta\theta}. \tag{3.68}$$

При достаточно больших M и p оценки $G_{x_i, M}(k, t\Delta\theta)$, $k = \overline{0, M-1}$, $i = \overline{1, p-1}$, $t = \overline{0, 1/\Delta\theta - 1}$ являются независимыми случайными величинами.

Оценка $G_{x,M}^{cp}(m \cdot \Delta\theta)$ является состоятельной оценкой энергетического спектра $\Gamma_x(k, \theta)$:

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} D [G_{x,M}^{\bar{n}\bar{\delta}}(m, \Delta\theta)] = 0 .$$

Метод усреднения по частоте. В методе усреднения по частоте, аналогично методу усреднения по времени, сначала выбирают шаг $\Delta\theta$ по параметру θ . Без потери общности, шаг изменения $\Delta\theta$ параметра θ :

$$\Delta\theta = (\theta_{i+1} - \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots;$$

выберем таким, чтобы величина $1/\Delta\theta$ являлась целым числом. Далее, последовательно измеряют энергетические спектры $G_{x,N}(k, t\Delta\theta)$, $k = \overline{0, N-1}$, $t = \overline{0, (\theta/\Delta\theta - 1)}$ исходной реализации эргодического дискретного случайного сигнала $x(n)$; $n = \overline{0, N-1}$. Затем, введя сквозную нумерацию отсчетов, из полученных спектров $G_{x,N}(k, t\Delta\theta)$ формируется объединенный спектр $G_{x,N}(m, \Delta\theta)$ (рисунок 3.2), $m = \overline{0, N/\Delta\theta - 1}$. Оценка спектра $G_{x,N}^{cp}(m, \Delta\theta, p)$ методом усреднения по частоте определяется как среднее арифметическое значение соседних $p+1$ отсчетов спектра $G_{x,N}(m, \Delta\theta)$ (p – четное число):

$$G_{x,N}^{cp}(m, \Delta\theta, p) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=-p/2}^{p/2} G_{x,N}[(m+i), \Delta\theta], \quad m = \overline{0, N/\Delta\theta - 1}. \quad (3.69)$$

Несложно установить, что оценка $G_{x,N}^{cp}(m, \Delta\theta, p)$, так же как и оценка $G_{x,M}^{cp}(m, \Delta\theta, p)$, является состоятельной оценкой энергетического спектра гауссова белого шума $\Gamma_x(k, \theta)$:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} D [G_{x,N}^{\bar{n}\bar{\delta}}(m, \Delta\theta, p)] = 0 .$$

Учитывая, что значение спектра $G_{x,N}[(m+i), \Delta\theta]$ при некотором значении аргумента $(m+i)$ определяется как:

$$G_{x,N}[(m+i), \Delta\theta] = g_{\cos}^2[(m+i), \Delta\theta] + g_{\sin}^2[(m+i), \Delta\theta]; i = \overline{-p/2, +p/2} \quad (3.70)$$

найдем совместную плотность распределения вектора A :

$$A = \{ g_{\cos}[(m-p/2), \Delta\theta], g_{\sin}[(m-p/2), \Delta\theta], \\ g_{\cos}[(m-p/2+1), \Delta\theta], g_{\sin}[(m-p/2+1), \Delta\theta], \\ \dots \\ g_{\cos}[(m-1), \Delta\theta], g_{\sin}[(m-1), \Delta\theta] \\ g_{\cos}[(m-0), \Delta\theta], g_{\sin}[(m-0), \Delta\theta], \\ g_{\cos}[(m+1), \Delta\theta], g_{\sin}[(m+1), \Delta\theta], \\ \dots \\ g_{\cos}[(m+p/2-1), \Delta\theta], g_{\sin}[(m+p/2-1), \Delta\theta], \\ g_{\cos}[(m+p/2), \Delta\theta], g_{\sin}[(m+p/2), \Delta\theta] \}.$$

Совместная плотность распределения вектора A задается следующим соотношением:

$$f(A) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{p+1} \sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{A^T K^{-1} A}{2} \right) \right), \quad (3.71)$$

где K – корреляционная матрица вектора A :

$$K = M[A \cdot A^T] = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1\ 2(p+1)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ k_{2(p+1)\ 1} & \dots & k_{2(p+1)\ 2(p+1)} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Производящая функция моментов для $G_{x,N}^{cp}(m, \Delta\theta, p)$ определяется следующей формулой:

$$\varphi(u) = M \{ \exp[u G_{x,N}^{\tilde{N}\delta}(m, \Delta\theta, p)] \} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{A}) \exp \frac{u}{(p+1)} (|\mathbf{A}|^2) d\mathbf{A} = \frac{1}{\left[\det \left(I - \frac{2u}{(p+1)} \mathbf{K} \right) \right]^{1/2}}; \quad (3.73)$$

где: I – единичная матрица размерностью $2(p+1)$;

$|\cdot|$ – символ операции взятие модуля.

Применяя следующие тригонометрические тождества:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]; \quad (3.74)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; \quad (3.75)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]; \quad (3.76)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \alpha n = \cos \left(\frac{(N-1)\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{N\alpha}{2} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{\alpha}{2} \right); \quad (3.77)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin \alpha n = \sin \left(\frac{(N-1)\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{N\alpha}{2} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{\alpha}{2} \right); \quad (3.78)$$

найдем элементы $k_{(2q-1)(2w-1)}$, $q, w = \overline{1, (p+1)}$, корреляционной матрицы (3.72) вектора \mathbf{A} (при этом отметим, что аргумент тригонометрических функций в нижеследующих соотношениях равен $\frac{2\pi}{N}(m - i\Delta\theta)n$, так как

$$\frac{2\pi}{N/\Delta\theta} \left(\frac{m}{\Delta\theta} - i \right) n = \frac{2\pi}{N} (m - i\Delta\theta)n):$$

$$\begin{aligned} k_{(2q-1)(2w-1)} &= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m - i \cdot \Delta\theta)n \right] \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m - j \cdot \Delta\theta)n \right] \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m - i \cdot \Delta\theta)n \right] \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m - j \cdot \Delta\theta)n \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=k+1}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-i) \Delta \theta n \right] x(m) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-j) \Delta \theta m \right] \Big\}$$

Или:

$$\begin{aligned} k_{(2q-1)(2w-1)} &= \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-i) \Delta \theta n \right] \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-j) \Delta \theta n \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=k+1}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-i) \Delta \theta n \right] \times \right. \\ &\left. \times x(m) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-j) \Delta \theta m \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

В силу того, что математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий, из определения белого шума непосредственно следует равенство нулю второго члена суммы (3.79). Следовательно, с учетом тригонометрических тождеств (3.74) – (3.78), выражение (3.79) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} k_{(2q-1)(2w-1)} &= \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-i) \Delta \theta n \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-j) \Delta \theta n \right] \right\} = \\ &= \frac{D}{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-i) \Delta \theta n \right] \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{N} (m-j) \Delta \theta n \right] \right\} = \\ &= \frac{D}{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[\frac{2\pi}{N} (j-i) \Delta \theta n \right] + \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[\frac{2\pi}{N} (2m - (j+i) \Delta \theta) n \right] \right\}; \end{aligned}$$

Окончательно:

$$k_{(2q-1)(2w-1)} = \frac{D}{2} \left\{ \left[\frac{\sin[\pi(j-i)\Delta\theta]}{N \sin\left[\frac{\pi}{N}(j-i)\Delta\theta\right]} \right] \cos\left(\frac{(N-1)[\pi(j-i)\Delta\theta]}{N}\right) + \right.$$

$$+ \left[\frac{\sin[\pi(2m - (j+i)\Delta\theta)]}{N \sin\left[\frac{\pi}{N}(2m - (j+i)\Delta\theta)\right]} \right] \cos\left(\frac{(N-1)[\pi(2m - (j+i)\Delta\theta)]}{N}\right) \left. \vphantom{\frac{\sin[\pi(2m - (j+i)\Delta\theta)]}{N \sin\left[\frac{\pi}{N}(2m - (j+i)\Delta\theta)\right]}} \right\}. \quad (3.80)$$

$q, w = \overline{1, (p+1)}; i, j = \overline{-p/2, +p/2}.$

Так как выражение (3.74) отличается от выражения (3.75) только знаком, то:

$$k_{(2q)(2w)} = \frac{D}{2} \left\{ \left[\frac{\sin[\pi(j-i)\Delta\theta]}{N \sin\left[\frac{\pi}{N}(j-i)\Delta\theta\right]} \right] \cos\left(\frac{(N-1)[\pi(j-i)\Delta\theta]}{N}\right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{\sin[\pi(2m - (j+i)\Delta\theta)]}{N \sin\left[\frac{\pi}{N}(2m - (j+i)\Delta\theta)\right]} \right] \cos\left(\frac{(N-1)[\pi(2m - (j+i)\Delta\theta)]}{N}\right) \right\}; \quad (3.81)$$

$q, w = \overline{1, (p+1)}; i, j = \overline{-p/2, +p/2}.$

Найдем элементы $k_{(2q-1)(2w)}$; $k_{(2q)(2w-1)}$, $q, w = \overline{1, (p+1)}$, корреляционной матрицы (3.72) вектора A . Нетрудно видеть, что $k_{(2q-1)(2w)} = k_{(2q)(2w-1)}$. Поэтому найдем ТОЛЬКО $k_{(2i-1)(2j)}$.

$$k_{(2q-1)(2w)} = \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n\right] \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin\left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)n\right] \right] \right\} = \\ = \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n\right] \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)n\right] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=k+1}^{N-1} x(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n\right] x(m) \sin\left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)m\right] \right\}.$$

Или:

$$\begin{aligned}
k_{(2q-1)(2w)} &= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n \right] \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)n \right] \right\} + \\
&+ \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=k+1}^{N-1} x(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n \right] \times \right. \\
&\times \left. x(m) \sin \left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)m \right] \right\}. \tag{3.82}
\end{aligned}$$

В силу того, что математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий, из определения белого шума непосредственно следует равенство нулю второго члена суммы (3.82). Следовательно, с учетом тригонометрических тождеств (3.74) – (3.78), выражение (3.82) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}
k_{(2q-1)(2w)} &= \frac{1}{N} \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cos \left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n \right] \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)n \right] \right\} = \\
&\frac{D}{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[\frac{2\pi}{N}(m-i \cdot \Delta\theta)n \right] \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{N}(m-j \cdot \Delta\theta)n \right] \right\} = \\
&= \frac{D}{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sin \left[\frac{2\pi}{N}(j-i) \cdot \Delta\theta)n \right] + \sum_{n=0}^{N-1} \sin \left[\frac{2\pi}{N}(2m-(j+i) \cdot \Delta\theta)n \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Окончательно:

$$\begin{aligned}
k_{(2q-1)(2w)} &= \frac{D}{2} \left\{ \left[\frac{\sin[\pi(j-i)\Delta\theta]}{N \sin \left[\frac{\pi}{N}(j-i)\Delta\theta \right]} \right] \sin \left(\frac{(N-1)[\pi(j-i)\Delta\theta]}{N} \right) + \right. \\
&+ \left. \left[\frac{\sin[\pi(2m-(j+i)\Delta\theta)]}{N \sin \left[\frac{\pi}{N}(2m-(j+i)\Delta\theta) \right]} \right] \sin \left(\frac{(N-1)[\pi(2m-(j+i)\Delta\theta)]}{N} \right) \right\}; \\
q, w &= \overline{1, (p+1)}; \quad i, j = \overline{-p/2, +p/2}. \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Определим первый и второй начальные моменты случайной величины $G_{x,N}^{cp}(m \cdot \Delta\theta, p)$, определяя первую и вторую производные производящей функции моментов $\varphi(u)$ (3.73):

$$M_{G_{x,N}^{cd}(m\Delta\theta,p)} = \left. \frac{d\varphi(u)}{du} \right|_{u=0} = \frac{1}{p+1} \text{Sp} [K] = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{2(p+1)} k_{i,i}; \quad (3.84)$$

где Sp – символ операции нахождения следа матрицы;

$$\left. \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} \right|_{u=0} = \frac{3}{(p+1)^2} \left[\sum_{i=1}^{2(p+1)} k_{i,i} \right]^2 - \frac{4}{(p+1)^2} \sum_{i=1}^{2p+1} \sum_{j=i+1}^{2(p+1)} (k_{i,i} k_{j,j} - k_{i,j}); \quad (3.85)$$

так как $D_{G_{x,N}^{nd}(m\Delta\theta,p)} = \left[\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)^2 \right]$, то:

$$D_{G_{x,N}^{nd}(m\Delta\theta,p)} = \frac{2}{(p+1)^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2(p+1)} k_{i,i} \right]^2 - 2 \sum_{i=1}^{2p+1} \sum_{j=i+1}^{2(p+1)} (k_{i,i} k_{j,j} - k_{i,j}) \right\}. \quad (3.86)$$

С учетом соотношения (3.57) находим число степеней свободы $G_{x,N}^{cp}(m, \Delta\theta, p)$:

$$v_{G_{x,N}^{nd}(m,\Delta\theta,p)} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{2(p+1)} k_{i,i} \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{2(p+1)} k_{i,i} \right]^2 - 2 \sum_{i=1}^{(2p+1)} \sum_{j=i+1}^{2(p+1)} (k_{i,i} k_{j,j} - k_{i,j}^2)}. \quad (3.87)$$

Выражение (3.63) является частным случаем полученного соотношения (3.87). В таблице 3.1 приведены числа степеней свободы $v_{G_{x,N}^{nd}(m,\Delta\theta,p)}$ для гауссова белого шума при $N = 256$, $m = 64$ и различных p и $\Delta\theta$.

Из анализа изменения числа степеней свободы $v_{G_{x,N}^{nd}(m,\Delta\theta,p)}$ для гауссова белого шума, приведенных в таблице 3.1, непосредственно следует вывод о том, что повышение статистической устойчивости оценок объединенного энергетического спектра усреднением по частоте наиболее эффективно при небольших значениях $\Delta\theta$.

Таблица 3.1

$\begin{matrix} p \\ \Delta\theta \end{matrix}$	2	4	6	8	10
0	6.00 0	10. 000	16.0 00	18	22
0.1 25	2.13 78	2.4 161	2.81 34	3.28 52	3.78 58
0.2 5	2.55 93	3.5 022	4.51 71	5.52 52	6.54 67
0.5	3.89 50	5.9 362	7.97 43	10.0 067	12.0 344
$\begin{matrix} p \\ \Delta\theta \end{matrix}$	12	14	16	18	20
0	26	30	34	38	42
0.1 25	4.29 06	4.7 945	5.29 81	5.80 39	6.31 34
0.2 5	7.55 74	8.5 774	9.58 70	10.6 059	11.6 131
0.5	14.0 585	16. 0799	18.0 989	20.1 162	22.1 318
$\begin{matrix} p \\ \Delta\theta \end{matrix}$	22	24	26	28	30
0	46	50	54	58	62
0.1 25	6.82 29	7.3 283	7.83 31	6.34 23	8.85 22
0.2 5	12.6 295	13. 6362	14.6 512	156 568	16.6 706
0.5	24.1 662	26. 1595	28.1 718	30.1 833	32.1 940

Действительно, из таблицы 3.1, например, видно, что $\nu_{G_{x,N}^{nd}(m, \Delta\theta, p)}$ при $\Delta\theta = 0$, $p = 2$ и при $\Delta\theta = 0.5$, $p = 4$ практически совпадают (значения чисел степеней свободы соответственно равны 6 и 5.9362).

Нетрудно заметить, что с ростом p разница в числе степеней свободы уменьшается. В случае применения метода усреднения по времени повышение

статистической устойчивости оценок объединенного энергетического спектра происходит пропорционально p (3.68).

Это обстоятельство говорит в пользу метода усреднения по времени при измерении энергетических спектров чисто случайных сигналов.

При измерении энергетических спектров смешанных сигналов применение метода усреднения по частоте часто предпочтительнее использования метода усреднения по времени.

3.5. Специфика статистических измерений и обработки энергетических спектров дискретных смешанных информационных сигналов в параметрических базисах Фурье

Структура смешанного дискретного информационного сигнала определена в общем виде соотношением (3.7):

$$X(n) = Y(n) + \sum_k A_k \cos(2\pi f_k n + \varphi_k),$$

где $Y(n)$ – дискретный чисто случайный сигнал.

Учитывая полученные ранее результаты по измерению и обработке спектров чисто случайных дискретных стационарных сигналов методом ДПФ-П, рассмотрим измерение и обработку методом ДПФ-П энергетических спектров смешанных СДИС.

Строго говоря, энергетический спектр чисто случайного дискретного стационарного сигнала $Y(n)$ и энергетический спектр дискретного квазидетерминированного стационарного сигнала $Z(n)$ имеют различную размерность [56]. В результате на практике возникают процессы, которые можно назвать «*эффektenom размерности*».

При аналоговых методах измерения энергетического спектра дискретного квазидетерминированного стационарного сигнала эту сложность при математическом описании спектра обходят путем введения δ – функции Дирака:

$$\delta(f) = 0; \text{ при } f \neq 0; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1. \quad (3.88)$$

То есть в спектральной области гармонические компоненты квазидетерминированного стационарного сигнала имеют «амплитуды», равные бесконечности.

При измерении энергетических спектров дискретных квазидетерминированных стационарных сигналов ПриИС *эффект размерности* приводит *к возрастанию* значений энергетических спектров на частотах гармонических компонент пропорционально N -интервалу.

При измерении энергетических спектров чисто случайных дискретных стационарных сигналов ПриИС эффект размерности приводит к тому, что значения энергетических спектров *не возрастают* пропорционально N -интервалу. При этом дисперсия оценки энергетических спектров остается постоянной, но корреляция значений энергетических спектров уменьшается.

Для иллюстрации данного явления было проведено математическое моделирование.

В качестве чисто случайного дискретного сигнала $Y(n)$ был выбран дискретный сигнал, значения которого были распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичным среднеквадратичным отклонением.

В качестве квазидетерминированного стационарного сигнала выбрана гармоническая компонента вида:

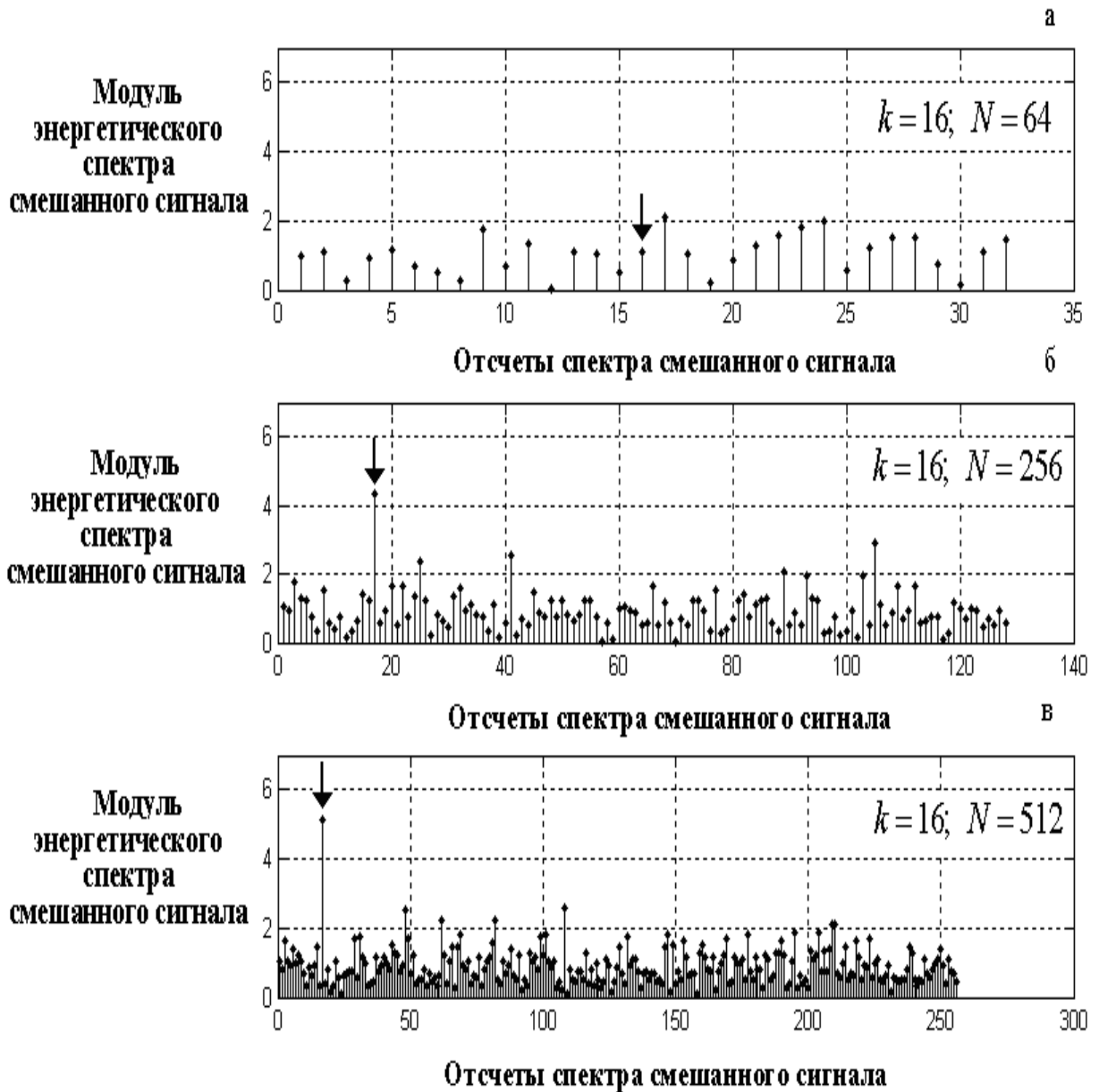
$$Z(n) = 0,4 \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{N} k \cdot n + \varphi \right], \quad (3.89)$$

где фаза φ распределена равномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

Результаты моделирования приведены на рисунке 3.9.

Несложно заметить, что с ростом N -интервала, дисперсия энергетического спектра чисто случайного дискретного сигнала остается неизменной. В то же

время энергетический спектр гармонической квазидетерминированной компоненты растет пропорционально N -интервалу.



Стрелкой отмечена частота гармонической квазидетерминированной компоненты

Рисунок 3.9 – Модули энергетического спектра смешанного сигнала для различных N -интервалов

В заключение настоящей главы рассмотрим вопрос влияния на статистические измерения спектрально-временных параметров эффекта размывания спектральных составляющих, «*leakage*», который часто называют «*эффектом утечки*».

Проявление данного эффекта связано тем, что при измерении энергетического спектра ДИС (в случае прямоугольного временного окна) мы измеряем спектр, полученный в результате циклической свертки спектра исследуемого сигнала со спектральным окном вида:

$$\omega_{\overline{ii\hat{a}\hat{e}\hat{d}\hat{d}}}(k) = \frac{\sin^2(k/2)}{N^2 \sin^2(k/(2N))}, \quad (3.90)$$

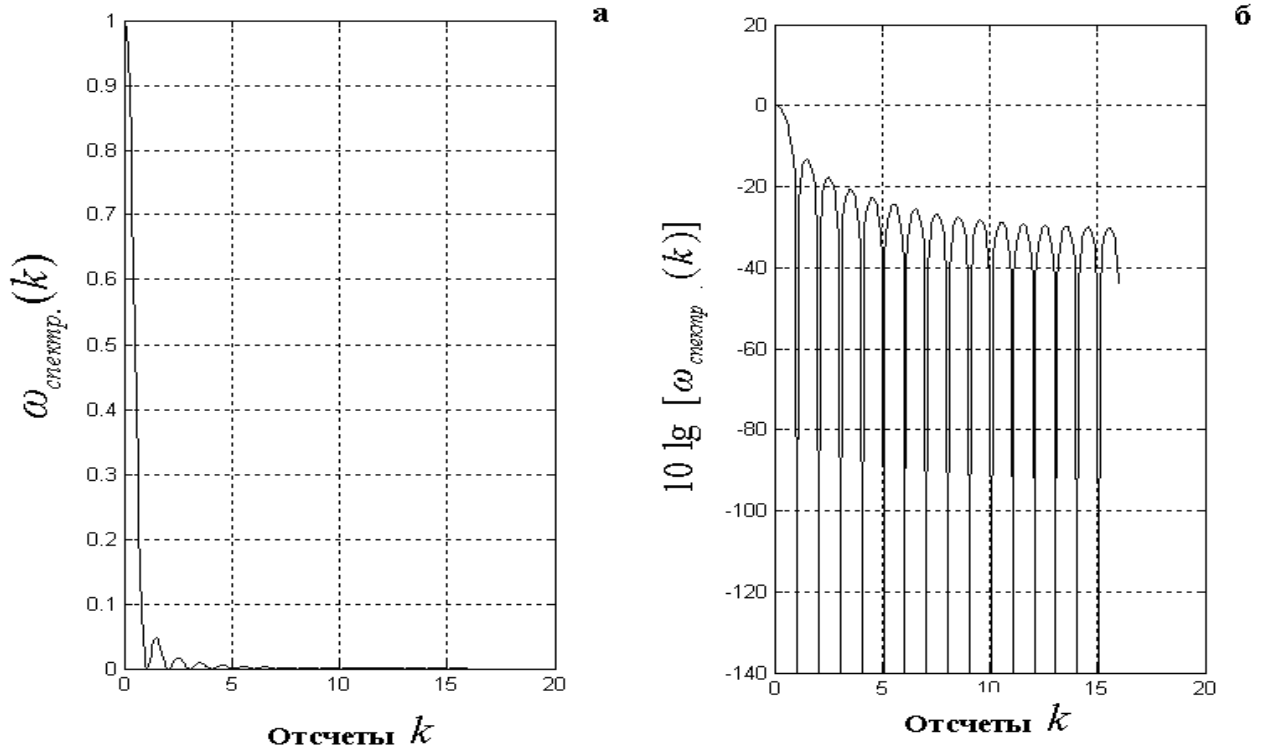
которое не локализовано, а как бы размыто по частоте (отсюда и название эффекта). Данный эффект присущ как ДПФ, так и ДПФ-П. Например, спектральное окно $\omega_{\overline{ii\hat{a}\hat{e}\hat{d}\hat{d}}}(k)$, соответствующее прямоугольному временному окну $\omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}(n) = 1, n = \overline{0, N-1}$, является внутренней характеристикой процедуры измерения спектра.

Возможно (путем взвешивания исходного сигнала временным окном, отличным от прямоугольного окна) введение иных спектральных окон в виде ядер, меняющих статистические характеристики измеряемого спектра [23, 27, 28, 46, 49, 57]. Отметим, что выбор временного окна однозначно определяет выбор спектрального окна.

Существует еще один вид окон - корреляционные окна [7, 27, 28, 174] $\omega_{\hat{e}\hat{i}\hat{d}\hat{d}}(r); r = \overline{-(N-1), +(N-1)}$, которые в дальнейшем не рассматриваются, так как в диссертации принят метод измерения энергетического спектра, минуя этап измерения корреляционной функции.

Отметим, что спектральные окна и соответствующие корреляционные окна связаны между собой прямыми и обратными Фурье-преобразованиями.

Спектральное окно (3.90), соответствующее прямоугольному временному окну $\omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}(n) = 1, n = \overline{0, N-1}$, имеет значительные боковые лепестки, которые могут приводить к существенному смещению оценок энергетических спектров смешанных сигналов на частотах вблизи квазидетерминированных компонент или узкополосных информационных сигналов (рисунок 3.10).



$N = 32$; а – линейный масштаб; б – логарифмический масштаб

Рисунок 3.10 – Спектральное окно $\omega_{\text{спектр.}}(k) = \frac{\sin^2(N \cdot k/2)}{N^2 \sin^2(k/2)}$

Рассмотрим вопрос статистической устойчивости оценок спектров в случае применения некоторого временного окна, которое в общем виде представим как $\omega_{\text{адап.}}(n)$; $n = \overline{0, N-1}$. С учетом двух замечаний, сделанных в начале раздела 3.3, в качестве модели измерительного сигнала выберем действительный дискретный белый шум $X(n)$ с нормальной плотностью распределения, математическим ожиданием $M_X = 0$ и дисперсией D_X на N -интервале. Представим оценку энергетического спектра $X(n)$, без потери общности, в следующем виде:

$$G_{x,N}(k, \theta, \omega_{\text{адап.}}) = g_{\cos}^2(k, \theta, \omega_{\text{адап.}}) + g_{\sin}^2(k, \theta, \omega_{\text{адап.}}); 0 \leq \theta < 1, \quad (3.91)$$

$$\text{где: } g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\text{адап.}}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega_{\text{адап.}}(n) \cos \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n, \quad (3.91, \text{ а})$$

$$g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\text{адап.}}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega_{\text{адап.}}(n) \sin \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n; k = \overline{0, N/2-1}. \quad (3.91, \text{ б})$$

Очевидно, что $M[g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})] = M[g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})] = 0$. В общем случае, коэффициенты ДПФ-П зависимы, и их совместную плотность распределения на частоте $(k + \theta)$ можно представить в следующем виде:

$$f(A) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}} \exp\left(-\frac{A^T K^{-1} A}{2} \right) \right); \quad (3.92)$$

где $A^T = [g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}), g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})]$ – вектор-строка;

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \text{ – корреляционная матрица вектора } A;$$

$\det K$ – детерминант матрицы K .

Элементы корреляционной матрицы K определяются следующими соотношениями:

$$k_{11} = M [g_{\cos}(k, \theta, \omega) \cdot g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})]; \quad (3.93)$$

$$k_{12} = M [g_{\cos}(k, \theta, \omega) \cdot g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})];$$

$$k_{21} = M [g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}) \cdot g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})];$$

$$k_{22} = M [g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}) \cdot g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})].$$

Или в векторной форме:

$$K = AA^T = \begin{bmatrix} g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}) \\ g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}) \end{bmatrix} [g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}), g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}})]; \quad (3.94)$$

Подставив в (3.93) (3.91, а) получим:

$$\begin{aligned} k_{11} &= M \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}(n) \cos \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}(n) \cos \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{N} M \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}^2(n) \cos^2 \frac{2\pi}{N}(k + \theta)n + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} \left[x(n) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}(n) \cos \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n \right] \cdot \left[x(m) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}(m) \cos \frac{2\pi}{N} (k + \theta)m \right] \Bigg].$$

Или:

$$\begin{aligned} k_{11} = & \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}^2(n) \cos^2 \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n \right] + \\ & + \frac{1}{N} \mathbf{M} \left[2 \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{m=n+1}^{N-1} \left[x(n) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}(n) \cos \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[x(m) \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}(m) \cos \frac{2\pi}{N} (k + \theta)m \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.95)$$

В силу того, что математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий, из определения белого шума непосредственно следует равенство нулю второго члена суммы (3.95). Следовательно, выражение (3.95) преобразуется к виду:

$$k_{11} = \frac{D_X}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}^2(n) \cos^2 \frac{2\pi}{N} (k + \theta)n \right]. \quad (3.96)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством $\cos^2 \alpha = \frac{(1 + \cos 2\alpha)}{2}$,

получим:

$$k_{11} = \frac{D_X}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}^2(n)} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{\delta}\hat{\alpha}\hat{i}}^2(n) \cos^2 \left(\frac{4\pi}{N} (k + \theta)n \right) \right] \right\}. \quad (3.97)$$

Проведя аналогичные выкладки и воспользовавшись тригонометрическими тождествами:

$$\sin^2 \alpha = \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2}; \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad (3.98)$$

получим:

$$k_{22} = \frac{D_x}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n)} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n) \cos^2\left(\frac{4\pi}{N}(k+\theta)n\right) \right] \right\}; \quad (3.99)$$

$$k_{21} = k_{12} = \frac{D_x}{2} \left\{ \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n)} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n) \sin^2\left(\frac{4\pi}{N}(k+\theta)n\right) \right] \right\}. \quad (3.100)$$

Так как при измерении энергетического спектра дискретного белого шума в качестве характеристики его *статистической устойчивости* используется число степеней свободы $\nu(k, \theta)$ (3.57):

$$\nu(k, \theta) = \frac{2M^2 [G_{x,N}(k, \theta)]}{D [G_{x,N}(k + \theta)]},$$

То найдем моменты случайной величины $G_{x,N}(k, \theta)$, воспользовавшись методом производящих функций моментов:

$$\begin{aligned} (u) &= M [\exp(u (g_{\cos}^2(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}) + g_{\sin}^2(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}))) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(g_{\cos}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}), g_{\sin}(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}})) \times \\ &\times \exp(u (g_{\cos}^2(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}) + g_{\sin}^2(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}))) dg_{\cos} dg_{\sin}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Подставляя (3.92) в (3.101) и используя интеграл вида (3.59, а), после несложных преобразований получим:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2u(k_{11} + k_{22}) + 4u^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}}. \quad (3.102)$$

Вычисляя первую и вторую производные производящей функции моментов $\varphi(u)$, найдем математическое ожидание $M_{G_{x,N}(k, \theta)} = M [G_{x,N}(k + \theta)]$ и дисперсию $D_{G_{x,N}(k, \theta)} = D [G_{x,N}(k + \theta)]$ оценки параметрического энергетического спектра $G_{x,N}(k, \theta)$:

$$M_{G_{x,N}(k,\theta)} = \frac{d\varphi(u)}{du} \Big|_{u=0} = k_{11} + k_{22} = D_X; \quad (3.103)$$

$$\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} \Big|_{u=0} = 3(k_{11} + k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22} - k_{12}^2).$$

С учетом того, что

$$D_{G_{x,N}(k,\theta)} = \left[\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)^2 \right] \Big|_{u=0}, \quad (3.104)$$

получим:

$$v(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}) = \frac{2}{(1 + F_1(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}))}; \quad (3.105)$$

$$F_1(k, \theta, \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}) = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n) \right]^2} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n) \cos^2 \frac{4\pi}{N}(k + \theta)n \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega_{\hat{a}\hat{d}\hat{a}\hat{i}}^2(n) \sin^2 \frac{4\pi}{N}(k + \theta)n \right]^2 \right\}. \quad (3.106)$$

Отметим, что выражение (3.63) является частным случаем соотношения (3.105).

Следует подчеркнуть, что при рассмотрении временных (и спектральных) окон в научной литературе в основном исследовался вопрос снижения уровня боковых лепестков окна и сохранения требуемого разрешения по частоте. В то же время вопросу статистической устойчивости получаемых при этом оценок энергетических спектров не уделялось должного внимания.

Полученные в этом разделе результаты позволяют восполнить этот пробел и перейти к исследованию временных, спектральных и корреляционных окон с системных позиций.

ВЫВОДЫ

1. Исторически сложилось два взаимосвязанных, но не подменяющих друг друга направления обработки случайных ДИС (СДИС): частотный подход и корреляционный подход. Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки. Однако с появлением эффективных алгоритмов получения коэффициентов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) – алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), частотный подход получил дополнительное и решающее преимущество перед корреляционным подходом.
2. В настоящее время широкое распространение получили аксиомы измерения (оценки) теоретико-вероятностных характеристик СДИС, выбранные, как допускается многими, по интуиции и не являющиеся оптимальными в смысле какого-нибудь критерия. Однако эффективность их применения неоднократно была подтверждена на практике.
3. Доказано, что цикличность корреляционной функции является результатом наложения в корреляционной области циклических корреляционных функций из-за дискретизации энергетического спектра с частотой в два раза меньшей, чем требуется при каноническом разложении Пугачева. Для адекватного описания в частотной области дискретных случайных (и смешанных) сигналов на конечных интервалах предложено аперидическое дискретное преобразование Фурье.
4. Исследованы стохастические (вероятностные) свойства параметрического ДПФ. На примере белого гауссова шума исследован вопрос статистической устойчивости параметрического энергетического спектра, в качестве характеристики которой выбрано число степеней свободы значений энергетического спектра $\nu(k, \theta)$, аппроксимирующего χ^2_ν распределения. Показано, что данная характеристика статистической устойчивости

энергетического спектра однозначно связана со среднеквадратичной относительной погрешностью.

5. Для получения состоятельных оценок энергетических спектров эргодических дискретных случайных сигналов широкое применение нашли два вида усреднения: метод усреднения по времени и метод усреднения по частоте. Исследованы возможности применения этих методов при измерении энергетического спектра эргодического дискретного случайного сигнала методом параметрического ДПФ. Доказано, что при измерении энергетических спектров смешанных сигналов применение метода усреднения по частоте предпочтительнее использования метода усреднения по времени.
6. Разработаны основы обработки спектрально-временных параметров смешанных дискретных сигналов на конечных интервалах. Строго говоря, энергетический спектр СДИС и энергетический спектр дискретного квазидетерминированного стационарного сигнала имеют различную размерность. В результате на практике возникают процессы, совокупность которых автор назвал «*эффектом размерности*».
7. При рассмотрении временных, частотных, спектральных и корреляционных окон в научной литературе в основном исследовался вопрос снижения уровня боковых лепестков окна при сохранении требуемого разрешения по частоте. В то же время вопросу статистической устойчивости получаемых при этом оценок энергетических спектров не уделялось должного внимания. Полученные в этом разделе результаты позволяют восполнить этот пробел и перейти к исследованию временных, частотных, спектральных и корреляционных окон с системных позиций.

ГЛАВА 4

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
МГНОВЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ**

**4.1. Некоторые понятия и определения цифровой обработки
мгновенных параметров информационных сигналов**

В рамках теории цифровой обработки ИС представляется крайне важным и актуальным как с теоретической, так и с практической точки зрения *однозначное определение мгновенных параметров* (амплитуды, фазы и частоты) ИС на конечных интервалах во временной области.

Действительный аналоговый ИС $x(t)$ может быть представлен как во *временной форме*:

$$x(t) = A(t) \cdot \cos [\varphi(t)]; \quad (4.1)$$

где $A(t)$ – мгновенная амплитуда (огibaющая ИС);

$\varphi(t)$ – мгновенная фаза ИС $x(t)$.

$$f(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \text{ – мгновенная частота.}$$

так и в *спектральной форме*:

$$x(t) = \sum_k A_k \cos (2\pi f_k t + \varphi_k); \quad (4.2)$$

где A_k – амплитуда k -й гармонической компоненты;

f_k – частота k -й гармонической компоненты;

φ_k – начальная фаза k -й гармонической компоненты.

Заметим, что представления (4.1) и (4.2) – это два равноправных представления ИС $x(t)$, применение которых определяется областью приложения методов обработки ИС.

Спектральная форма представления ИС $x(t)$ в виде (4.2) широко используется при обработке ИС $x(t)$, прошедшего некоторую *линейную цепь*

(линейную среду) с постоянными параметрами. Эффективность такого подхода объясняется справедливостью *принципа суперпозиции для линейных цепей* и тем, что гармонические компоненты на выходе линейной цепи с постоянными параметрами сохраняют свою частоту. Следовательно, зная амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики линейной цепи с постоянными параметрами и используя метод суперпозиции, можно достаточно просто получить ИС на выходе линейной цепи.

Временная форма представления ИС $x(t)$ в виде (4.1) широко используется при обработке ИС $x(t)$, прошедшего некоторую *безынерционную нелинейную цепь (нелинейную среду)*, например, преобразователь, осуществляющий возведение в квадрат измеряемой величины. В то же время представление ИС $x(t)$ в виде (4.1) при обработке ИС $x(t)$, прошедшего некоторую линейную цепь с постоянными параметрами, как правило, не применяется в силу неэффективности.

Подчеркнем, что понятия *мгновенной частоты* сложного ИС (4.1) и *частоты* гармонического ИС (4.2) – это разные понятия. И именно имевшее место ошибочное смешение этих понятий во многом предопределило возникновение в сороковых годах прошлого столетия серьезных (категоричных и резких по форме) научных дискуссий между сторонниками представлений (4.1) и (4.2) [167].

Поставим в соответствие действительному ИС $x(t)$ некоторый комплексный ИС $y(t)$ [11, 167]:

$$y(t) = x(t) + j \cdot v(t); \quad (4.3)$$

где $x(t)$; $-\infty < t < \infty$; – исходный действительный сигнал;

$v(t)$ – мнимая часть комплексного ИС $y(t)$.

Представим комплексный ИС $y(t)$ в экспоненциальной форме:

$$y(t) = [\sqrt{x^2(t) + v^2(t)}] \cdot \exp \left\{ j \cdot \arctg \frac{v(t)}{x(t)} \right\} = A(t) \cdot \exp \{ j \cdot \varphi(t) \}; \quad (4.4)$$

где $\varphi(t) = \arctg \frac{v(t)}{x(t)}$ – мгновенная фаза ИС;

$A(t) = [\sqrt{x^2(t) + v^2(t)}]$ – огибающая (мгновенная амплитуда) ИС;

$$x(t) = A(t) \cdot \cos[\varphi(t)];$$

$$v(t) = A(t) \cdot \sin[\varphi(t)].$$

Мгновенная частота ИС $x(t)$ задается следующим соотношением:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\frac{dv(t)}{dt} \cdot x(t) - \frac{dx(t)}{dt} \cdot v(t)}{x^2(t) + v^2(t)}. \quad (4.5)$$

Выбор мнимой части $v(t)$ комплексного ИС $y(t)$ однозначно определяет мгновенные параметры ИС. Следовательно, любое представление ИС $x(t)$ в виде (4.1) предполагает *по умолчанию* выбор для комплексного ИС $y(t)$ (4.3) некоторой мнимой части $v(t)$.

Мнимая часть $v(t)$ комплексного ИС $y(t)$, как правило, определяется с помощью некоторого оператора \mathfrak{R} , осуществляющего преобразование исходного ИС $x(t)$ в $v(t)$. Различные подходы к определению мгновенных значений параметров аналогового действительного ИС [46, 160] связаны с выбором того или иного оператора \mathfrak{R} .

Например, в работе [11] для некоторого гипотетического измерителя мгновенных значений параметров аналогового действительного ИС (рисунок 4.1) сформулированы следующие *физические условия выбора оператора \mathfrak{R}* :

- малым изменениям входного ИС $x(t)$ должны соответствовать малые изменения результатов измерения мгновенных параметров: амплитуды, фазы и частоты аналогового действительного ИС $x(t)$;
- результаты измерения мгновенной фазы и мгновенной частоты не должны зависеть от мощности ИС при неизменной его форме;
- параметры чисто гармонических сигналов: амплитуды, частоты и фазы, измеренные гипотетическим измерителем (рисунок 4.1), должны соответствовать их классическим определениям.

Другими словами, для ИС вида:

$$x(t) = A_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0); -\infty < t < \infty; \quad (4.6)$$

в результате измерения должны быть получены следующие результаты:

$$A(t) = A_0; \varphi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_0; f(t) = f_0. \quad (4.7)$$

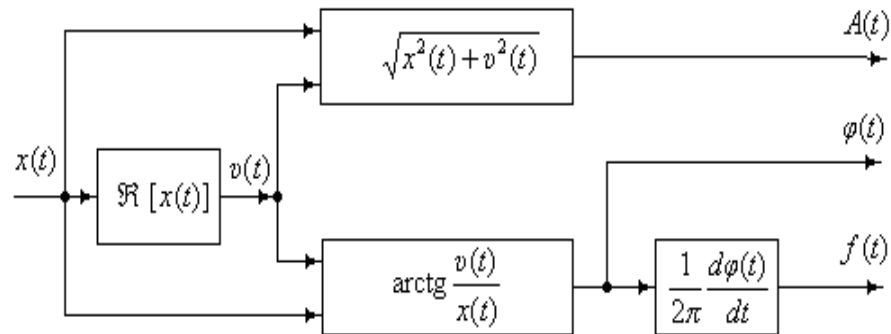


Рисунок 4.1 – Алгоритм гипотетического измерителя мгновенных значений амплитуды, фазы и частоты аналогового действительного ИС $x(t)$

В [11] доказано, что *единственным линейным (аддитивным) оператором*, удовлетворяющим указанным выше условиям, является оператор Гильберта \mathfrak{H} :

$$v(t) = \mathfrak{H} [x(t)] = \text{VP} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (4.8)$$

где символ VP означает, что интеграл понимается в смысле главного значения.

Если действительный сигнал $x(t)$ интегрируем в квадрате, то его можно представить в спектральной форме в следующем виде [167]:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega; \quad (4.9)$$

где $S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ – спектральная плотность ИС $x(t)$.

Нетрудно видеть, что спектральная плотность $S(j\omega)$ является эрмитовой функцией, так как ее действительная часть является четной функцией частоты ω , а мнимая часть нечетной функцией частоты ω [9, 23]. Если спектральной

плотности $S(j\omega)$ сопоставить спектральную плотность $V(j\omega)$ вида (которая также является эрмитовой функцией):

$$V(j\omega) = \begin{cases} -jS(j\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ jS(j\omega), & \omega < 0 \end{cases}, \quad (4.10)$$

то обратное преобразование Фурье спектральной плотности $V(j\omega)$ определяет преобразование Гильберта ИС $x(t)$:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.11)$$

Формулами (4.9) и (4.11) определены два равноправных способа реализации преобразования Гильберта действительного ИС $x(t)$. Второй способ иллюстрирует физический смысл преобразования Гильберта ИС $x(t)$.

Действительно, модули спектральных плотностей $S(j\omega)$ и $V(j\omega)$ сигналов $x(t)$ и $v(t)$ равны между собой, а фаза спектральной плотности $V(j\omega)$ сдвинута относительно фазы спектральной плотности $S(j\omega)$ в области отрицательных частот на $+\pi/2$, а в области положительных частот на $-\pi/2$. Именно в фазовом повороте спектральной плотности $V(j\omega)$ и заключается физический смысл преобразования Гильберта ИС $x(t)$.

Комплексный сигнал вида (4.3), у которого мнимая часть удовлетворяет соотношению (4.9) (или (4.11)) называют *гильбертовым сигналом* $y_3(t)$, мнимую часть которого (сигнал $v(t)$) называют *сопряженным сигналом* (по отношению к сигналу $x(t)$).

В работе [167] показано, что преобразование Гильберта можно распространить и на почти-периодические ИС.

Сделаем некоторые пояснения, связанные с терминологией при описании гильбертовых сигналов $y_3(t)$. Дело в том, что широко распространенная практика (как в отечественной, так и зарубежной научной литературе) называть

гильбертовы сигналы *аналитическими ИС* не вполне корректна (если не сказать, неточна), так как она может приводить к ошибочным выводам относительно истинных свойств гильбертовых сигналов. Вопрос некорректности применения термина «*аналитический сигнал*» для гильбертова ИС подробно рассмотрен в [160]. Здесь только отметим, что *аналитический комплексный сигнал* совсем не обязательно должен быть *гильбертовым сигналом*. Справедливо и обратное утверждение: *гильбертов сигнал* совсем не обязательно должен быть *аналитическим комплексным сигналом*.

В заключение раздела рассмотрим вопрос гильбертовского представления непрерывных ИС на конечном интервале.

Согласно соотношению (4.9), определение мнимой части гильбертова ИС в какой-то момент времени t_i требует знания исходного ИС на всей временной оси от $-\infty$ до $+\infty$, то есть преобразование Гильберта *не является локальным преобразованием*. Преобразование Гильберта можно отнести к *асимптотически локальным преобразованиям*, так как ядро преобразования Гильберта является быстро затухающей функцией вида $\sin(x)/x$. Важно другое: в силу отсутствия свойства локальности у преобразования Гильберта, при гильбертовском представлении непрерывных ИС на конечном интервале их *оггибающие не являются финитными функциями*.

Решение данной проблемы представляется важной и актуальной с точки зрения теории и практики обработки мгновенных параметров ДИС, так как обработка мгновенных параметров ДИС проводится, во-первых, на конечных, а не на бесконечных интервалах, во-вторых, исследуемые ИС являются дискретными сигналами.

В работе [167] для решения указанной проблемы рассмотрено модифицированное преобразование Гильберта, которое названо *преобразованием Гильберта-Коржика*. В данном преобразовании предложено исходный непрерывный сигнал, заданный на конечном интервале $[0, T]$, периодически продолжить на всю временную ось $-\infty$ до $+\infty$ с периодом T . В этом случае *сопряженный сигнал также оказывается периодическим с периодом T* .

Проведенный автором настоящей работы анализ преобразования Гильберта-Коржика показал, что данное преобразование, с одной стороны, лишь частично решает *проблему финитности огибающих аналоговых сигналов*, заданных на конечном интервале, и с другой стороны – *не учитывает дискретность огибающих и конечность интервала обработки ДИС*.

В разделах 4.2 и 4.3 данной главы будет дано путем обобщений дискретного преобразования Гильберта более полное решение проблемы отсутствия свойства финитности у сопряженных дискретных сигналов на конечных интервалах (а, следовательно, финитности огибающих дискретных сигналов).

4.2. Дискретное преобразование Гильберта

Рассмотрим, аналогично [11, 42, 161, 167], альтернативный метод определения огибающей (мгновенной амплитуды) действительного, T -периодического ИС $x_T(t)$, представленного рядом Фурье:

$$x_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)], \quad f_0 = \frac{1}{T}. \quad (4.12)$$

Определим огибающую ИС $x_T(t)$ как огибающую $A(t)$ семейства функций $\zeta(\varphi, t)$ вида:

$$\zeta(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t - \varphi) + b_k \sin(2\pi k f_0 t - \varphi)]. \quad (4.13)$$

Огибающая $A(t)$ семейства функций $\zeta(\varphi, t)$, если она существует, должна являться решением следующей системы уравнений [42]:

$$\begin{cases} \zeta(\varphi, t) = A(t); \\ \frac{d[\zeta(\varphi, t)]}{d\varphi} = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Используя тождественные тригонометрические преобразования и преобразовав семейство функций $\zeta(\varphi, t)$:

$$\zeta(\varphi, t) = \cos \varphi \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)] + \\ + \sin \varphi \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \sin(2\pi k f_0 t) - b_k \cos(2\pi k f_0 t)] = \cos \varphi \cdot x_T(t) + \sin \varphi \cdot v_T(t),$$

$$\text{где } v_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \sin(2\pi k f_0 t) - b_k \cos(2\pi k f_0 t)]; \quad (4.15)$$

систему уравнений (4.14) представим в следующем виде:

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot x_T(t) + \sin \varphi \cdot v_T(t) = A_T(t); \\ \cos \varphi \cdot v_T(t) - \sin \varphi \cdot x_T(t) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Несложно убедиться в том, что решением системы (4.15) является следующее соотношение [42]:

$$A_T(t) = \sqrt{x_T^2(t) + v_T^2(t)}. \quad (4.17)$$

В работе [160] показано, что если теорема Римана о локализации справедлива для ряда (4.12), то из этого вовсе не следует справедливость теоремы Римана о локализации и для ряда (4.15), связанного с исходным рядом оператором Гильберта \mathfrak{H} .

Напомним, что теорема Римана о локализации утверждает, что поведение ряда (4.12) (его сходимость к некоторому значению или расходимость) в некоторой точке t_0 зависит только от поведения ряда в сколь угодно малой окрестности t_0 .

Из того, что теорема Римана о локализации неприменима для сопряженного ряда $v_T(t)$ (4.15) по отношению к ряду $x_T(t)$ (4.12), непосредственно следует четыре важных вывода.

1. При определении огибающей некоторого действительного ИС на отрезке $t \in [-T/2, +T/2]$ необходимо знать (или доопределить) поведение исходного ИС вне отрезка $t \in [-T/2, +T/2]$.
2. Выражением (4.17) определяется огибающая $A_T(t)$ периодически продолженного ИС, заданного на интервале $t \in [-T/2, +T/2]$, то есть T -периодического ИС $x_T(t)$.

3. Выражениями (4.9) или (4.11) определяется огибающая $A(t)$ ИС $x(t)$, заданного на всей временной оси $t \in [-\infty, +\infty]$.

4. Для ИС $x(t)$, заданного на интервале $t \in [-T/2, +T/2]$ и равного нулю вне этого интервала (то есть при $t \notin [-T/2, +T/2]$, $x(t) = 0$), огибающая ИС $A_{T,0}(t)$ определяется в соответствии с выражением (4.9) или (4.11).

Таким образом, при обработке ИС необходимо, во избежание ошибок, четко понимать, какую огибающую мы получаем: $A_T(t)$, $A(t)$ или $A_{T,0}(t)$.

Предположим, что ряд (4.12):

$$x_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)], \quad f_0 = \frac{1}{T}, \quad (4.18)$$

ограничен m членами, то есть дискретный спектр ИС $x_T(t)$ равен нулю при $k > m$. Согласно теореме Котельникова, исходный сигнал полностью определяется своими отсчетами, взятыми через интервал $\Delta t = \frac{1}{2mf_0}$:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \frac{\sin(\pi m f_0 t - n)}{(\pi m f_0 t - n)} = \sum_{n=-m/2}^{m/2} x(n) \cdot \frac{\sin(\pi m f_0 t - n)}{m \sin(\pi f_0 t - n)}. \quad (4.19)$$

Аналогично можно установить, что:

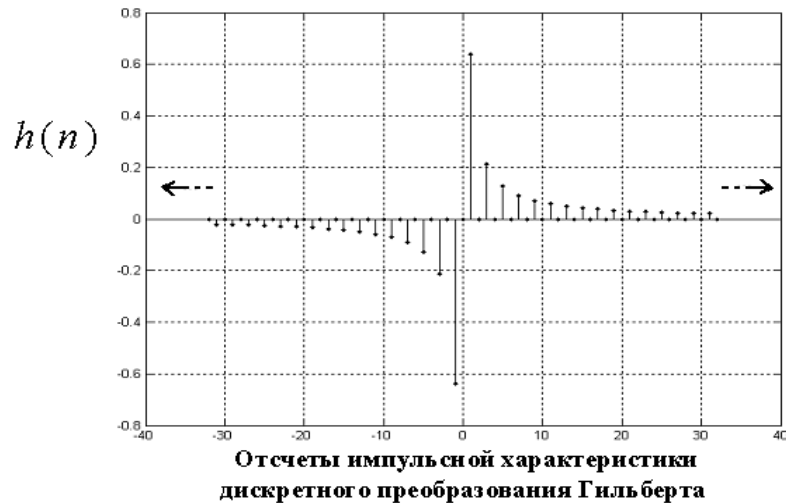
$$v_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n) \cdot \frac{\sin(\pi m f_0 t - n)}{(\pi m f_0 t - n)} = \sum_{n=-m/2}^{m/2} v(n) \cdot \frac{\sin(\pi m f_0 t - n)}{m \sin(\pi f_0 t - n)}. \quad (4.20)$$

Опираясь на соотношение (4.11), описывающее физический смысл дискретного преобразования Гильберта, несложно найти дискретную импульсную характеристику БИХ-фильтра, осуществляющего дискретное преобразование Гильберта некоторого дискретного ИС $x(n)$ [46]:

$$h(n) = \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(\pi n)] = \frac{1}{\pi n} \left\{ 2 \sin^2 \left[\frac{\pi n}{2} \right] \right\}; \quad \text{при } n \neq 0;$$

$$h(n) = 0; \quad \text{при } n = 0. \quad (4.21)$$

На рисунке 4.2 приведена в качестве примера дискретная импульсная характеристика преобразования Гильберта при $n = -32, 32$.



$$n = -32, 32$$

Рисунок 4.2 – Импульсная характеристика БИХ-фильтра, осуществляющего дискретное преобразование Гильберта

Зная импульсную характеристику фильтра, осуществляющего дискретное преобразование Гильберта (4.21), получение преобразования Гильберта можно осуществить как свертку $h(n)$ исходного ИС $x(n)$:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k). \quad (4.22)$$

Для реализации дискретного преобразования Гильберта во временной области в виде дискретного фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтром), необходимо прежде всего выбрать способ усечения импульсной характеристики (4.21). Выбрав длину импульсной характеристики КИХ-фильтра (которая может быть четной или нечетной, что приводит к КИХ-фильтрам разного типа [46]), можно реализовать дискретный преобразователь Гильберта в виде нерекурсивного КИХ-фильтра с числом ответвлений, равным выбранной длине импульсной характеристики.

В работе [46] подробно рассмотрены преимущества и недостатки реализации дискретного преобразования Гильберта во временной области. Здесь же отметим только два момента. Во-первых, амплитудно-частотная

характеристика дискретного преобразователя Гильберта, реализуемого в виде дискретного КИХ-фильтра, имеет пульсации в полосе пропускания за счет усечения во временной области импульсной характеристики [46]. Эти относительно значительные пульсации – результат известного явления Гиббса: ограничение некоторой характеристики в одной области (в нашем случае во временной области), приводит к пульсации в другой области (в нашем случае в частотной области).

Дискретное преобразование Гильберта может быть реализовано и в частотной области. Отметим, что реализация преобразования Гильберта в частотной области позволяет минимизировать пульсации в полосе пропускания и обеспечить более качественную генерацию гильбертовых сигналов, особенно в том случае, когда полоса преобразователя Гильберта должна быть соизмерима с полосой частот исходного ИС [46].

Определим дискретное преобразование Гильберта (ДПГ) для действительного ДИС $x(n)$, заданного на конечном интервале $n = \overline{(0, N-1)}$, следующим образом:

$$x_{\bar{3}}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} V_N(k) W_N^{-kn}; V_N(k) = \begin{cases} -j \cdot S_N(k) & \text{и} \text{д} \text{е} \quad k = \overline{1, (N/2 - 1)}; \\ S_N(k) = 0 & \text{и} \text{д} \text{е} \quad k = 0; k = N/2; \\ + j \cdot S_N(k) & \text{и} \text{д} \text{е} \quad k = \overline{(N/2 + 1), (N - 1)}; \end{cases} ;$$

где $x_{\bar{3}}(n)$ – сопряженный сигнал, полученный методом ДПГ ИС

$$x(n); W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), n = \overline{0, (N-1)}, S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}. \quad (4.23)$$

Комплексный сигнал:

$$y_{\bar{3}}(n) = x(n) + j \cdot x_{\bar{3}}(n), \quad (4.24)$$

является **дискретным гильбертовым ИС** и позволяет **однозначно определить мгновенные параметры действительного дискретного ИС $x(n)$** , представив его в виде:

$$x(n) = A(n) \cdot \cos[\varphi(n)]; \quad (4.25)$$

где $A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_{\Im}^2(n)}$ – мгновенная амплитуда ИС $x(n)$;

$\varphi(n) = \arctg\left[\frac{x_{\Im}(n)}{x(n)}\right]$ – мгновенная фаза ИС $x(n)$;

$f(n) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{x(n) \cdot [x_{\Im}(n+1) - x_{\Im}(n)] - x_{\Im}(n) \cdot [x(n+1) - x(n)]}{x^2(n) + x_{\Im}^2(n)} \right\}$ –

мгновенная частота ИС $x(n)$.

Нетрудно видеть, что для чисто гармонического ИС $x_p(n) = A_p \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} p \cdot n + \varphi_p\right)$ частота и мгновенная частота ИС $x_p(n)$

совпадают между собой. Структура процедуры (рисунок 4.3) получения гильбертова дискретного ИС методом ДПФ может быть представлена в виде выполнения следующих операций [46]:

- осуществление измерительного N -точечного преобразования ДПФ действительного дискретного ИС $x(n)$, то есть получение спектра $S_N(k)$, $k = \overline{0, (N-1)}$;
- создание нового спектра $S_{1,N}(k)$, $k = \overline{0, (N-1)}$:

$$S_{1,N}(0) = S_N(0);$$

$$S_{1,N}(k) = 2S_N(k); \quad \text{и} \quad k = \overline{1, (N/2-1)};$$

$$S_{1,N}(N/2) = S_N(N/2);$$

$$S_{1,N}(k) = 0; \quad \text{и} \quad k = \overline{(N/2+1), (N-1)}; \quad (4.26)$$

- осуществление N -точечного обратного преобразования ДПФ спектра $S_{1,N}(k)$.

Одним из преимуществ рассмотренной измерительной процедуры является то, что *дискретное преобразование Гильберта* $x_{\Im}(n)$ исходного ИС $x(n)$ и *гильбертов сигнал* $y_{\Im}(n)$ определяются *одновременно*.

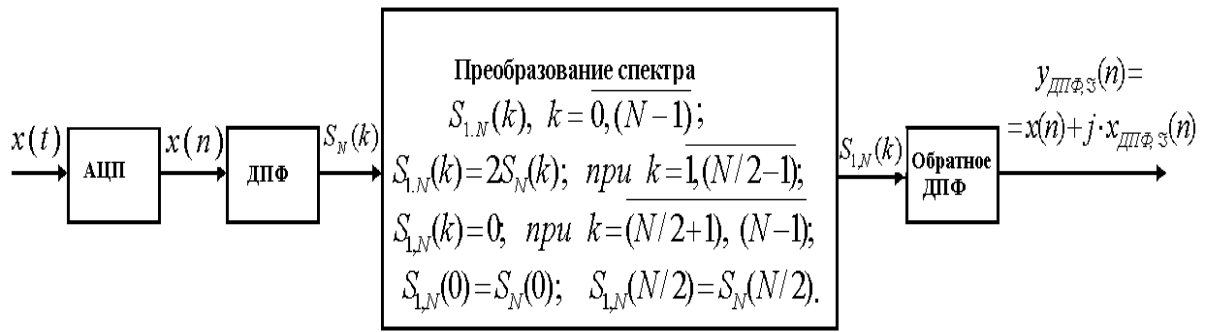


Рисунок 4.3 – Структура получения гильбертова ДИС методом ДПФ

4.3.Обобщенное дискретное преобразование Гильберта дискретных информационных сигналов

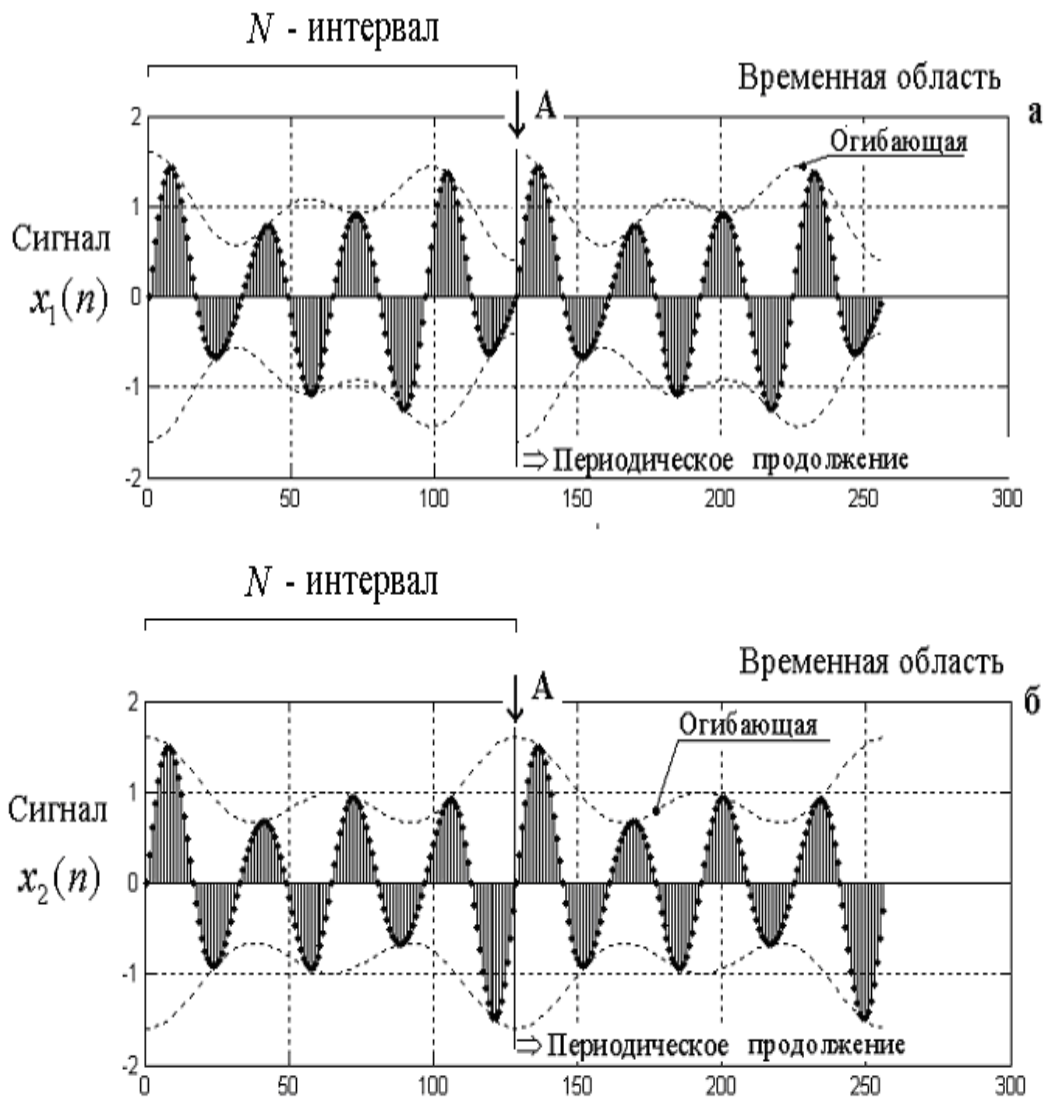
В основе ДПГ в частотной области, рассмотренного в предыдущем разделе, лежит использование преобразования ДПФ, для которого выполнение операции дискретизации в одной области приводит к операции периодизации (периодического продолжения) в другой области.

Для ДПФ характерна дискретность, как во временной, так и в частотной областях, что приводит к периодизации как дискретного ИС $x(n)$, заданного на N -интервале, так и его дискретного спектра $S_N(k)$, также заданного на N -интервале. Откуда непосредственно следует вывод о том, что реализация дискретного преобразования Гильберта (ДПГ) в частотной области для некоторого дискретного ИС $x(n)$, рассмотренная в предыдущем разделе, дает нам огибающую *периодически продолженного дискретного ИС* $x(n)$ (рисунок 4.4), спектр которого также *дискретен и периодичен*.

Другими словами, ДПГ в частотной области на основе ДПФ, по сути дела, является *дискретным вариантом преобразования Гильберта-Коржика*, рассмотренного в разделе 4.1.

Если огибающая является периодическим сигналом, то в случае несовпадения N -интервала с периодом огибающей (рисунок 4.4, а) имеет место

«разрыв непрерывности» огибающей (на рисунке 4.4, а это линия А), так как при применении ДПФ наблюдается периодическое продолжение ИС.



а – при несовпадении N -интервала с периодом огибающей;

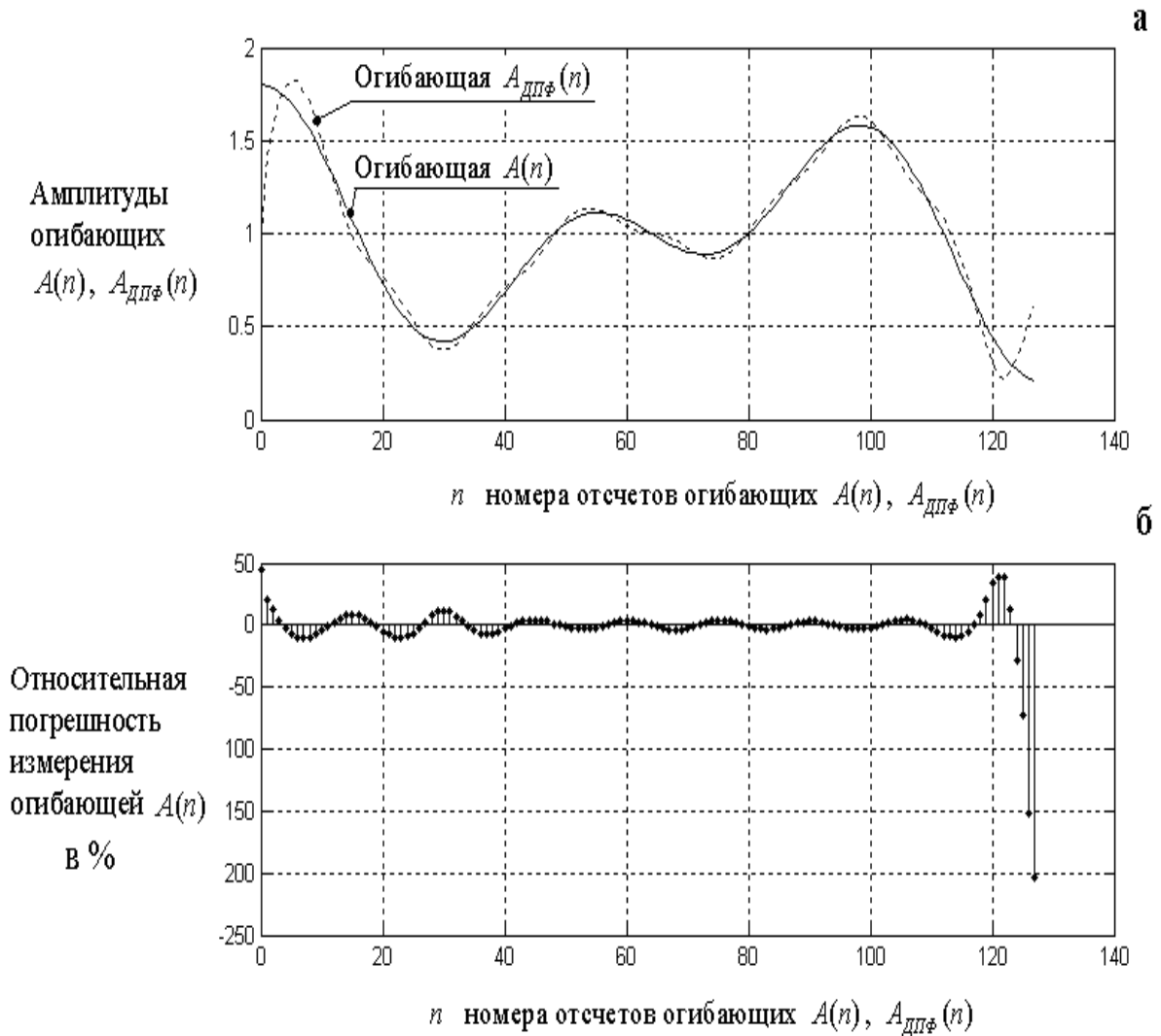
б – при совпадении N -интервала с периодом огибающей

Рисунок 4.4 – Огибающие ДИС, измеренные методом дискретного преобразования Гильберта в частотной области

В случае совпадения N -интервала с периодом огибающей, разрыва непрерывности огибающей по линии А не наблюдается (рисунок 4.4, б). Так как при измерении огибающей, например, в приложениях, рассмотренных в первой главе диссертационного исследования, как правило, невозможно *априори* гарантировать совпадение N -интервала с периодом огибающей, то это должно,

исходя из теоретических предпосылок, приводить к *существенной потере точности результатов измерения огибающей* на N -интервале.

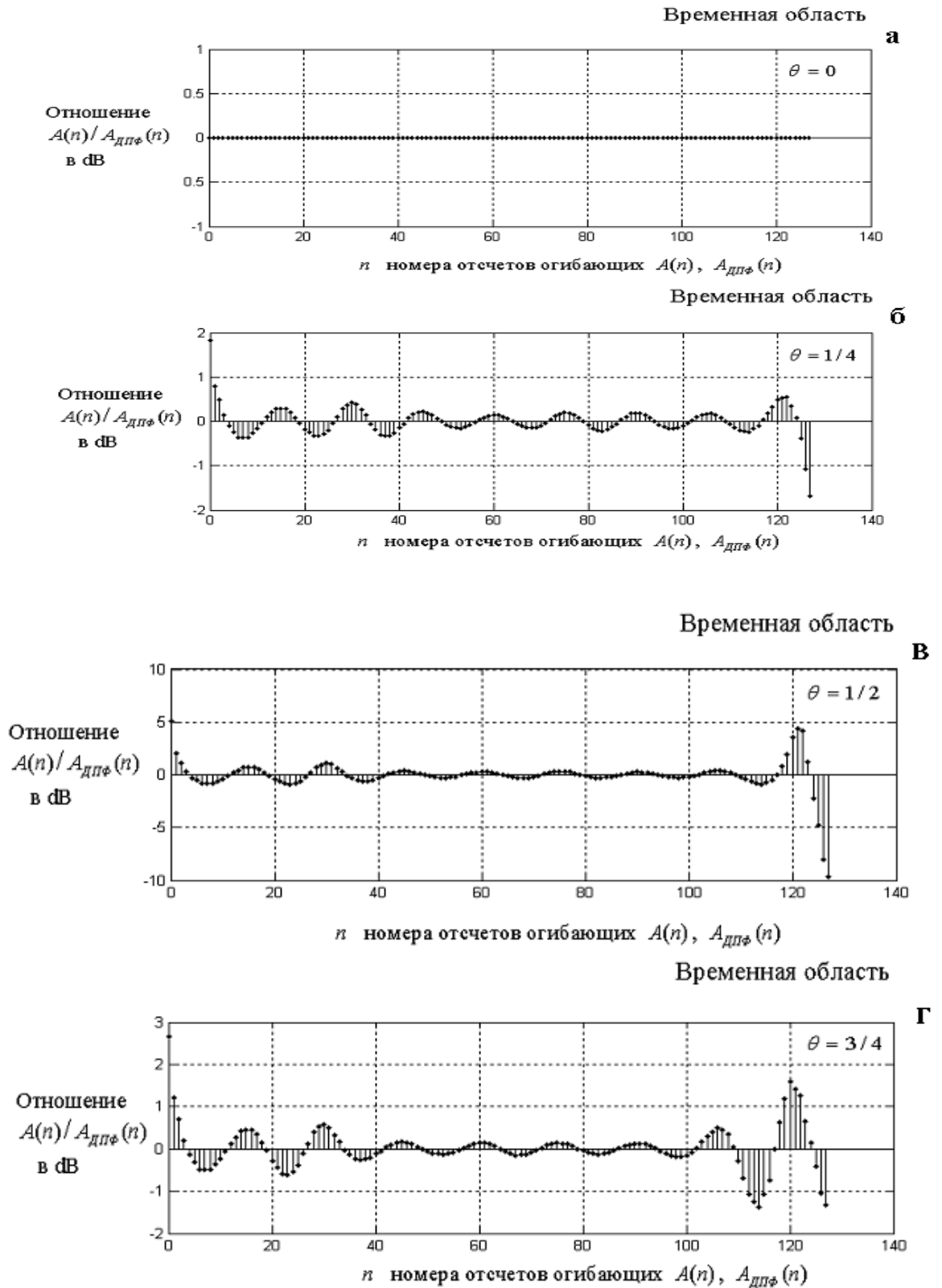
Для подтверждения теоретических положений было проведено моделирование, результаты которого приведены на рисунках 4.5 и 4.6.



а: огибающая $A(n)$ – теоретическая огибающая на N -интервале и огибающая $A_{ДПФ}(n)$ – огибающая, измеренная методом дискретного преобразования Гильберта в частотной области;

б: относительная погрешность измерения огибающей $A(n)$

Рисунок 4.5 – Относительная погрешность измерения огибающей $A(n)$ на N -интервале



а – $\theta = 0$, б – $\theta = 1/4$, в – $\theta = 1/2$, г – $\theta = 3/4$

Рисунок 4.6 – Изменение отношений (на N -интервале, в децибелах) значений огибающей $A(n)$ к значениям огибающей $A_{дпф}(n)$ при различных значениях параметра θ

На рисунке 4.5, **а** для ИС вида:

$$x(n) = A(n) \cdot \sin \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N}{16} \right) \cdot n; \quad (4.27)$$

$$\text{где } A(n) = \left\{ 1 + \gamma \cdot \left[\sum_{k=1}^2 \cos \frac{2\pi}{N} \left(k + \theta \right) \cdot n \right] \right\};$$

$$\theta = 1/2; \gamma = 0.4; N = 128; n = \overline{0,127};$$

приведены *реальная огибающая* $A(n)$ (4.27) на N -интервале и $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)$ – огибающая, измеренная методом дискретного преобразования Гильберта в частотной области. На рисунке 4.5, **б** приведена относительная погрешность измерения огибающей $A(n)$ на N -интервале:

$$\delta(n) = \{ [A(n) - A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)] / A(n) \} \cdot 100\%. \quad (4.28)$$

На рисунке 4.6 приведены отношения (на N -интервале, в децибелах) значений *реальной огибающей* $A(n)$ (4.27) к значениям огибающей $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)$, измеренной методом дискретного преобразования Гильберта в частотной области:

$$D = 20 \lg [A(n) / A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)], \quad (4.29)$$

для сигналов вида (4.27) при значениях параметра $\theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$.

Из анализа результатов моделирования измерения огибающей методом дискретного преобразования Гильберта в частотной области следует, что даже при относительно простых «*модулирующих сигналах*» в случае несовпадения N -интервала с периодом огибающей, ее измерению сопутствуют значительные относительные погрешности (рисунок 4.5). Изменения отношений (на N -интервале, в децибелах) значений огибающей $A(n)$ к значениям огибающей $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)$ также велики (рисунок 4.6).

График 4.6 **а** также не должен вводить в заблуждение, так как даже незначительное несовпадение N -интервала с периодом огибающей приводит к серьезному росту погрешностей (рисунок 4.6, **б, в, г**).

Рассмотрим *обобщение дискретного преобразования Гильберта в частотной области*, которое позволяет минимизировать недостатки ДПГ на основе ДПФ.

Обобщение дискретного преобразования Гильберта выполним на основе дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ), рассмотренного в разделе 2.1.

Пусть задан сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, которому поставим в соответствие сигнал $x_1(n)$ вида:

$$x_1(n) = x(n), \quad n = \overline{0, N-1}; \quad x_1(n) = 0, \quad -\infty < n < 0; \quad N \leq n < \infty. \quad (4.30)$$

ДВПФ ИС (4.30) определяется как z -преобразование $x_1(n)$ на единичной окружности (2.4):

$$\begin{aligned} S(z) \Big|_{z=\exp(-j2\pi f)} &= S(j2\pi f) = S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n); \quad 0 \leq f < 1. \end{aligned}$$

Напомним, что ДВПФ ставит в соответствие сигналу $x_1(n)$, заданному во временной области, непрерывный, периодический спектр $S(j\omega)$ в частотной области. Согласно выражению (4.10), спектральной плотности $S(j2\pi f) = S(j\omega)$ можно сопоставить спектральную плотность $V(j\omega)$ вида:

$$V(j\omega) = \begin{cases} -jS(j\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ jS(j\omega), & \omega < 0 \end{cases},$$

обратное дискретно-временное преобразование Фурье которой есть преобразование Гильберта ИС $x_1(n)$, т.е. задает сопряженный сигнал:

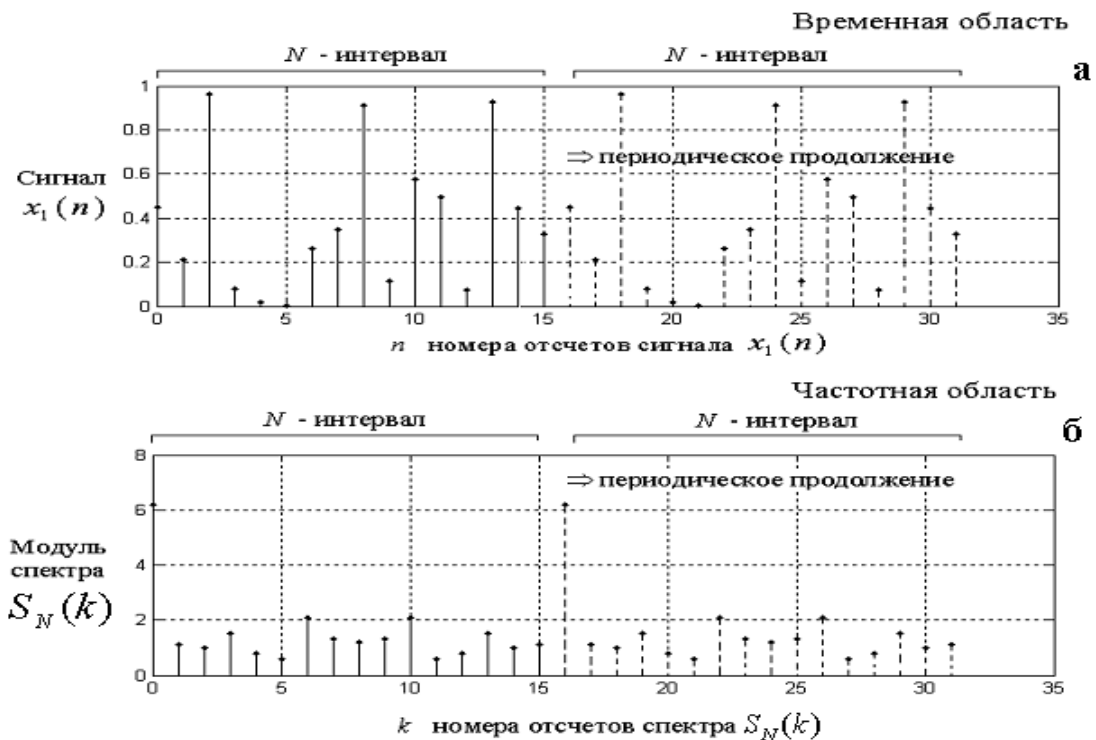
$$x_{1,\mathcal{S}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega; \quad -\infty < n < +\infty. \quad (4.31)$$

Следовательно, огибающая ИС $x_1(n)$ на основе дискретно-временного преобразования Фурье определяется следующим выражением:

$$A_{\text{огибающая}}(n) = \sqrt{x_1(n) + x_{1,3}(n)} ; -\infty < n < +\infty. \quad (4.32)$$

Огибающая ИС $x_1(n)$, задаваемая выражением (4.32), представляет собой **чисто теоретическое понятие** и, очевидно, измерить ее, исходя из соотношения (4.32), нельзя, так как в реальности работать с ИС бесконечной длительности по вполне очевидной причине невозможно. Однако для измерения огибающей ИС $x_1(n)$, задаваемой выражением (4.32), можно применить следующий подход.

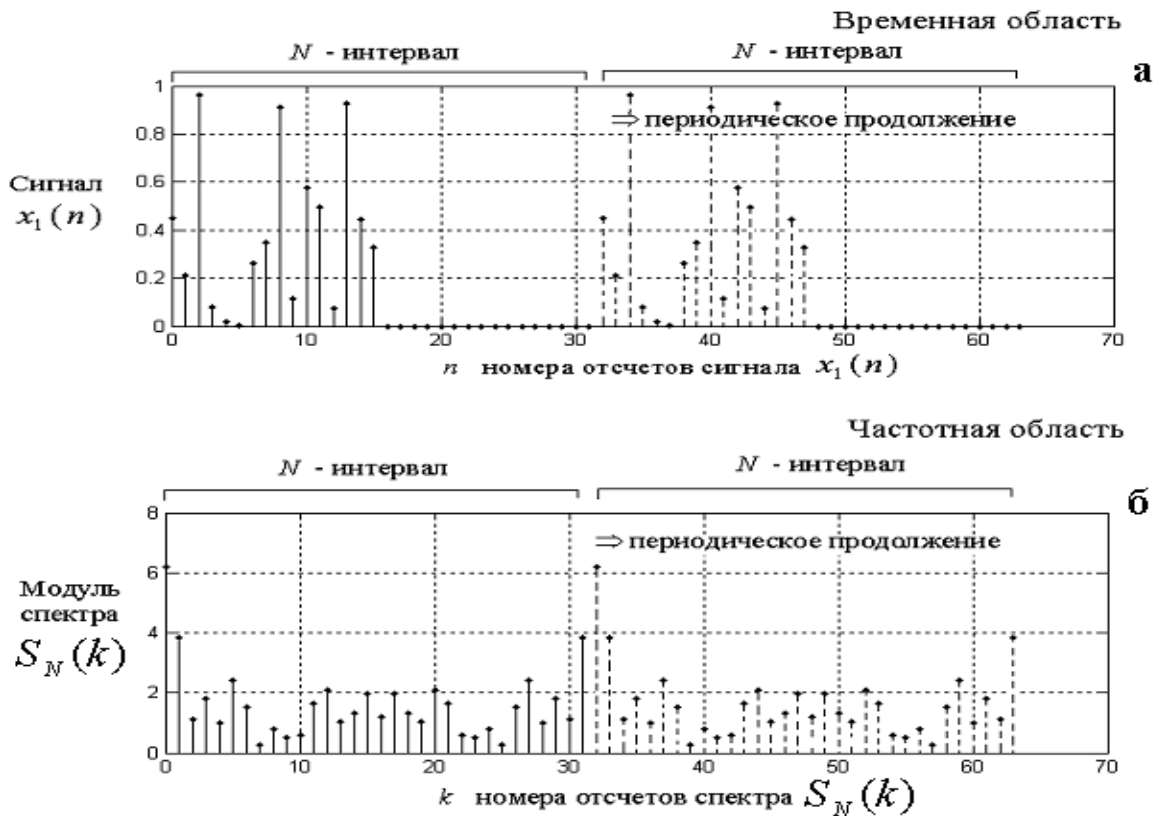
Если спектр $S(j2\pi f)$ в частотной области подвергнуть дискретизации с частотой дискретизации $f_0 = 1/N$, то во временной области сигнал $x_1(n)$ будет представлять собой периодическое продолжение ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$. Несложно установить, что на N -интервале сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ и спектр $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, будут связаны между собой дискретным преобразованием Фурье (рисунок 4.7): $x(n) \xleftrightarrow{\text{ДПФ}} S_N(k) ; k, n = \overline{0, N-1}. \quad (4.33)$



$$n = \overline{0,15}$$

Рисунок 4.7 – Дискретное преобразование Фурье дискретного ИС $x(n)$

Если спектр $S(j2\pi f)$ в частотной области подвергнуть дискретизации с частотой дискретизации $f_0 = 2/N$, то соответствующий ему сигнал во временной области будет представлять собой периодическое продолжение ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, дополненного N нулевыми отсчетами, т.е. получим аperiodическое ДПФ, введенное автором в разделе 3.2 (рисунок 4.8).



$$n = \overline{0,15}$$

Рисунок 4.8 – Аperiodическое дискретное преобразование Фурье дискретного ИС $x(n)$

На рисунках 4.9 и 4.10 приведены результаты моделирования измерений огибающих, проведенных методом ДПФ $A_{\bar{A}i\bar{O}}(n)$ (рисунок 4.9) и методом АДПФ (рисунок 4.10), а на рисунке 4.11 относительные погрешности измерения огибающих: $A_{\bar{A}i\bar{O}}(n)$, $A_{\bar{A}\bar{A}i\bar{O}}(n)$, $A_{\bar{A}i\bar{O}-i}(n)$.

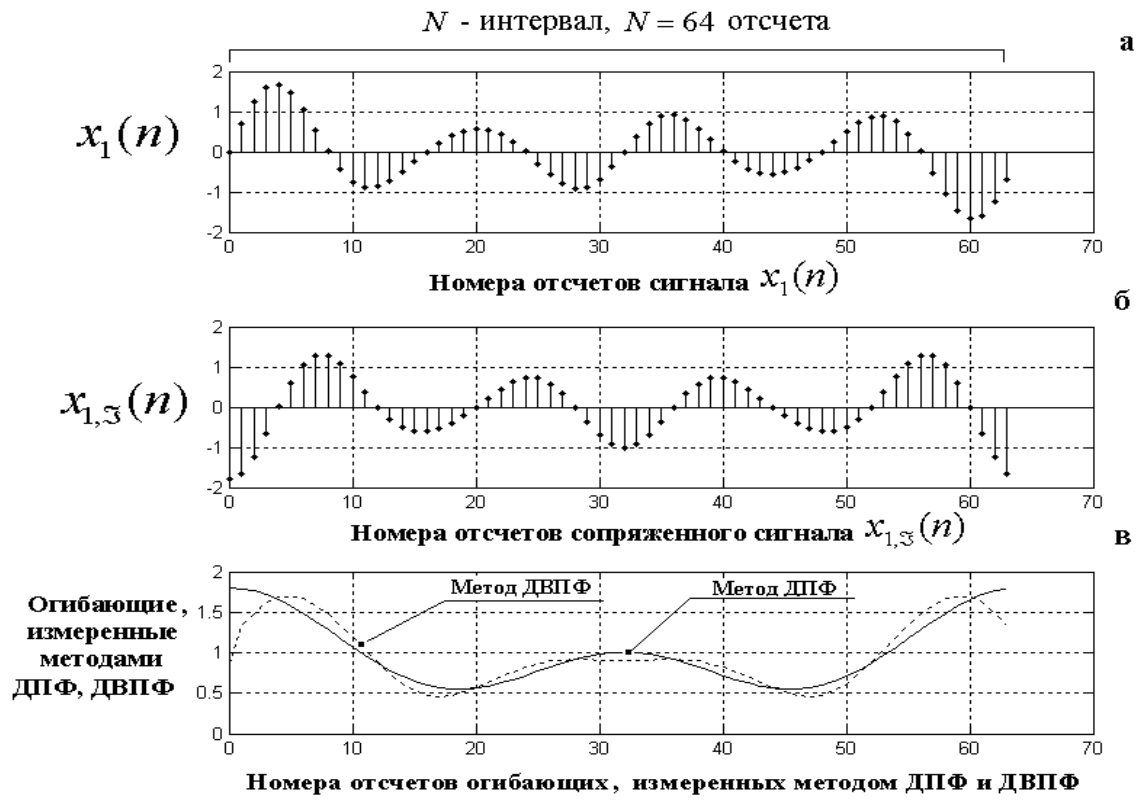


Рисунок 4.9 – Измерение огибающей методом дискретного преобразования Фурье

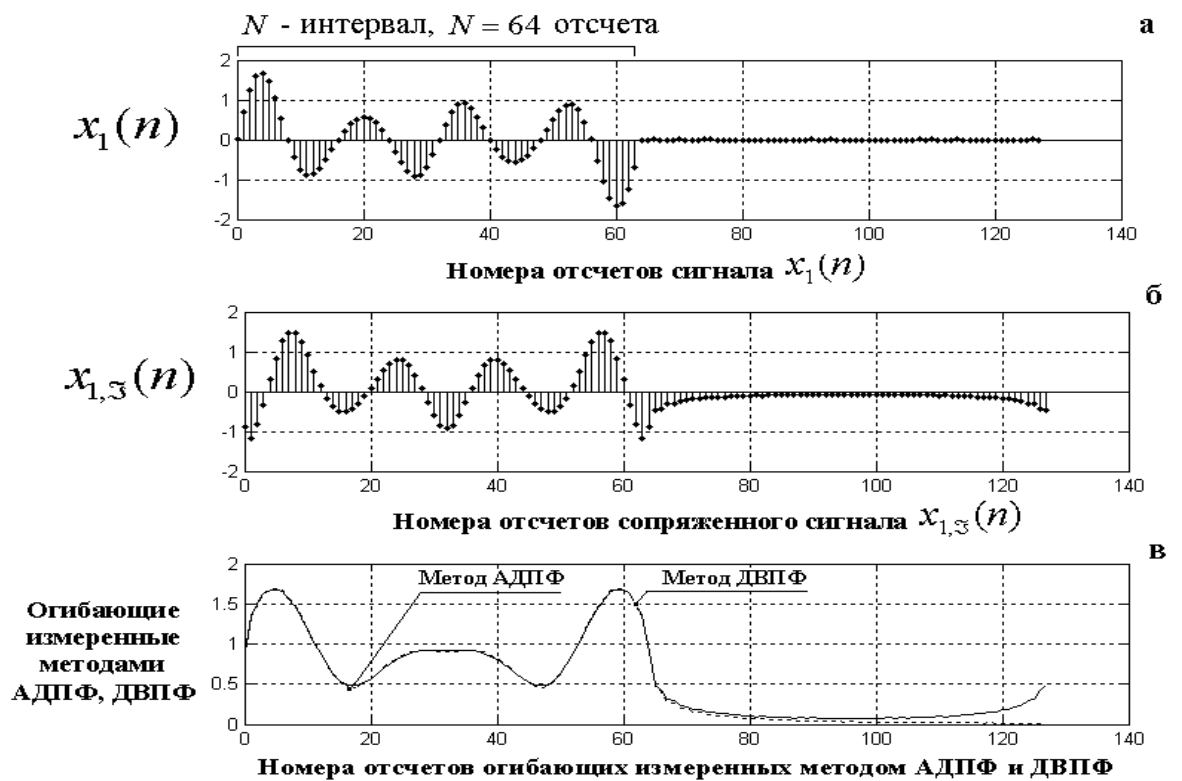


Рисунок 4.10 – Измерение огибающей методом аперидического дискретного преобразования Фурье

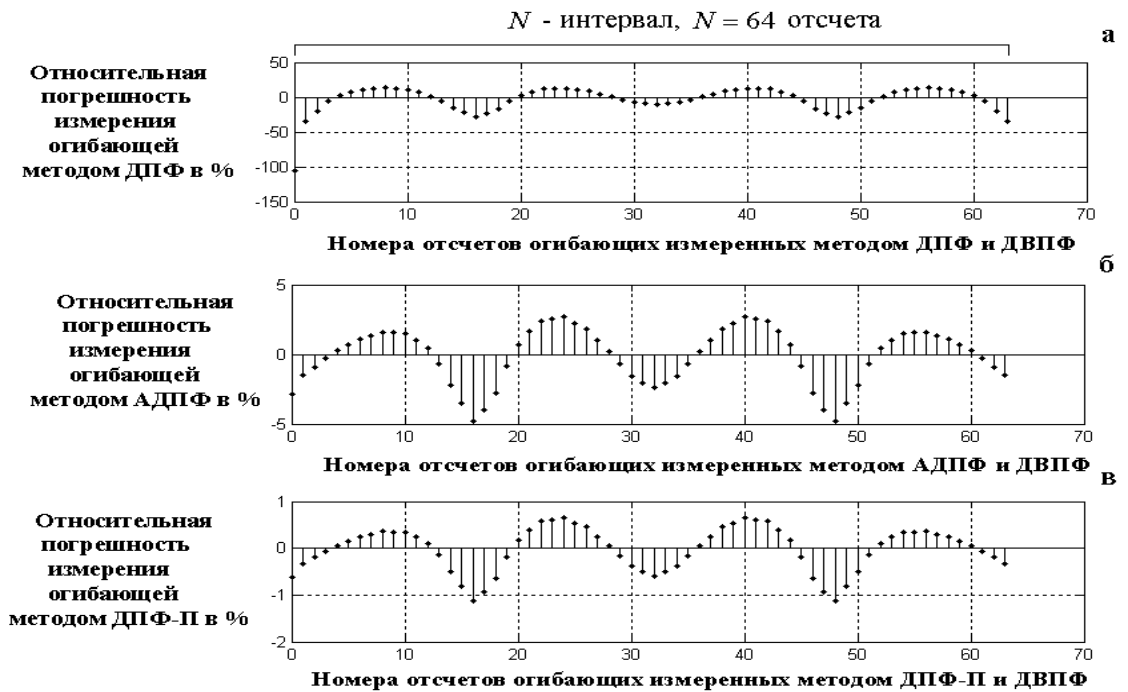


Рисунок 4.11 – Относительные погрешности измерения огибающих:

$$A_{\hat{A}\hat{I}\hat{O}}(n), A_{\hat{A}\hat{A}\hat{I}\hat{O}}(n), A_{\hat{A}\hat{I}\hat{O}-\hat{I}}(n)$$

Выполним анализ полученных результатов.

ДПГ в частотной области на основе ДПФ, являясь, по сути дела, *дискретным вариантом преобразования Гильберта-Коржика*, рассмотренного в разделе 4.1, не решает главной проблемы применения преобразования Гильберта в практике обработки мгновенных параметров сигналов – отсутствие свойства финитности у сопряженного ИС $x_{1,3}(n)$. ДПГ в частотной области на основе ДПФ является лишь *асимптотически локальным преобразованием* с ядром вида $\frac{\sin(N \cdot x/2)}{N \sin(x/2)}$ и, по сути, «маскирует» этот недостаток преобразования

Гильберта-Коржика за счет наложения во временной области гипотетического сопряженного ИС $x_{\hat{A}\hat{A}\hat{I}\hat{O},3}(n)$. При этом относительная погрешность измерения некоторых значений огибающей $A_{\hat{A}\hat{A}\hat{I}\hat{O}}(n)$ методом ДПФ составляет более 100% (рисунок 4.11, а). Отметим, что при моделировании за «истинные» значения огибающей $A_{\hat{A}\hat{A}\hat{I}\hat{O}}(n)$ принимались значения огибающей ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, дополненного 16 256 нулевыми отсчетами.

Причина такой высокой относительной погрешности измерения значений огибающей $A_{\text{ААЮ}}(n)$ методом ДПФ становится очевидной, если измерять значения огибающей $A_{\text{ААЮ}}(n)$ методом АДПФ (рисунок 4.10). Действительно, сопряженный сигнал $x_{1,3}(n)$ не является финитным (рисунок 4.10, б), в то время как исходный сигнал $x_1(n)$ является финитным (рисунок 4.9, а; рисунок 4.10, а). Заметим, что из рисунка 4.9, б можно сделать ошибочный вывод об «истинной» финитности сопряженного ИС $x_{1,3}(n)$ в методе ДПФ. Но это не так. Сопряженный сигнал $x_{1,3}(n)$ в методе ДПФ действительно периодичен и конечен, но ценой наложения во временной области гипотетического сопряженного ИС $x_{\text{ААЮ},3}(n)$.

Например, если мы отсчеты сопряженного ИС $x_{1,3}(n)$, выходящие за N -интервал (рисунок 4.10, б), сложим с отсчетами $x_{1,3}(n)$, входящими в N -интервал, то получим сопряженный сигнал $x_{1,3}(n)$, приведенный на рисунке 4.9, б. Именно из-за «хвоста» сопряженного ИС $x_{1,3}(n)$ (рисунок 4.10, б) относительная погрешность измерения огибающей $A_{\text{ААЮ}}(n)$ в методе ДПФ достигает значительных значений – до 100 % (рисунок 4.11, а). Применение для измерений огибающей метода ДПФ позволяет на порядок уменьшить относительную погрешность (рисунок 4.11, б), а применение ДПФ-П – на два и более порядка (рисунок 4.11, в). Действительно, если спектр $S(j2\pi f)$ в частотной области подвергнуть дискретизации с частотой дискретизации $f_0 = 4/N$, то во временной области сигнал $x_1(n)$ будет представлять собой периодическое продолжение ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, дополненного $3N$ нулевыми отсчетами.

Очевидно, что увеличивая частоту дискретизации спектра $S(j2\pi f)$ в частотной области, мы имеем возможность измерять огибающую, задаваемую выражением (4.32), с заданной точностью.

Таким образом, обобщенное дискретное преобразование Гильберта в частотной области, основанное на ДПФ-П (параметрическом дискретном преобразовании Фурье), в отличие от дискретного преобразования Гильберта в

частотной области, базирующегося на ДПФ (дискретном преобразовании Фурье), позволяет повысить точность обработки мгновенных амплитуд (огibaющих) сигналов минимум на порядок в сравнении с дискретным преобразованием Гильберта в частотной области на основе метода ДПФ.

Алгоритм обработки огibaющей на основе обобщенного дискретного преобразования Гильберта в частотной области для ИС $x(n)$, заданного на N -интервале, (то есть $n = \overline{0, (N-1)}$) может быть представлен в виде выполнения следующих процедур [68, 71].

- Выбор длительности N_2 -интервала:

$$N_2 = N + N_1; N_1 - \text{длительность интервала нулевых отсчетов.}$$

- Реализация измерительного N -точечного преобразования ДПФ-П действительного дискретного ИС $x(n)$, то есть получение множества спектров $S_N(k, \theta_{r/m})$, $k = \overline{0, (N-1)}$ на множестве значений параметра:

$$\theta_{r/m} = \left\{ 0, \frac{r}{m} \right\}; m = \left(1 + \frac{N_1}{N} \right); r = \overline{0, (m-1)}. \quad (4.34)$$

- Создание объединенного спектра $S_{1,N_2}(k_1)$, $k_1 = \overline{0, (N_2-1)}$, путем объединения спектров $S_N(k, \theta_{r/m})$, $k = \overline{0, (N-1)}$ (рисунок 3.2.):

$$S_{1,N_2}(k_1) = \bigcup_r S_N(k, \theta_{r/m}); S_{1,N_2}(k) = S_{1,N_2}(k_1). \quad (4.35)$$

- Создание нового спектра $S_{2,N_2}(k)$, $k = \overline{0, (N_2-1)}$:

$$\begin{aligned} S_{2,N_2}(0) &= S_{1,N_2}(0); \\ S_{2,N_2}(k) &= 2S_{1,N_2}(k); \quad \text{ïðè } k = \overline{1, (N_2/2-1)}; \\ S_{2,N_2}(N_2/2) &= S_{1,N_2}(N_2/2); \\ S_{2,N_2}(k) &= 0; \quad \text{ïðè } k = \overline{(N_2/2+1), (N_2-1)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

- Реализация измерительного N_2 -точечного обратного ДПФ спектра $S_{2,N_2}(k)$ и получение обобщенного гильбертова ИС:

$$y_{\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{I}}(n) = x_1(n) + j \cdot x_{\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{I},\bar{z}}(n). \quad (4.37)$$

Блок-схема алгоритма измерения огибающей на основе обобщенного дискретного преобразования Гильберта в частотной области приведена на рисунке 4.12.

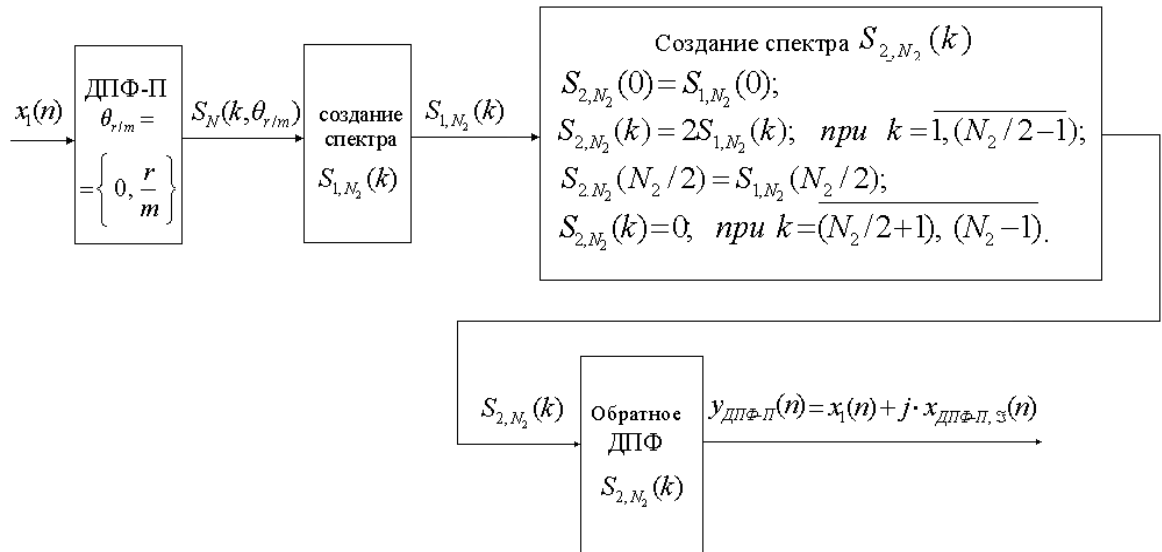


Рисунок 4.12 – Блок-схема алгоритма измерения огибающей на основе обобщенного дискретного преобразования Гильберта

Одним из преимуществ реализации обобщенного преобразования Гильберта в частотной области методом ДПФ-П является то, что сопряженный сигнал и обобщенный гильбертов сигнал $y_{\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{I}}(n) = x_1(n) + j \cdot x_{\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{I},\bar{z}}(n)$ определяются одновременно. С целью определения значений огибающей $A_{\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{I}}(n)$ и $A_{\bar{A}\bar{I}\bar{O}}(n)$ между отсчетами $n = \overline{0, (N-1)}$ рассмотрим модификации дискретного преобразования Гильберта и обобщенного дискретного преобразования Гильберта.

4.4. Модификации дискретного преобразования Гильберта и обобщенного дискретного преобразования Гильберта

Дискретное преобразование Гильберта и обобщенное дискретное преобразование Гильберта не дают нам ответа на вопрос: каковы значения

соответствующих огибающих $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)$ и $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}-\tilde{I}}(n)$ между отсчетами $n = \overline{0, (N-1)}$. В то же время можно назвать целый ряд приложений, где определение значений огибающих $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}}(n)$ и $A_{\tilde{A}\tilde{I}\tilde{O}-\tilde{I}}(n)$ между отсчетами $n = \overline{0, (N-1)}$ является важным и актуальным вопросом обработки. Например, решение данного вопроса является важным и актуальным при определении временных, частотных и частотно-временных спектров виброакустических, гидроакустических и биомедицинских сигналов, а также их огибающих.

Во второй главе, разделе 2.1, автором настоящей работы в теорию дискретных измерений спектров детерминированных сигналов на конечных интервалах введена новая форма преобразования Фурье – дискретно-частотное преобразование Фурье (ДЧПФ). А в разделе 2.3 введены модифицированные параметрические дискретные экспоненциальные функции (МДЭФ-П):

$$def_{pM}(k, n, \xi) = W_N^{-k(n+\xi)} = \exp\left[+j\frac{2\pi}{N}k(n+\xi)\right], k, n = \overline{0, (N-1)}, 0 \leq \xi < 1. \quad (4.38)$$

Там же разложение по системе модифицированных параметрических дискретных экспоненциальных функций рассматривается как модификация параметрического дискретного преобразования Фурье (модифицированное ДПФ-П – МДПФ-П), которое может задаваться либо в матричной, либо в алгебраической форме (2.36), (2.37)

Матричная форма МДПФ-П:

$$X_{N,\xi} = \frac{1}{N} F_{N,\xi} S_N, 0 \leq \xi < 1, \quad (4.39)$$

$$\text{где } F_{N,\xi} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & N/2-1 & \dots & N-1 & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{-\xi} & \dots & W_N^{-\xi(N/2-1)} & \dots & W_N^{-\xi(N-1)} \\ 1 & W_N^{-(1+\xi)} & \dots & W_N^{-(1+\xi)(N/2-1)} & \dots & W_N^{-(1+\xi)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1+\xi)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi)(N/2-1)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (4.40)$$

n

$$S_N = \frac{1}{N} F_N X_N; \quad (4.41)$$

где $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного ИС $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства;

T – знак транспонирования;

$S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе ДЭФ, задаваемой матрицей F_N :

$$F_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (4.42)$$

Алгебраическая форма МДФ-П:

$$x(n, \xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-k(n+\xi)}; \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (4.43)$$

$$\text{где: } S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), \quad k = \overline{0, (N-1)}. \quad (4.44)$$

Соотношениями (4.38 – 4.44) определен аппарат модификации в частотной области как дискретного преобразования Гильберта, так и обобщенного дискретного преобразования Гильберта.

Введем преобразование, позволяющее находить значения огибающей $A_{\bar{i}, \bar{\Delta}\bar{i}\bar{o}}(n)$ между значениями, измеряемыми с помощью дискретного преобразования Гильберта на основе метода ДПФ, т.е. между значениями $A_{\bar{\Delta}\bar{i}\bar{o}}(n); n = \overline{0, (N-1)}$. Назовем такое преобразование **модифицированным дискретным преобразованием Гильберта**, а соответствующую огибающую – **модифицированной огибающей** $A_{\bar{i}, \bar{\Delta}\bar{i}\bar{o}}(n)$. Алгоритм измерений огибающей

$A_{i, \overline{A\dot{i}0}}(n)$ ИС $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$, заданного на N -интервале, может быть представлен в виде выполнения следующих процедур [68, 71]:

- выбор числа $r = 2, 3, \dots$, которое определяет, во сколько раз чаще мы хотим измерять огибающую $A_{i, \overline{A\dot{i}0}}(n)$. В результате оказывается определенной новая длительность N_1 -интервала задания временного спектра ИС $x(n)$:
 $N_1 = r \cdot N$; $r = 2, 3, \dots$;
- осуществление измерительного N -точечного преобразования ДПФ действительного дискретного ИС $x(n)$, то есть получение спектра $S_N(k)$, $k = \overline{0, (N-1)}$;
- создание нового спектра $S_{1,N}(k)$, $k = \overline{0, (N-1)}$:

$$S_{1,N}(0) = S_N(0);$$

$$S_{1,N}(k) = 2S_N(k); \quad i\ddot{\partial} \quad k = \overline{1, (N/2-1)};$$

$$S_{1,N}(N/2) = S_N(N/2);$$

$$S_{1,N}(k) = 0; \quad i\ddot{\partial} \quad k = \overline{(N/2+1), (N-1)};$$

- осуществление измерительного N -точечного преобразования МДПФ-П спектра $S_{1,N}(k)$, то есть получение множества гильбертовских сигналов $x_{\mathfrak{z}}(n, \xi_{i/r})$ на множестве значений параметра $\xi_{i/r}$:

$$\xi_{i/r} = \left\{ \frac{i}{r} \right\}; \quad r = \left(\frac{N_1}{N} \right); \quad i = \overline{0, (r-1)}; \quad (4.45)$$

- создание **объединенного гильбертовского ИС** $y_{\mathfrak{z}}(n_1)$ $n_1 = \overline{0, (N_1-1)}$, путем объединения спектров $x_{\mathfrak{z}}(n, \xi_{i/r})$ (аналогично, как это выполнено в спектральной области на рисунке 3.2, главы 3):

$$y_{\mathfrak{S}}(n_1) = \bigcup_i x_{\mathfrak{S}}(n, \xi_{i/r}); n = \overline{0, (N-1)}; n_1 = \overline{0, (N_1-1)}; \quad (4.46)$$

(далее переменную n_1 обозначаем как n , $n = \overline{0, (N_1-1)}$);

➤ определение результатов измерения модифицированной огибающей $A_{M, \bar{A}i\bar{O}}(i)$.

Блок-схема алгоритма измерения модифицированной огибающей $A_{M, \bar{A}i\bar{O}}(i)$ методом модифицированного дискретного преобразования Гильберта в частотной области приведена на рисунке 4.13.

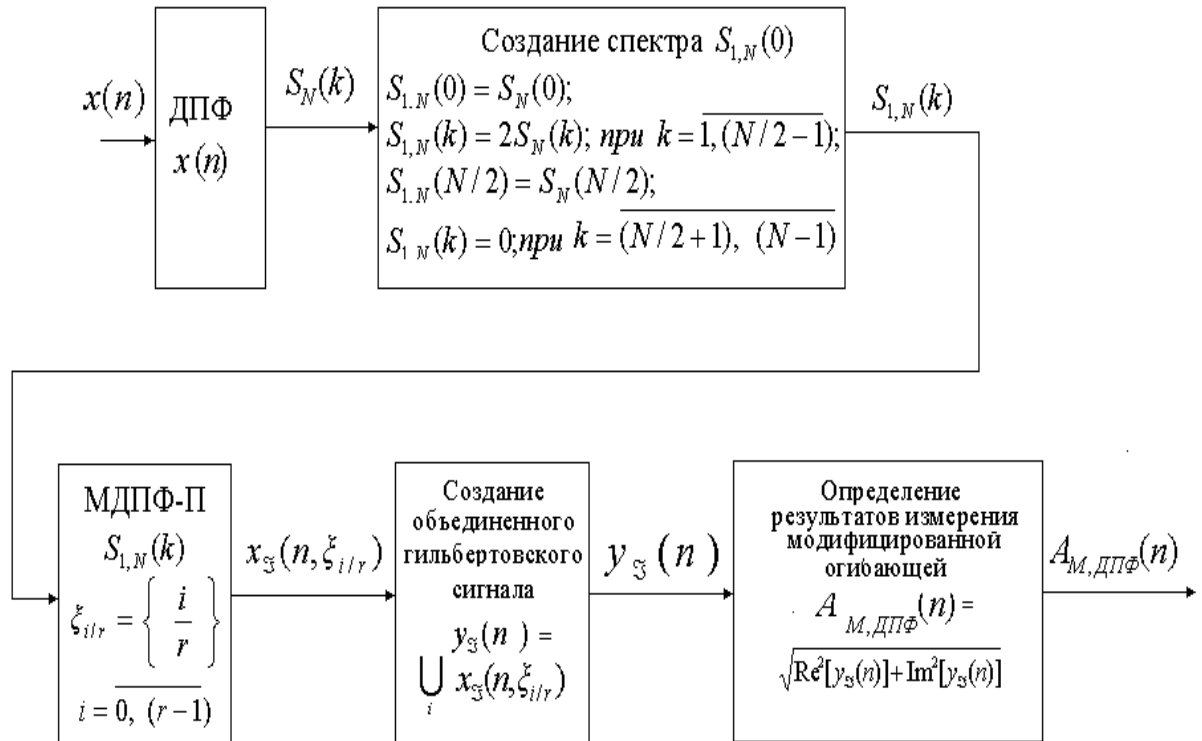


Рисунок 4.13 – Блок-схема алгоритма измерения модифицированной огибающей $A_{M, \bar{A}i\bar{O}}(i)$ методом модифицированного дискретного преобразования Гильберта

Введем преобразование, позволяющее находить значения обобщенной огибающей $A_{\bar{A}i\bar{O} - i}(n)$ между значениями, измеряемыми с помощью дискретного

преобразования Гильберта на основе метода ДПФ-П, т.е. между значениями $A_{\bar{i}\hat{0}-i}(n); n = \overline{0, (N-1)}$.

Назовем такое преобразование **модифицированным обобщенным дискретным преобразованием Гильберта**, а соответствующую огибающую – **модифицированной обобщенной огибающей** $A_{i, \bar{i}\hat{0}-i}(n)$.

Алгоритм определения модифицированной обобщенной огибающей $A_{i, \bar{i}\hat{0}-i}(n)$ ИС $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$, заданного на N -интервале, может быть представлен в виде выполнения следующих процедур [68, 71]:

- выбор длительности N_2 -интервала:

$$N_2 = N + N_1; N_1 - \text{длительность интервала нулевых отсчетов};$$

- реализация N -точечного преобразования ДПФ-П действительного дискретного ИС $x(n)$, то есть получение множества спектров

$S_N(k, \theta_{p/m})$, $k = \overline{0, (N-1)}$ на множестве значений параметра:

$$\theta_{p/m} = \left\{ \frac{p}{m} \right\}; m = \left(1 + \frac{N_1}{N} \right); p = \overline{0, (m-1)}. \quad (4.47)$$

- создание объединенного спектра $S_{1,N_2}(k_1)$, $k_1 = \overline{0, (N_2-1)}$, путем

объединения спектров $S_N(k, \theta_{p/m})$, $k = \overline{0, (N-1)}$ (рисунок 3.2.):

$$S_{1,N_2}(k_1) = \bigcup_p S_N(k, \theta_{p/m});$$

(далее переменную k_1 обозначаем как k , $k = \overline{0, (N_2-1)}$);

- создание нового спектра $S_{2,N_2}(k)$, $k = \overline{0, (N_2-1)}$:

$$S_{2,N_2}(0) = S_{1,N_2}(0);$$

$$S_{2,N_2}(k) = 2S_{1,N_2}(k); \quad \text{и} \quad k = \overline{1, (N_2/2-1)};$$

$$S_{2,N_2}(N_2/2) = S_{1,N_2}(N_2/2);$$

$$S_{2,N_2}(k) = 0; \quad \text{и} \quad k = \overline{(N_2/2+1), (N_2-1)}; \quad (4.48)$$

- выбор числа $r = 2, 3, \dots$, которое определяет, во сколько раз чаще мы хотим получать значения огибающей $A_{i, \bar{A}\bar{i}\bar{0} - i}(n)$. В результате оказывается определена длительность N_3 -интервала задания временного спектра ИС $x(n)$; $N_3 = r \cdot N_2$; $r = 2, 3, \dots$;
- осуществление N_2 -точечного преобразования МДПФ-П спектра $S_{2, N_2}(k)$, то есть получение множества временных спектров $x(n, \xi_{i/r})$ на множестве значений параметра $\xi_{i/r}$:

$$\xi_{i/r} = \left\{ \frac{i}{r} \right\}; r = \left(\frac{N_3}{N_2} \right); i = \overline{0, (r-1)}.$$

- создание объединенного гильбертовского ИС $y_3(n_1)$ $n_1 = \overline{0, (N_3 - 1)}$, путем объединения спектров $x_3(n, \xi_{i/r})$ (аналогично тому, как это выполнено в спектральной области на рисунке 3.2, главы 3):

$$y_3(n_1) = \bigcup_i x_3(n, \xi_{i/r}); n = \overline{0, (N_2 - 1)}; n_1 = \overline{0, (N_3 - 1)}; \quad (4.49)$$

далее переменную n_1 обозначаем как n , $n = \overline{0, (N_3 - 1)}$;

- определение значений модифицированной обобщенной огибающей $A_{M, \bar{A}\bar{i}\bar{0} - i}(i)$.

Блок-схема определения **модифицированной обобщенной огибающей** $A_{M, \bar{A}\bar{i}\bar{0} - i}(i)$ приведена на рисунке 4.14. На рисунке 4.15 приведены результаты моделирования определения промежуточных значений огибающей $A_{\bar{A}\bar{i}\bar{0}}(n)$ методом линейной интерполяции и методом измерения модифицированной огибающей $A_{i, \bar{A}\bar{i}\bar{0}}(n)$.

На рисунке 4.16 приведены результаты моделирования определения промежуточных значений огибающей $A_{\bar{A}\bar{i}\bar{0} - i}(n)$ методом линейной интерполяции и методом измерения обобщенной модифицированной огибающей $A_{i, \bar{A}\bar{i}\bar{0} - i}(n)$.

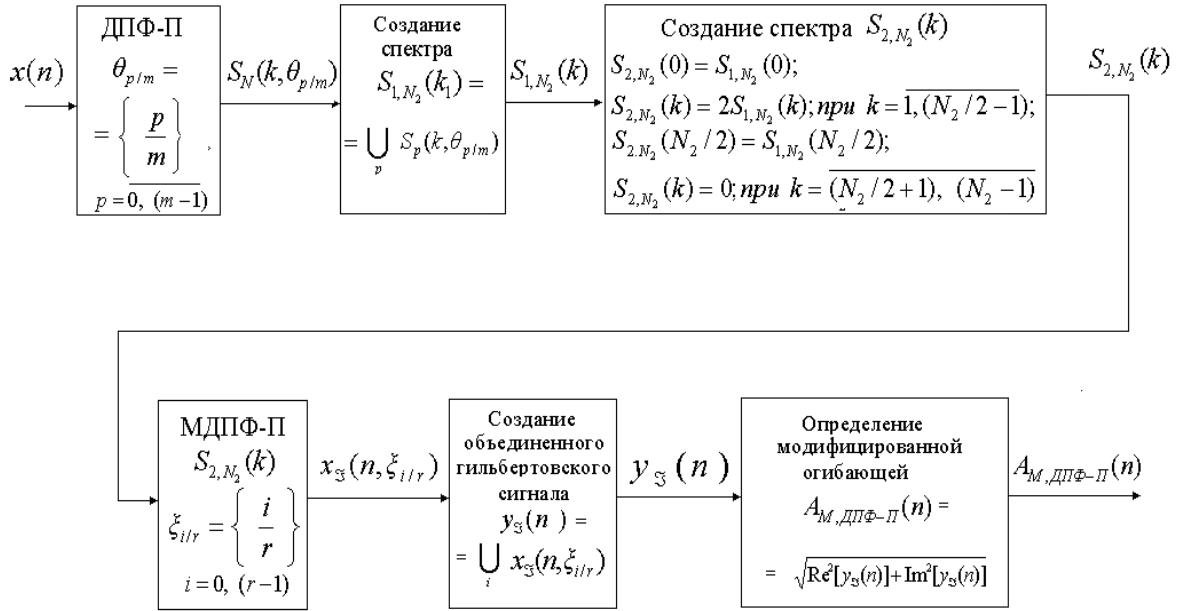


Рисунок 4.14 – Блок-схема алгоритма измерения модифицированной обобщенной огибающей $A_{M, \text{ДПФ-П}}(n)$ методом обобщенного модифицированного дискретного преобразования Гильберта

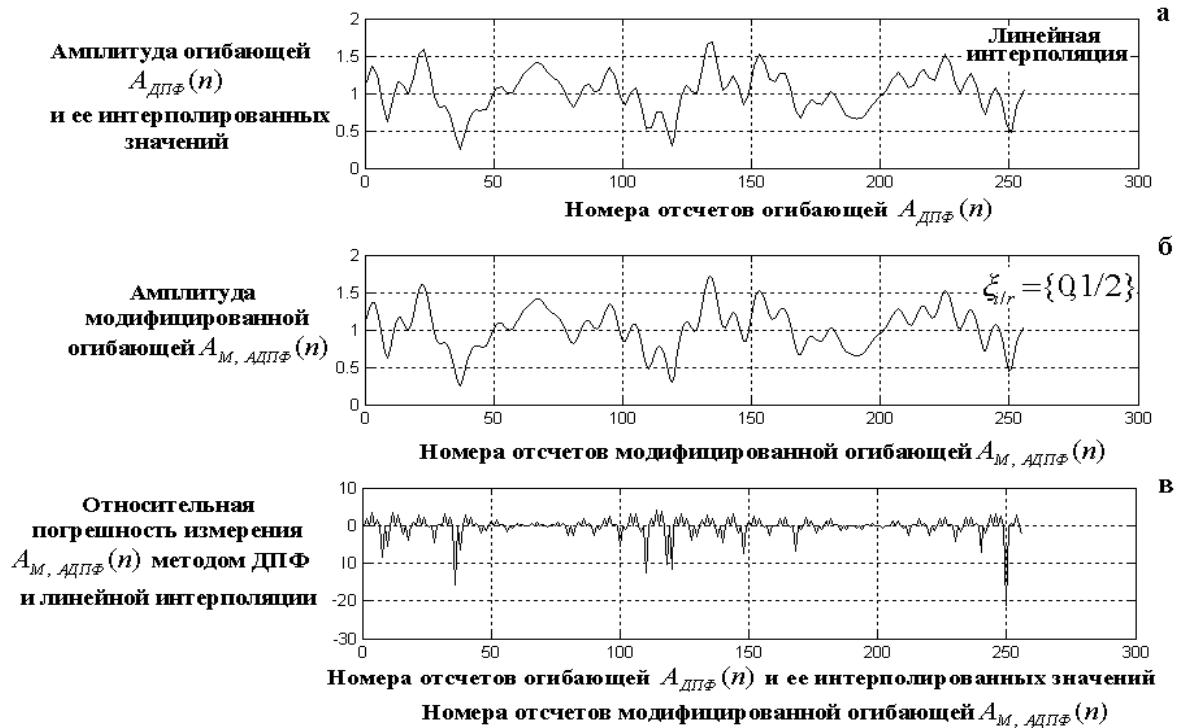


Рисунок 4.15 – Результаты моделирования процедуры измерения промежуточных значений огибающей $A_{\text{АГО}}(n)$

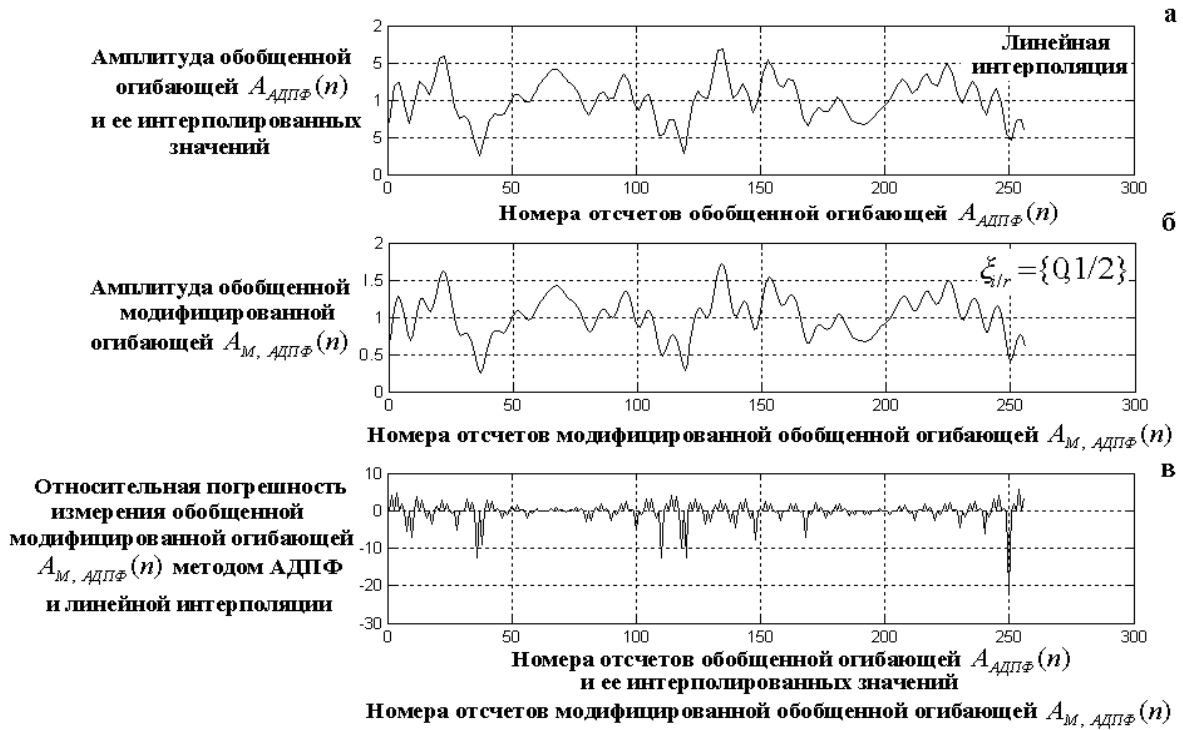


Рисунок 4.16 – Результаты моделирования процедуры измерения промежуточных значений огибающей $A_{\dot{A}i\dot{O} - i}(n)$

Моделирование проводилось для ИС вида:

$$x(n) = A(n) \cdot \sin \frac{2\pi}{N} N_1 \cdot n; \quad n = \overline{0, 127};$$

$$\text{где } A(n) = \left\{ 1 + \gamma \cdot \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N} (3 + \theta) \cdot n \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{N} (11 + \theta) \cdot n \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{N} (25 + \theta) \cdot n \right) + \sin \left(\frac{2\pi}{N} (27 + \theta) \cdot n \right) \right] \right\};$$

$$r = m = 2; \theta = 1/2; \gamma = 0.25; N = 128; N_1 = 55. \quad (4.50)$$

Дадим краткие пояснения по результатам моделирования процесса измерения соответственно **модифицированной огибающей** $A_{i, \dot{A}i\dot{O}}(n)$ и **модифицированной обобщенной огибающей** $A_{i, \dot{A}i\dot{O} - i}(n)$.

На первый взгляд, амплитуды огибающей $A_{\dot{A}i\dot{O}}(n)$ с линейно интерполированными значениями и модифицированной огибающей $A_{i, \dot{A}i\dot{O}}(n)$ кажутся довольно близкими (рисунок 4.15, а и рисунок 4.15, б).

Однако, как следует из рисунка 4.15, **в**, относительная погрешность измерения модифицированной огибающей $A_{i, \text{АГО}}(n)$ методом линейной интерполяции изменяется довольно значительно.

Аналогично, амплитуды обобщенной огибающей $A_{\text{АГО}-i}(n)$ с линейно интерполированными значениями и модифицированной обобщенной огибающей $A_{M, \text{АГО}}(n)$ также кажутся довольно близкими (рисунок 4.16, **а** и рисунок 4.16, **б**). Однако, как и в предыдущем случае, из рисунка 4.16, **в** непосредственно следует, что относительная погрешность измерения модифицированной обобщенной огибающей $A_{M, \text{АГО}}(n)$ методом линейной интерполяции изменяется также в довольно значительных пределах.

Таким образом, результаты моделирования процессов измерения обобщенной огибающей $A_{\text{АГО}-i}(n)$ и модифицированной обобщенной огибающей $A_{M, \text{АГО}}(n)$ подтверждают вывод о необходимости использования при обработке ИС модифицированных огибающих.

Дополнительным аргументом в пользу необходимости применения модифицированных огибающих является то, что глаз человека при интерполяции использует именно линейную интерполяцию, применение которой приводит к значительным относительным погрешностям.

ВЫВОДЫ

1. В теории цифровой обработки ИС крайне важно как с теоретической, так и с практической точек зрения определение на конечных интервалах как спектральных параметров ДИС, так и определение мгновенных параметров ДИС (мгновенной амплитуды (огибающей), мгновенной фазы и мгновенной частоты).
2. Единственным линейным (аддитивным) оператором является оператор преобразования Гильберта. Существенным недостатком преобразования Гильберта является отсутствие у него свойства локальности, так как ядро

преобразования Гильберта $\sin(x)/x$ не является финитной функцией, имеет вид $\sin(x)/x$. Вследствие чего огибающие ИС не являются финитными функциями. Существующее преобразование Гильберта-Коржика, с одной стороны, лишь частично решает проблему финитности огибающих, с другой стороны, не рассматривает вопрос дискретности огибающих и конечности интервала обработки.

3. Дискретное преобразование Гильберта в частотной области на основе ДПФ, которое можно рассматривать как дискретный вариант преобразования Гильберта-Коржика, также не решает главной проблемы применения преобразования Гильберта в практике цифровой обработки мгновенных параметров ДИС – проблемы отсутствия свойства финитности у сопряженного ДИС. Если огибающая ДИС является периодическим сигналом, то в случае несовпадения N -интервала с периодом огибающей имеет место «разрыв непрерывности» огибающей, что, как показали эксперименты на модельных сигналах, приводит к существенной потере точности при обработке ДИС. Оказалось, что даже при относительно простых «модулирующих» ИС, в случае несовпадения N -интервала с периодом огибающей, ее измерению сопутствуют значительные относительные погрешности, достигающие 200%.
4. Предложено обобщение дискретного преобразования Гильберта в частотной области на основе параметрического ДПФ, которое позволяет минимизировать недостатки дискретного преобразования Гильберта на основе ДПФ. Одним из преимуществ обобщенного преобразования Гильберта в частотной области является то, что сопряженный сигнал и обобщенный гильбертов сигнал измеряются одновременно. Алгоритм измерений огибающей, на основе обобщенного дискретного преобразования Гильберта в частотной области, позволяет повысить точность измерений мгновенных амплитуд (огибающих) ИС минимум на порядок.

5. Дискретное преобразование Гильберта и обобщенное дискретное преобразование Гильберта не дают ответа на вопрос, каковы значения соответствующих огибающих между дискретными моментами времени, задаваемыми этими преобразованиями. В то же время можно назвать целый ряд приложений, где определение значений огибающих между дискретными моментами времени является важным и актуальным вопросом обработки ИС. Например, при обработке временных, частотных и частотно-временных спектров виброакустических, гидроакустических и биомедицинских сигналов, а также их огибающих.
6. С целью обработки огибающей в моменты времени между дискретными моментами времени, задаваемыми соответственно дискретным преобразованием Гильберта на основе ДПФ и обобщенным дискретным преобразованием Гильберта на основе параметрического ДПФ, предложены модификации соответствующих преобразований Гильберта. Разработаны эффективные алгоритмы обработки модифицированных огибающих ДИС.

ГЛАВА 5
БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ
В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ

5.1. Быстрые алгоритмы параметрического дискретного преобразования
Фурье

В главах 2, 3 и 4 диссертационного исследования показано, что на том или ином этапе цифровой обработки ИС применяется параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П):

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N, ; 0 \leq \theta < 1,$$

$$\text{где } F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (5.1)$$

На практике, чтобы воспользоваться преимуществами, которыми обладает параметрическое ДПФ по сравнению с ДПФ, также необходимы быстрые процедуры его реализации (аналогичные БПФ), поскольку данное преобразование (как и преобразование ДПФ) требует выполнения N^2 комплексных умножений, что приводит к необоснованно быстрому росту вычислительных затрат с ростом N .

Как будет показано ниже, такие алгоритмы существуют; автор назвал их по аналогии с алгоритмами быстрого преобразования Фурье (алгоритмы БПФ) **алгоритмами быстрого параметрического преобразования Фурье** (алгоритмы БПФ-П). Подчеркнем, что речь идет, как и в случае БПФ, именно **о быстрой процедуре**, а не о новом преобразовании, как можно понять из названия.

Параметрический экспоненциальный базис – базис ДЭФ-П – является **мультипликативным**, в отличие от базиса ДЭФ, не по двум переменным k и n , а лишь по одной – по переменной n (свойство 3, глава 2, раздел 2.2). Именно поэтому существует только один класс алгоритмов БПФ-П – **класс алгоритмов БПФ-П с прореживанием по времени**, который допускает множество модификаций [83, 87, 90]. Заметим, что для ДПФ существует два класса алгоритмов БПФ – **класс алгоритмов БПФ с прореживанием по времени** и **класс алгоритмов БПФ с прореживанием по частоте**.

Алгоритмы БПФ разделяются также по процедурам реализации на **алгоритмы с замещением** (*in place*) и **алгоритмы без замещения** (*no place*). В данном подразделе рассмотрим алгоритмы БПФ-П как с замещением (*in place*), так и без замещения (*no place*).

Суть быстрых алгоритмов БПФ-П заключается в представлении матрицы преобразования $F_{N,\theta}$ в факторизованном виде, т.е. в виде произведения матриц, состоящих большей частью из нулей. Покажем, что матрица ДЭФ-П, как и матрица ДЭФ, может быть также факторизована.

Предположим, что $N = r \cdot s$, где r – простое число. В этом случае любую k -строку матрицы $F_{N,\theta}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} [a_{k,n}] = & [a_{k,0}, \dots, a_{k,(r-1)}, W_N^{r(k+\theta)} \cdot a_{k,0}, \dots, W_N^{r(k+\theta)} \cdot a_{k,(r-1)}, \\ & W_N^{2r(k+\theta)} \cdot a_{k,0}, \dots, W_N^{2r(k+\theta)} \cdot a_{k,(r-1)}, \dots, \\ & W_N^{(s-1)r(k+\theta)} \cdot a_{k,0}, \dots, W_N^{(s-1)r(k+\theta)} \cdot a_{k,(r-1)}]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Введя обозначение:

$$b_k^{(1)} = [a_{k,0}, \dots, a_{k,(r-1)}], \quad (5.3)$$

запишем выражение (5.2) в более компактной форме:

$$[a_{k,n}] = [b_k^{(1)}, W_N^{r(k+\theta)} \cdot b_k^{(1)}, \dots, W_N^{(s-1)r(k+\theta)} b_k^{(1)}]. \quad (5.4)$$

Из теории сравнений известно, что если задано некоторое целое положительное число m , называемое **модулем**, то любое целое число можно рассматривать в связи с остатком от деления его на модуль:

$$c = \text{ent } [c/m] \cdot m + ((c))_m,$$

где ent – символ операции взятия целой части,

$((c))_m$ – остаток.

С учетом периодичности функции W^{kn} (период 2π), несложно установить, что выражение (5.4) имеет s различных форм, соответствующих сравнению k по модулю s :

$$\begin{aligned} [a_{k,n}] &= [b_k^{(1)}, W_N^{r(\theta)} \cdot b_k^{(1)}, \dots, W_N^{(s-1)r(\theta)} b_k^{(1)}], ((k))_s = 0; \\ [a_{k,n}] &= [b_k^{(1)}, W_N^{r(1+\theta)} \cdot b_k^{(1)}, \dots, W_N^{(s-1)r(1+\theta)} b_k^{(1)}], ((k))_s = 1; \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ [a_{k,n}] &= [b_k^{(1)}, W_N^{r(s-1+\theta)} \cdot b_k^{(1)}, \dots, W_N^{(s-1)r(s-1+\theta)} b_k^{(1)}], ((k))_s = (s-1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $((k))_s$ – символ операции сравнения k по модулю s .

Следовательно, матрица $F_{N,\theta}$ с учетом выражения (5.5) может быть представлена в следующем виде:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & (s-1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (s-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (r-1)s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ rs-1 \end{matrix} & \left[\begin{matrix} b_0^{(1)} & W_N^{r\theta} \cdot b_0^{(1)} & \dots & W_N^{(s-1)r\theta} \cdot b_0^{(1)} \\ b_1^{(1)} & W_N^{r(1+\theta)} \cdot b_1^{(1)} & \dots & W_N^{(s-1)r(1+\theta)} \cdot b_1^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{(s-1)}^{(1)} & W_N^{r(s-1+\theta)} \cdot b_{(s-1)}^{(1)} & \dots & W_N^{(s-1)r(s-1+\theta)} \cdot b_{(s-1)}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{(r-1)s}^1 & W_N^{r\theta} \cdot b_{(r-1)s}^1 & \dots & W_N^{(s-1)r(s-1+\theta)} \cdot b_{(r-1)s} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{(rs-1)}^{(1)} & W_N^{r(s-1+\theta)} \cdot b_{(rs-1)}^{(1)} & \dots & W_N^{(s-1)r(s-1+\theta)} \cdot b_{(rs-1)} \end{matrix} \right]. \end{matrix} \quad (5.6)$$

Нетрудно видеть, что представленную таким образом матрицу ДЭФ-П можно разложить на множители:

$$\begin{aligned}
 F_{N,\theta} = F_1 \cdot Q_1 = & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (s-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (r-1)s \\ (r-1)s+1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ rs-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & (s-1) \\ b_0^{(1)} & & & & & \\ & b_1^{(1)} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & b_{(s-1)}^{(1)} \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ b_{(r-1)s}^{(1)} & & & & & \\ & b_{(r-1)s+1}^{(1)} & & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & b_{rs-1}^{(1)} \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (s-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & (s-1) \\ I_r & W_N^{r\theta} \cdot I_r & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(s-1)r\theta} I_r \\ I_r & W_N^{r(1+\theta)} \cdot I_r & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(s-1)r(1+\theta)} I_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_r & W_N^{r(s-1+\theta)} \cdot I_r & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(s-1)r(s-1+\theta)} I_r \end{bmatrix}, \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

где I_r – единичная матрица размером $r \times r$.

В том случае, когда число s не является простым числом, процедура факторизации может быть вновь применена к матрице Q_1 , так как ее структура аналогична структуре исходной матрицы. Отличие состоит лишь в том, что элементы матрицы Q_1 являются матрицами размером $r \times r$:

$$W_N^{r\theta} \cdot I_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (r-1) \\ W_N^{r\theta} & & & \\ & W_N^{r\theta} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & W_N^{r\theta} \end{bmatrix} \cdot \quad (5.8)$$

Действительно, пусть $S = l \cdot q$, где l – простое число, тогда, применяя процедуру факторизации к матрице Q_1 , получим $Q_1 = F_2 \cdot Q_2$ и $F_{N,\theta} = F_1 \cdot F_2 \cdot Q_2$.

Вводя обозначение:

$$b_k^{(1)} = [I_r, W_N^{r(k+\theta)} \cdot I_r, \dots, W_N^{(l-1)r(k+\theta)} \cdot I_r],$$

матрицу Q_1 можно представить как:

$$Q = F_1 \cdot Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (q-1) \\ b_0^{(2)} & & & \\ & b_1^{(2)} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ (q-1) & & & b_{(q-1)}^{(2)} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ (lq-1) & & & b_{lq-1}^{(2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (q-1) \\ I_{rl} & W_N^{l\theta} \cdot I_{rl} & \dots & W_N^{(q-1)l\theta} \cdot I_{rl} \\ 1 & W_N^{l(1+\theta)} \cdot I_{rl} & \dots & W_N^{(q-1)l(1+\theta)} \cdot I_{rl} \\ \times & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (q-1) & I_{rl} & W_N^{l(q-1+\theta)} \cdot I_{rl} & \dots & W_N^{(q-1)l(q-1+\theta)} \cdot I_{rl} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

где I_{rl} – единичная матрица размером $rl \times rl$.

Если и число q составное, то процедура факторизации применяется к матрице Q_2 и т.д. Очевидно, что чем большее число простых сомножителей содержит число N , тем более эффективны быстрые процедуры нахождения измерительного преобразования ДПФ-П за счет того, что матрица $F_{N,\theta}$ может быть разложена на большее число сомножителей, содержащих большое число нулевых элементов.

На практике наиболее распространен случай, когда размерность матрицы $F_{N,\theta}$ есть степень двух. Например, при размерности матрицы $F_{N,\theta}$ 8×8 матрица ДЭФ-П факторизуется следующим образом (матрицы приведены с минимальными фазами):

$$F_{8,\theta} = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3; \quad (5.10)$$

$$F_{8,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} W_8^0 & W_8^\theta & W_8^{2\theta} & W_8^{3\theta} & W_8^{4\theta} & W_8^{5\theta} & W_8^{6\theta} & W_8^{7\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(1+\theta)} & W_8^{2+2\theta} & W_8^{3+3\theta} & W_8^{4+4\theta} & W_8^{5+5\theta} & W_8^{6+6\theta} & W_8^{7+7\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(2+\theta)} & W_8^{4+2\theta} & W_8^{6+3\theta} & W_8^{4\theta} & W_8^{2+5\theta} & W_8^{4+6\theta} & W_8^{6+7\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(3+\theta)} & W_8^{6+2\theta} & W_8^{1+3\theta} & W_8^{4+4\theta} & W_8^{7+5\theta} & W_8^{2+6\theta} & W_8^{5+6\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(4+\theta)} & W_8^{2\theta} & W_8^{4+3\theta} & W_8^{4\theta} & W_8^{4+5\theta} & W_8^{6\theta} & W_8^{4+7\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(5+\theta)} & W_8^{2+2\theta} & W_8^{7+3\theta} & W_8^{4+4\theta} & W_8^{1+5\theta} & W_8^{6+6\theta} & W_8^{3+7\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(6+\theta)} & W_8^{4+2\theta} & W_8^{2+3\theta} & W_8^{4\theta} & W_8^{6+5\theta} & W_8^{4+6\theta} & W_8^{2+7\theta} \\ W_8^0 & W_8^{(7+\theta)} & W_8^{6+2\theta} & W_8^{5+3\theta} & W_8^{4+4\theta} & W_8^{3+5\theta} & W_8^{2+6\theta} & W_8^{1+7\theta} \end{array} \right] \end{matrix};$$

$$F_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} W_8^0 & W_8^\theta & & & & & & \\ & & W_8^0 & W_8^{(1+\theta)} & & & & \\ & & & & W_8^0 & W_8^{(2+\theta)} & & \\ & & & & & & W_8^0 & W_8^{(3+\theta)} \\ W_8^0 & W_8^{(4+\theta)} & & & & & & \\ & & W_8^0 & W_8^{(5+\theta)} & & & & \\ & & & & W_8^0 & W_8^{(6+\theta)} & & \\ & & & & & & W_8^0 & W_8^{(7+\theta)} \end{array} \right] \end{matrix};$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 2 & & & & W_8^{2\theta} & 1 & & W_8^{(2+2\theta)} \\ 3 & & & & & & 1 & & W_8^{(2+2\theta)} \\ 4 & 1 & & & & & & & \\ 5 & & 1 & & & & & & \\ 6 & & & & W_8^{(4+2\theta)} & & & & \\ 7 & & & & & 1 & & & W_8^{(6+2\theta)} \\ & & & & & & 1 & & & & W_8^{(6+2\theta)} \end{bmatrix};$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 2 & & & 1 & & & & \\ 3 & & & & 1 & & & & W_8^{4\theta} \\ 4 & 1 & & & & & & & \\ 5 & & 1 & & & & & & \\ 6 & & & 1 & & & & & \\ 7 & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & W_8^{(4+4\theta)} & & \\ & & & & & & & & W_8^{(4+4\theta)} \end{bmatrix}.$$

Согласно (5.1), измерение спектра $S_{N,\theta}$ в базисе ДЭФ-П с учетом факторизации матрицы $F_{N,\theta}$ может быть проведено как:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N = \frac{1}{N} F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_p \cdot X_N, \quad (5.11)$$

где F_1, F_2, \dots, F_p – сомножители матрицы ДЭФ-П – $F_{N,\theta}$.

Измерение спектра $S_{N,\theta}$ согласно (5.11) проводится в p этапов. На первом этапе определяется вектор столбец $S_1 = F_p \cdot X_N$, на втором – $S_2 = F_{p-1} \cdot S_1$ и т. д. Наконец на p -м этапе определяется вектор-столбец коэффициентов разложения X_N в базисе ДЭФ-П – $S_{N,\theta} = F_1 \cdot S_{p-1}$. Умножение вектора на матрицу в общем случае может быть представлено в виде **двухдольного направленного графа**, в котором дуги графа с весами, соответствующими элементам матрицы, соединяют каждую из вершин одного множества со всеми вершинами другого множества.

Так как матрицы F_i , $i = \overline{1, p}$ в рассматриваемом случае являются слабозаполненными (содержат большое количество нулевых элементов), то многие дуги направленного графа выпадают. Каждый из этапов матричного произведения (5.11) имеет свой направленный граф; объединение графов представляет собой направленный граф, который отображает быстрый алгоритм параметрического дискретного преобразования Фурье – БПФ-П.

Рассмотрим граф БПФ-П для приведенного выше примера факторизации матрицы $F_{N, \theta}$ размером 8×8 . Для этого введем обозначение **базовой операции** БПФ-П (рисунок 5.1).

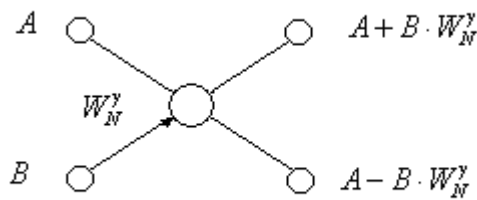


Рисунок 5.1 – Обозначение базовой операции БПФ-П («бабочки БПФ-П»).

С учетом того, что $W_8^0 = 1$, $W_8^{(4+\theta)} = -W_8^{0+\theta}$, $W_8^{(5+\theta)} = -W_8^{(1+\theta)}$, ..., $W_8^{(7+\theta)} = -W_8^{(3+\theta)}$, $W_8^{(4+2\theta)} = -W_8^{2\theta}$, $W_8^{(6+2\theta)} = -W_8^{(2+2\theta)}$, $W_8^{(4+4\theta)} = -W_8^{4\theta}$ представим матрицы F_1, F_2, F_3 (5.10) в следующем виде:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & W_8^\theta & & & & & & \\ & & 1 & W_8^{(1+\theta)} & & & & \\ & & & & 1 & W_8^{(2+\theta)} & & \\ & & & & & & 1 & W_8^{(3+\theta)} \\ 1 & -W_8^\theta & & & & & & \\ & & 1 & -W_8^{(1+\theta)} & & & & \\ & & & & 1 & -W_8^{(2+\theta)} & & \\ & & & & & & 1 & -W_8^{(3+\theta)} \end{bmatrix},$$

$$F_2 = 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & W_8^{2\theta} & & & & & \\ 1 & & 1 & W_8^{2\theta} & & & & \\ 2 & & & & 1 & W_8^{(2+2\theta)} & & \\ 3 & & & & & 1 & & W_8^{(2+2\theta)} \\ 4 & 1 & -W_8^{2\theta} & & & & & \\ 5 & & 1 & -W_8^{2\theta} & & & & \\ 6 & & & & 1 & -W_8^{(2+2\theta)} & & \\ 7 & & & & & 1 & & -W_8^{(2+2\theta)} \end{bmatrix},$$

$$F_3 = 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & & & W_8^{4\theta} & & & \\ 1 & & 1 & & & W_8^{4\theta} & & \\ 2 & & & 1 & & & W_8^{4\theta} & \\ 3 & & & & 1 & & & W_8^{4\theta} \\ 4 & 1 & & & -W_8^{4\theta} & & & \\ 5 & & 1 & & & -W_8^{4\theta} & & \\ 6 & & & 1 & & & -W_8^{4\theta} & \\ 7 & & & & 1 & & & -W_8^{4\theta} \end{bmatrix}.$$

На рисунке 5.2 приведен граф БПФ-П для рассматриваемого случая. Изложенный алгоритм БПФ-П дает естественный порядок отсчетов на входе и выходе алгоритма. Это, безусловно, является преимуществом данного алгоритма.

Однако для его реализации необходима оперативная память для хранения как входного сигнала, так и спектра, что не всегда приемлемо на практике. Поэтому рассмотрим еще один алгоритм БПФ-П, который позволяет работать с замещением и требует в два раза меньших затрат памяти (выходной массив после работы алгоритма находится на месте входного массива, отсюда и название алгоритма – алгоритм с замещением). Несложно видеть, что при таком подходе входной массив не сохраняется.

Алгоритм БПФ-П с замещением более просто, с точки зрения изложения, рассмотреть не в матричной, а в алгебраической форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (5.12)$$

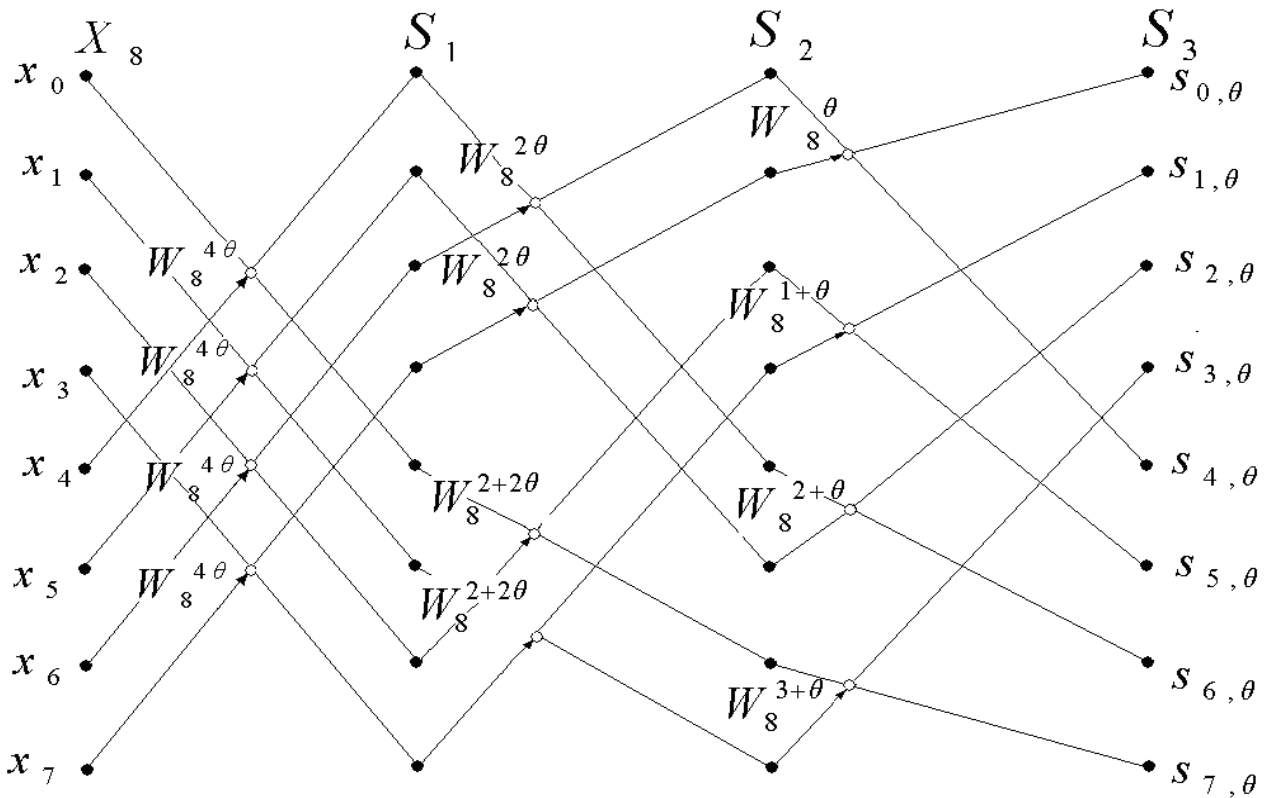


Рисунок 5.2 – Граф алгоритма БПФ-П без замещения (естественный порядок на входе и выходе алгоритма)

Пусть задан дискретный временной сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, $N = 2^r$, $r = 2, 3, \dots$. Разделим реализацию временного ряда $x(n)$ на две $N/2$ -точечные последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$, которые состоят из четных и нечетных членов $x(n)$, соответственно:

$$x_1(n) = x(2n); \quad x_2(n) = x(2n+1); \quad n = \overline{0, N/2-1}. \quad (5.13)$$

ДПФ-П последовательности $x(n)$, согласно соотношению (5.12), представим в следующем виде:

$$S(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) \cdot W_N^{2n\theta} \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) \cdot W_N^{(2n+1)\theta} \cdot W_N^{(2n+1)k}.$$

С учетом того, что $W_N^2 = W_{N/2}$, получим:

$$\begin{aligned}
 S(k, \theta) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{n\theta} \cdot W_{N/2}^{nk} + W_N^k \cdot W_N^\theta \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{n\theta} \cdot W_{N/2}^{nk} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{(k+\theta)n} + W_N^k \cdot W_N^\theta \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{(k+\theta)n}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование (5.12) может быть получено из ДПФ-П двух последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$:

$$S(k, \theta) = S_1(k, \theta) + W_N^k \cdot W_N^\theta \cdot S_2(k, \theta), \quad k = \overline{0, N/2-1},$$

где $S_1(k, \theta)$ и $S_2(k, \theta)$ – ДПФ-П последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$,

соответственно.

Так как $W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$ для $k = \overline{N/2, (N-1)}$ получим:

$$S(k, \theta) = S_1[(k - N/2), \theta] - W_N^{(k-N/2)} \cdot W_N^\theta \cdot S_2[(k - N/2), \theta], \quad k = \overline{0, N/2-1}.$$

Данная процедура может быть продолжена до получения двухточечных ДПФ-П. Граф, иллюстрирующий измерения спектра для $N = 2^3 = 8$, приведен на рисунке 5.3.

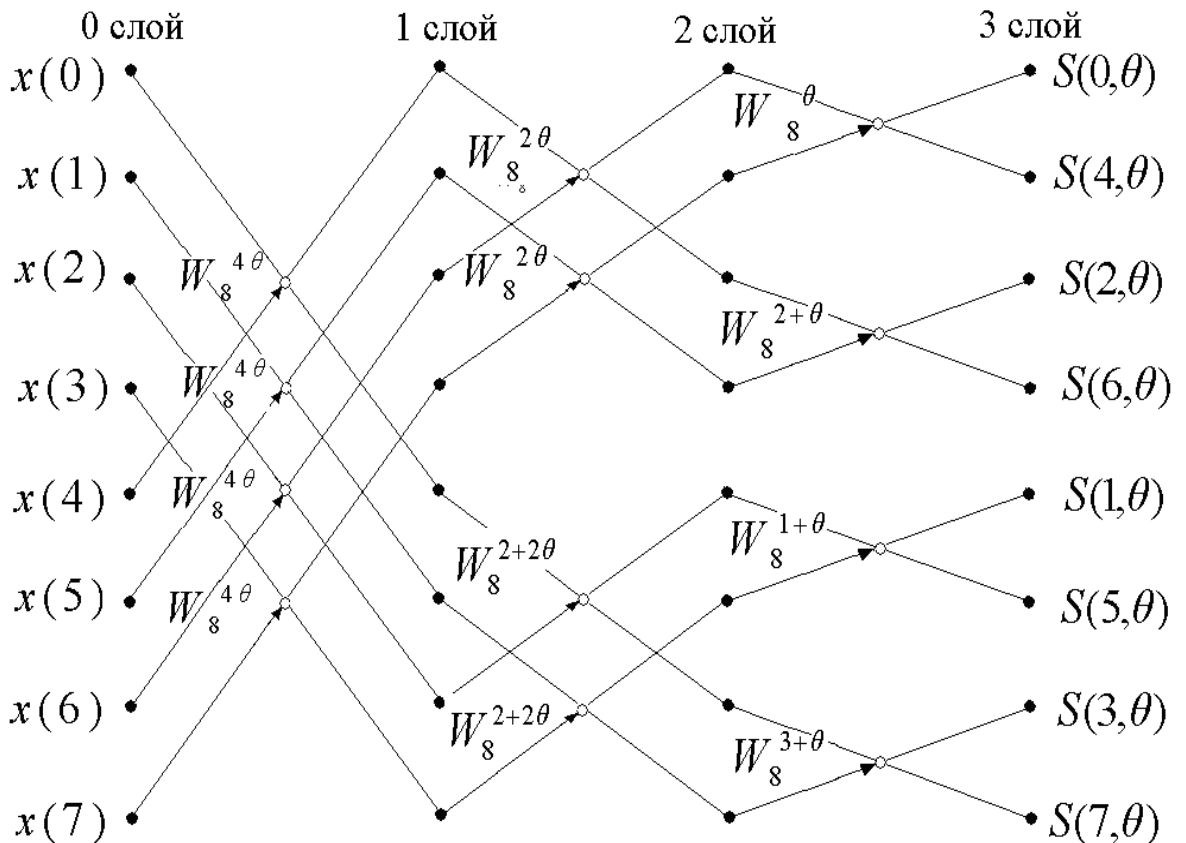


Рисунок 5.3 – Граф алгоритма БПФ-П с замещением (естественный порядок на входе, двоично-инверсный – на выходе)

Несложно видеть, что порядок коэффициентов ДПФ-П является двоично-инверсным. Поэтому необходим алгоритм для упорядочивания коэффициентов ДПФ-П в естественном порядке, что, безусловно, в целом несколько усложняет алгоритм данного вида. Однако для реализации этого алгоритма необходима меньшая оперативная память, по сравнению с алгоритмом без замещения.

В заключение отметим: матричная (5.1) и алгебраическая (5.12) записи ДПФ-П неявно подразумевают на входе алгоритма комплексный сигнал. Однако на практике, как правило, сигналы являются действительными. Задание действительного временного ряда в комплексной форме согласно соотношениям:

$$\operatorname{Re}[x(n)] = x(n), \quad \operatorname{Im}[x(n)] = 0, \quad n = \overline{0, N-1},$$

приводит к нерациональному использованию вычислительных мощностей.

5.2. Быстрые алгоритмы параметрического дискретного преобразования Фурье действительных сигналов

Прежде чем перейти к изложению быстрых алгоритмов параметрического дискретного преобразования Фурье (БПФ-П) действительных сигналов, рассмотрим существующие подходы к построению быстрых алгоритмов дискретного преобразования Фурье (БПФ) действительных сигналов.

Напомним, что ДПФ является частным случаем ДПФ-П при значении параметра $\theta = 0$. ДПФ и быстрые алгоритмы его вычисления предполагают, что входная последовательность $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ является комплексной. В прикладных задачах обработки ИС в большинстве случаев имеют дело с действительными последовательностями: $\operatorname{Im}\{x(n)\} = 0$, $n = \overline{0, N-1}$. Как известно, ДПФ таких сигналов при четном N обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии:

$$S_N(k) = S_N^*(N-k), \quad k = \overline{1, N/2-1}, \quad (5.14)$$

где * – символ комплексного сопряжения.

Следовательно, применение стандартного комплексного БПФ к действительным последовательностям приводит, с одной стороны, к определению $N/2 - 1$ значений спектра *на отрицательных частотах*, которые не несут дополнительной информации о спектре действительного сигнала $x(n)$ (*избыточные вычислительные затраты*), с другой – требуемый объем памяти в два раза больше необходимого (*избыточные затраты памяти*).

Для устранения указанных недостатков был предложен алгоритм БПФ действительных последовательностей, устраняющий избыточные затраты как в памяти, так и в объеме вычислений [9, 46].

В этих алгоритмах БПФ действительная последовательность $x(n)$ в N отсчетов разбивается на две действительные последовательности в $N/2$ отсчетов согласно следующему выражению: $x_1(n) = x(2n)$, $x_2(n) = x(2n + 1)$, т.е. на последовательности, состоящие соответственно из четных и нечетных отсчетов последовательности $x(n)$. Далее образуется комплексная последовательность:

$$x_3(n) = x_1(n) + jx_2(n), n = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (5.15)$$

Затем вычисляют БПФ комплексной последовательности $x_3(n)$ алгоритмом БПФ.

Идея алгоритма ДПФ действительных последовательностей заключается в следующем. Известно, что ДПФ любой действительной последовательности имеет четную действительную часть и нечетную мнимую часть. И наоборот, ДПФ любой чисто мнимой последовательности имеет нечетную действительную и четную мнимую части. ДПФ суммы таких последовательностей $x_3(n) = x_1(n) + jx_2(n)$, имеет асимметричные действительную и мнимую части.

Однако ДПФ последовательностей $x_1(n) = x(2n)$ и $x_2(n) = x(2n + 1)$, могут быть легко восстановлены, так как любую функцию можно представить в виде *суммы четной и нечетной частей*. Затем, используя фундаментальное свойство ДПФ (возможность получения спектра исходной последовательности из спектров

двух ее частей), находят спектр последовательности $x(n)$, выполняя дополнительный слой БПФ [9].

При внимательном изучении соотношений (5.1), (5.12) и (5.14) можно сделать несколько важных выводов.

1. ДПФ действительной последовательности $S_N(k), k = \overline{0, N-1}$, строго говоря, определяется не $N/2$ отсчетами, как нередко утверждается в работах по цифровой обработке сигналов (см., например, [46]), а $(N/2 + 1)$ отсчетами;

2. Комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов ДПФ действительной последовательности при четном N имеет место не для всех отсчетов ДПФ. Два отсчета спектра $S_N(0)$ и $S_N(N/2)$ не обладают этим свойством (при нечетном N – один отсчет спектра $S_N(0)$). Кроме того, эти отсчеты (или этот отсчет) являются действительными величинами.

3. При значении параметра $\theta = 1/2$ все коэффициенты ДПФ-П обладают свойством комплексно-сопряженной симметрии:

$$S_N(k, 1/2) = S_N^*((N-1-k), 1/2); k = \overline{0, N/2-1}. \quad (5.16)$$

Алгоритм БПФ-П при $\theta = 1/2$ для действительных последовательностей (далее алгоритм 1) может быть построен в рамках подхода, рассмотренного в [9, 14] (суть такого подхода изложена выше). Покажем, что, так как все коэффициенты ДПФ-П при $\theta = 1/2$ обладают фундаментальным свойством комплексно-сопряженной симметрии (5.16), данный подход допустим и правомерен и к построению алгоритмов БПФ-П.

На рисунке 5.4, **а** приведена некоторая действительная последовательность $x(n)$ в 64 отсчета, а на рисунке 5.4, **б** и рисунке 5.4, **в**, соответственно, действительная и мнимая части её спектра ДПФ-П при $\theta = 1/2$ (штрихпунктирной линией обозначена ось симметрии).

В алгоритме БПФ-П при $\theta = 1/2$ действительная последовательность $x(n)$ в N отсчетов (как и в алгоритме БПФ) разбивается на две действительные последовательности в $N/2$ отсчетов, т.е. на последовательности четных $x_1(n)$ и нечетных отсчетов $x_2(n)$ (рисунок 5.5, **а** и рисунок 5.5, **б**):

$$x_1(n) = x(2n), \quad x_2(n) = x(2n+1). \quad (5.17)$$

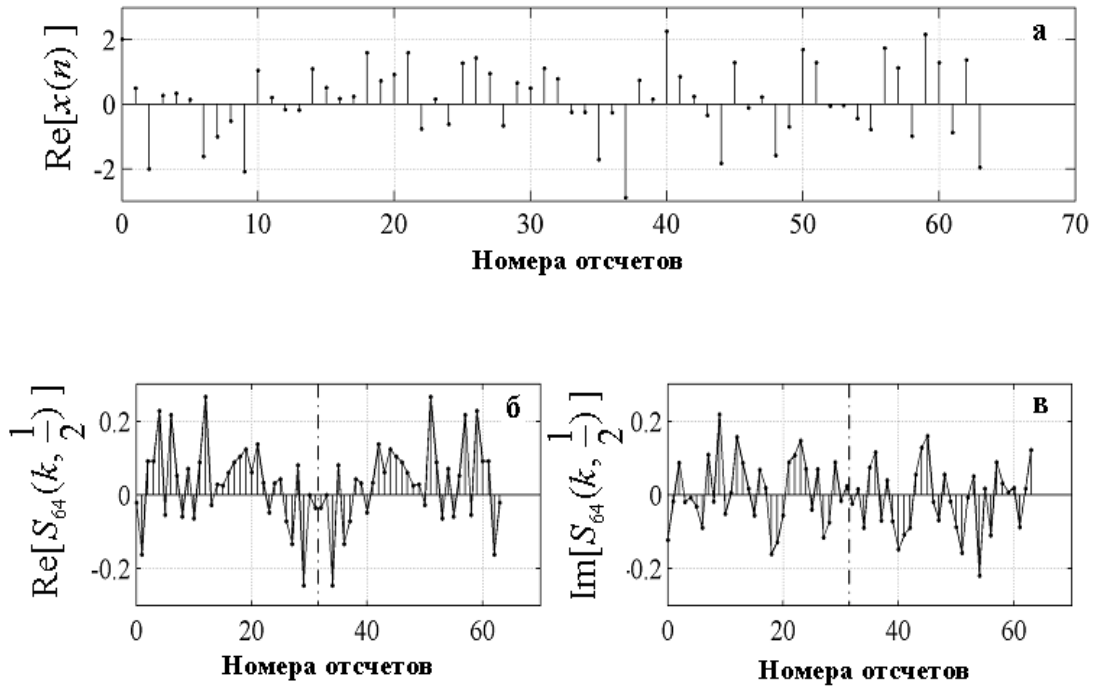


Рисунок 5.4. – а – сигнал $x(n)$; б, в – спектр сигнала $x(n)$, полученный методом

ДПФ-П

Далее образуется комплексная последовательность:

$$x_3(n) = x_1(n) + jx_2(n), \quad n = \overline{0, N/2 - 1},$$

действительная и мнимая части частотного спектра которой приведены соответственно на рисунке 5.5, ж и рисунке 5.5, з. Чтобы получить спектры действительных последовательностей, $x_1(n) = x(2n)$, и $x_2(n) = x(2n+1)$, приведенные на рисунке 5.5, в, рисунке 5.5, д, рисунке 5.5, г, рисунке 5.5, е соответственно, необходимо воспользоваться следующими выражениями:

$$\operatorname{Re}[S_1(k, 1/2)] = \left\{ \operatorname{Re}[S_3(k, 1/2)] + \operatorname{Re}[S_3(N/2 - k - 1)] \right\} / 2;$$

$$\operatorname{Im}[S_1(k, 1/2)] = \left\{ \operatorname{Im}[S_3(k, 1/2)] - \operatorname{Im}[S_3(N/2 - k - 1)] \right\} / 2;$$

$$\operatorname{Re}[S_2(k, 1/2)] = \left\{ \operatorname{Im}[S_3(k, 1/2)] + \operatorname{Im}[S_3((N/2 - k - 1), 1/2)] \right\} / 2;$$

$$\operatorname{Im}[S_2(k, 1/2)] = \left\{ \operatorname{Re}[S_3(N/2 - k - 1), 1/2] - \operatorname{Re}[S_3(k, 1/2)] \right\} / 2;$$

$$k = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (5.18)$$

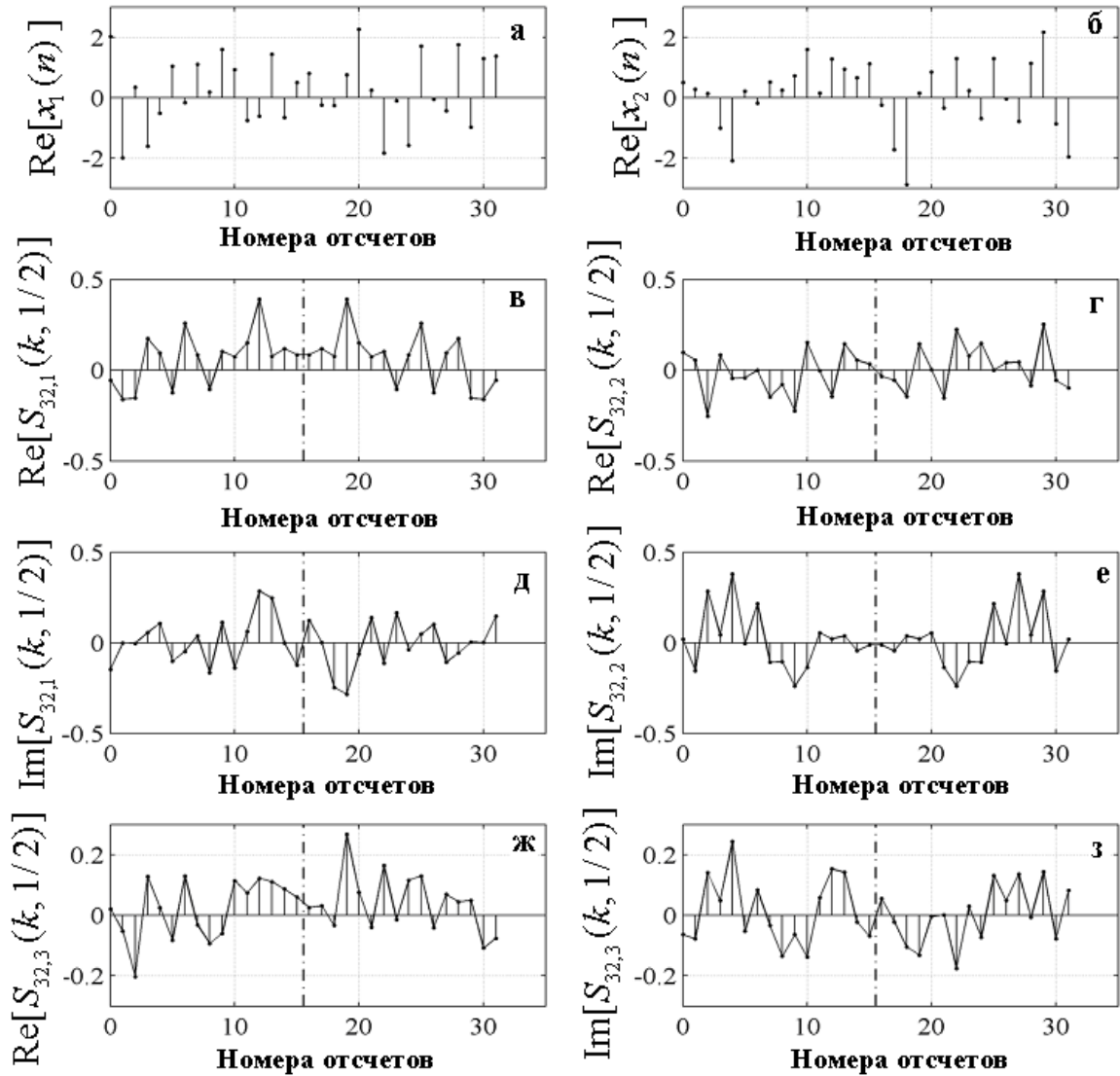


Рисунок 5.5 – Структура симметрий спектров ДПФ-II действительных сигналов $x_1(n)$ и $jx_2(n)$ при $\theta = 1/2$

Затем необходимо дополнительно выполнить вычисления согласно следующему выражению:

$$\text{Re}[S(k, 1/2)] = S_1(k, 1/2) + S_2(k, 1/2) \times \left[\cos \frac{2\pi}{N} (k + 1/2) + j \sin \frac{2\pi}{N} (k + 1/2) \right];$$

$$k = \overline{0, N/2 - 1}.$$

В результате мы получим спектр исходного действительного сигнала $x(n)$ на положительных частотах (рисунок 5.6).

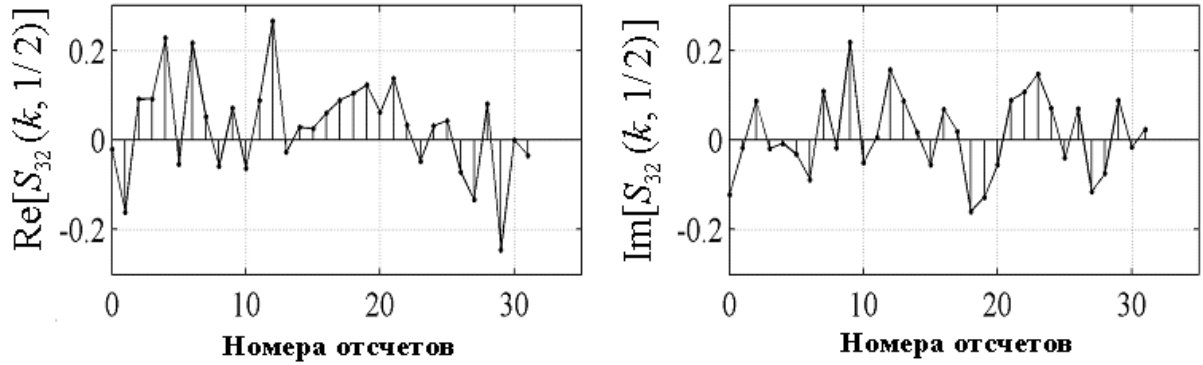


Рисунок 5.6 – Спектр $S_{32}(k, 1/2)$ действительного сигнала $x(n)$ на положительных частотах, полученный с помощью алгоритма 1

Рассмотрим быстрый алгоритм вычисления ДПФ-П действительных последовательностей – **алгоритм 2**, который превосходит рассмотренный алгоритм БПФ-П – **алгоритм 1**. Пусть задана действительная последовательность $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, ДПФ-П которой при $\theta = 1/2$, согласно (5.12), описывается следующим выражением:

$$S_N(k, 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k+1/2)}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (5.19)$$

Найдем четные отсчеты коэффициентов ДПФ-П $S_N(2k, 1/2)$:

$$S_N(2k, 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)} + \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)};$$

или:

$$\begin{aligned} S_N(2k, 1/2) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{(n+N/2)(2k+1/2)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_{N/2}^{n(k+1/4)} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_{N/2}^{n(k+1/4)} W_N^{N/2(2k+1/2)}. \end{aligned}$$

С учетом того, что:

$$W_N^{N/2(2k+1/2)} = -j,$$

окончательно получим:

$$S_N(2k, 1/2) = S_{N/2}(k, 1/4) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - jx(n + N/2)] W_{N/2}^{n(k+1/4)},$$

$$k = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (5.20)$$

Найдем нечетные отсчеты коэффициентов ДПФ-П $S_N((2k + 1), 1/2)$:

$$S_N((2k + 1), 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1+1/2)} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1+1/2)} + \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1+1/2)}.$$

Опуская промежуточные выкладки (которые аналогичны выкладкам при получении соотношения (5.20)), получим выражение для нечетных отсчетов ДПФ-П при $\theta = 1/2$:

$$S_N((2k + 1), 1/2) = S_{N/2}(k, 3/4) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + jx(n + N/2)] W_{N/2}^{n(k+3/4)};$$

$$k = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (5.21)$$

Отметим, что при выводе формулы (5.21) использовано соотношение:

$$W_N^{(N/2)(2k+3/2)} = +j.$$

Очевидно, что вычисление ДПФ-П при $\theta = 3/4$ согласно соотношению (5.21) более предпочтительно, чем вычисление ДПФ-П при $\theta = 1/4$ согласно соотношению (5.20), так при этом нет необходимости менять знак у мнимой части формируемой комплексной последовательности.

Таким образом, благодаря соотношению (5.21) с учетом свойства (5.16), мы находим все $N/2$ значений искомого спектра (далее алгоритм 2).

Исследования, проведенные автором в данном направлении, показали, что при реализации алгоритма 1 необходимо выполнение $N \log_2(N/2) + 4N$ действительных умножений и $3/2 N \log_2(N/2) + 4N$ сложений. Как будет показано в дальнейшем изложении, вычислительные затраты в этом алгоритме хотя и меньше, чем при выполнении N -точечного комплексного БПФ-П, но значительно превышают вычислительные затраты, необходимые при реализации алгоритма 2.

В работах [67, 83, 87] показано, что N -точечное комплексное БПФ-П по основанию 2 (как и стандартное БПФ) требует выполнения $(N/2)\log_2 N$ **базовых операций, получивших хорошо известное название «бабочки БПФ»** (базовая операция БПФ-П – «бабочка БПФ-П» приведена на рисунке 5.1). Каждая базовая операция БПФ-П требует одного комплексного умножения и двух комплексных сложений. Так как комплексное умножение состоит из четырех действительных умножений и двух действительных сложений, выполнение одной бабочки БПФ потребует выполнения четырех действительных умножений и шести действительных сложений. Таким образом, вычислительные затраты на выполнение стандартного N -точечного комплексного БПФ-П по основанию 2 равны $2N\log_2 N$ действительных умножений и $3N\log_2 N$ сложений.

В качестве критерия эффективности, аналогично работе [46], выберем относительную экономию вычислений при применении сравниваемых алгоритмов:

$$\gamma = \frac{\text{число операций в алгоритме } A - \text{число операций в алгоритме } B}{\text{число операций в алгоритме } A} ; \quad (5.22)$$

где алгоритмы A и B – сравниваемые алгоритмы.

Сделаем одно замечание. Под числом операций в формуле (5.22), в зависимости от применяемых аппаратных решений, могут пониматься как только выполняемые умножения, так и сумма выполняемых умножений и сложений. Последний случай имеет место при применении высокоскоростных специализированных умножителей, которые позволяют операцию умножения выполнять практически за то же время, что и сложения [46, 149].

На рисунке 5.7 и рисунке 5.8 показана (в соответствии с соотношением (5.22)) относительная экономия вычислений в алгоритме 1 в сравнении с комплексным БПФ и алгоритма 2 в сравнение с алгоритмом 1, соответственно.

На рисунке 5.7, в силу использования в сравниваемых алгоритмах комплексных алгоритмов БПФ и БПФ-П (разница между которыми в смысле числа операций только в размерности преобразований), кривые по числу только «умножений» и «умножений и сложений» совпадают.

В заключение раздела остановимся кратко на вычислении коэффициентов ДПФ-П действительных последовательностей при значении параметра $\theta \neq 0 ; 1/2$.

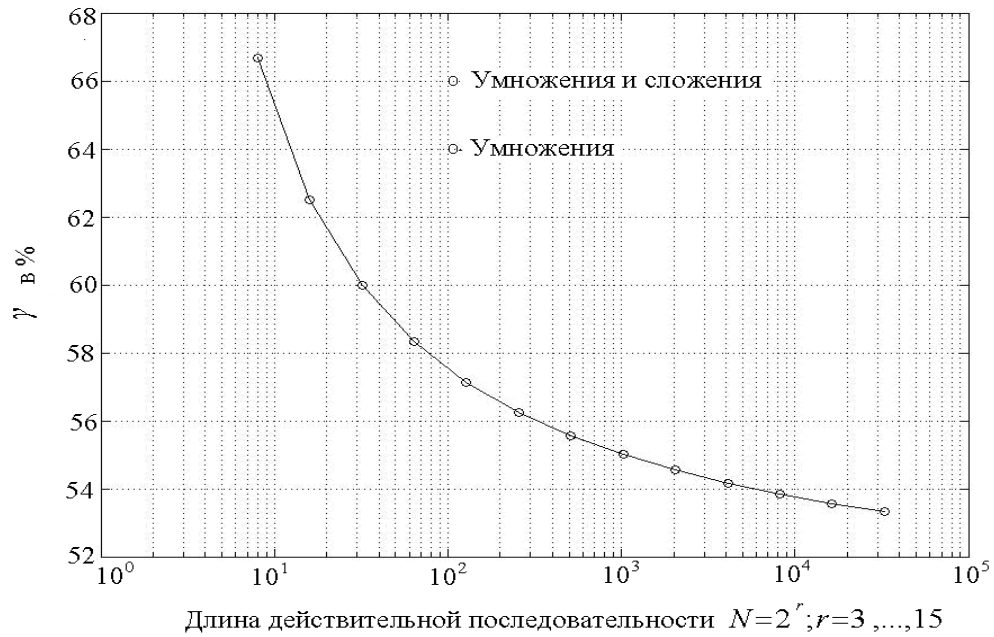


Рисунок 5.7 – Относительная экономия вычислений γ в %.

Сравнение алгоритма 1 с комплексным БПФ-П

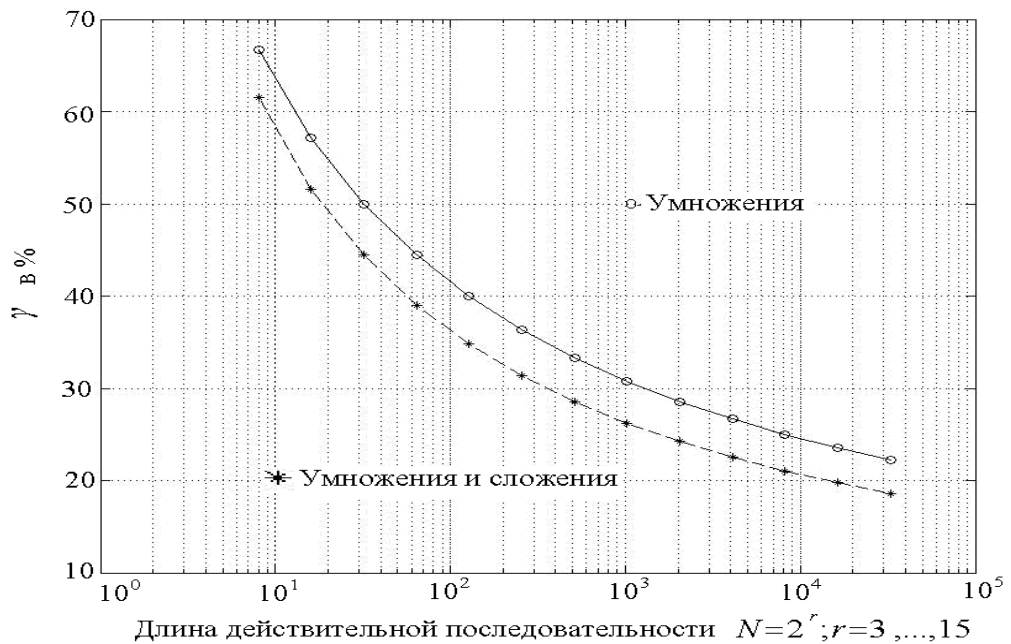


Рисунок 5.8 – Относительная экономия вычислений γ в %.

Сравнение алгоритма 2 с алгоритмом 1

Во второй главе диссертации показано, что спектр действительного сигнала, полученный методом ДПФ-П, при значении параметра $\theta \neq 0 ; 1/2$, в отличие от ДПФ, не обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии. Однако ДПФ-П действительных последовательностей при $\theta \neq 0 ; 1/2$ обладает другим очень важным свойством, названным автором «*перекрестной комплексно-сопряженной симметрией*» (см. соотношения (2.43), (2.44), рисунок 2.8).

Благодаря этому свойству, выполняя БПФ-П, получаем одновременно два частотных спектра ДПФ-П: при значениях параметра θ и $(1-\theta)$. При этом относительная экономия в вычислениях в рамках данного подхода будет полностью совпадать с кривой, приведенной на рисунке 5.7.

5.3. Быстрый алгоритм дискретного преобразования Фурье действительных сигналов

В разделах 5.1 и 5.2 на основании свойств параметрического ДПФ предложены два алгоритма БПФ-П (с замещением и без замещения), два алгоритма БПФ-П действительных последовательностей при значении параметра $\theta = 1/2$ и метод быстрого вычисления ДПФ-П действительных последовательностей при значении параметра θ , не равного нулю и $1/2$. Доказана эффективность предложенных алгоритмов БПФ-П.

Вопрос повышения эффективности алгоритмов вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей (т.е. вычисление ДПФ-П при значении параметра $\theta = 0$) автором настоящей работы вначале не рассматривался. Автор искренне полагал справедливой общепринятую точку зрения о том, что в данном направлении сделано если не все, то почти все.

Однако, как показал более детальный анализ, резерв повышения эффективности алгоритмов быстрого измерения ДПФ действительных последовательностей все же есть.

Пусть задана действительная последовательность $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, ДПФ которой равен ДПФ-П при $\theta = 0$, согласно выражению (5.1) имеет вид:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (5.23)$$

Найдем четные отсчеты ДПФ действительной последовательности $x(n)$. Согласно (5.1):

$$\begin{aligned} S_N(2k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{2nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{2nk} + \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{2nk}; \\ S_N(2k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{2nk} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{2(n+N/2)k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_{N/2}^{nk} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_{N/2}^{nk}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Последнее соотношение получено с учетом того, что $W_N^{2(N/2)k} = 1$.

И окончательно:

$$S_N(2k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2} [x(n) + x(n + N/2)] W_{N/2}^{nk}, \quad k = \overline{0, N/2-1}. \quad (5.25)$$

Аналогично найдем и нечетные отсчеты ДПФ действительной последовательности $x(n)$:

$$\begin{aligned} S_N(2k+1) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1)} + \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1)}; \\ S_N(2k+1) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1)} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{(n+N/2)(2k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1)} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{n(2k+1)} W_N^{N/2(2k+1)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_{N/2}^{n(k+1/2)} - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_{N/2}^{n(k+1/2)}. \end{aligned}$$

Последнее выражение получено с учетом того, что: $W_N^{(N/2) \cdot (2k+1)} = -1$. И окончательно:

$$S_N(2k+1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n + N/2)] W_{N/2}^{n(k+1/2)}, \quad k = \overline{0, N/2-1}. \quad (5.26)$$

Сравнивая соотношения (5.1) и (5.26), приходим к выводу, что выражение (5.26) представляет собой ДПФ-П действительной последовательности $[x(n) - x(n + N/2)]$ при значении параметра $\theta = 1/2$. Для действительных последовательностей спектр $S_N(2k + 1)$, $k = \overline{0, N/2 - 1}$ является избыточным, так как он обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии:

$$S_N(2k + 1) = S_N^*(N - (2k + 1)), \quad k = \overline{1, N/4 - 1}. \quad (5.27)$$

Найдем четные отсчеты ДПФ-П, $\theta = 1/2$ последовательности:

$$x_2(n) = [x(n) - x(n + N/2)], \quad n = \overline{0, N/2 - 1}, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} S_N(4k + 1) &= S_{N/2}(2k, 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{n(2k+1/2)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/4-1} x_2(n) W_{N/2}^{n(2k+1/2)} + \frac{1}{N} \sum_{n=N/4}^{N/4-1} x_2(n + N/4) W_{N/2}^{(n+N/4)(2k+1/2)}. \end{aligned}$$

Или:

$$S_{N/2}(2k, 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/4-1} x_2(n) W_{N/4}^{n(k+1/4)} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/4-1} x_2(n + N/4) W_{N/4}^{n(k+1/4)} W_{N/2}^{N/4(2k+1/2)}.$$

Учитывая, что $W_{N/2}^{N/4(2k+1/2)} = -j$, окончательно получим:

$$\begin{aligned} S_N(4k + 1) &= S_{N/2}(2k, 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/4-1} [x_2(n) - jx_2(n + N/4)] W_{N/4}^{n(k+1/4)}; \\ k &= \overline{0, N/4 - 1}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Найдем нечетные отсчеты ДПФ-П, $\theta = 1/2$ последовательности (5.28):

$$S_N(4k + 3) = S_{N/2}((2k + 1), 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{n(2k+1+1/2)}.$$

Опуская промежуточные результаты, установим, что:

$$\begin{aligned} S_N(4k + 3) &= S_{N/2}((2k + 1), 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/4-1} [x_2(n) + jx_2(n + N/4)] W_{N/4}^{n(k+3/4)}; \\ k &= \overline{0, N/4 - 1}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Последнее соотношение получено с учетом того, что $W_{N/2}^{N/4(2k+1+1/2)} = +j$.

Отметим, что вычисление ДПФ-П, $\theta = 3/4$ согласно соотношению (5.30) более предпочтительно, чем вычисление ДПФ-П, $\theta = 1/4$ согласно соотношению (5.29), так при этом нет необходимости менять знак у мнимой части формируемой комплексной последовательности.

Таким образом, благодаря соотношению (5.30), мы находим $N/4$ значений искомого спектра.

Для получения остальных $(N/4 + 1)$ значений искомого спектра обратимся к соотношению (5.25), из которого непосредственно следует, что для этого необходимо найти четные и нечетные отсчеты ДПФ последовательности:

$$x_1(n) = x(n) + x(n + N/2), \quad n = \overline{0, N/2 - 1}.$$

Несложно установить, что проведя преобразования, аналогичные преобразованиям, определенным соотношениями (5.25) и (5.26), а также повторив (с учетом размерности) выкладки, заданные соотношениями (5.28), (5.29) и (5.30), мы найдем еще $N/8$ отсчетов искомого спектра. Этот процесс продолжается до получения всех отсчетов искомого спектра.

Рассмотрев математическое обоснование метода, дадим формализованное описание предлагаемого алгоритма, разбив его на этапы.

Пусть задана действительная последовательность:

$$x(n), \quad n = \overline{0, N - 1}, \quad N = 2^r, \quad r = 3, 4, \dots$$

1. Формируем две новые действительные последовательности:

$$x_{1,1}(n) = x(n) + x(n + N/2);$$

$$x_{1,2}(n) = x(n) - x(n + N/2), \quad n = \overline{0, N/2 - 1}.$$

2. Формируем из действительной последовательности $x_{1,2}(n)$ комплексную

последовательность в $N/4$ отсчетов $x_{1,2}^{\hat{e}i\pi n/2}(n)$:

первые $N/4$ отсчетов последовательности $x_{1,2}(n)$ являются действительной частью формируемой последовательности, а следующие $N/4$ отсчетов ее мнимой частью:

$$\operatorname{Re}[x_{1,2}^{\hat{e}i\pi n/2}(n)] = x_{1,2}(n), \quad n = \overline{0, N/4 - 1};$$

$$\text{Im}[x_{1,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n)] = x_{1,2}(n + N/4), n = \overline{0, N/4 - 1}. \quad (5.31)$$

Далее вычисляем ДПФ-П, при $\theta = 3/4$ сформированной комплексной последовательности $x_{1,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n)$:

$$S_N(4k + 3) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/4-1} x_{1,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n) W_{N/4}^{n(k+3/4)}, k = \overline{0, N/4 - 1}.$$

3. Учитывая, что нам необходимо найти спектр сигнала лишь на положительных частотах, заносим полученные $N/4$ отсчетов спектра в соответствующие ячейки памяти. При этом, исходя из соотношения (5.27), проводим, при необходимости, комплексное сопряжение полученных отсчетов искомого спектра.
4. Из действительной последовательности $x_{1,1}(n)$ формируем две новые действительные последовательности:

$$x_{2,1}(n) = x_{1,1}(n) + x_{1,1}(n + N/4), n = \overline{0, N/4 - 1};$$

$$x_{2,2}(n) = x_{1,1}(n) - x_{1,1}(n + N/4), n = \overline{0, N/4 - 1}.$$

Данный этап аналогичен этапу 1.

5. Формируем из действительной последовательности $x_{2,1}(n)$, комплексную последовательность в $N/8$ отсчетов $x_{2,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n)$:

$$\text{Re}[x_{2,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n)] = x_{2,1}(n), n = \overline{0, N/8 - 1};$$

$$\text{Im}[x_{2,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n)] = x_{2,2}(n + N/8), n = \overline{0, N/8 - 1}.$$

Данный этап аналогичен этапу 2.

6. Далее вычисляем ДПФ-П при $\theta = 3/4$ сформированной комплексной последовательности $x_{2,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n)$:

$$S_N(8k + 6) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/8-1} x_{2,2}^{\hat{e}i\ddot{i}\ddot{e}}(n) W_{N/8}^{n(k+3/4)}, k = \overline{0, N/8 - 1}.$$

7. Выполняем этап 3 с учетом размерности ДПФ-П.

Данный процесс итерационно повторяется до получения действительной последовательности $x_{m,1}(n)$ размерностью в 4 отсчета. Это произойдет после выполнения $(r-3)$ итераций. К этому времени будет получено уже $(N/2-2)$ отсчетов искомого спектра. Оставшиеся 3 отсчета получают вычислением двух двухточечных ДПФ-П при значениях параметра $\theta=0$ (отсчеты спектра на нулевой частоте и $N/2$ -частоте (требуется лишь сложение и вычитание)) и двухточечное ДПФ-П при значении параметра $\theta=1/2$ (отсчет спектра на $(N/2+1)$ частоте (требуется одно умножение на j)).

Алгоритм быстрого вычисления ДПФ действительной последовательности может быть представлен в виде направленного графа, приведенного для числа отсчетов $N=16$ на рисунке 5.9. На рисунке 5.10 приведены базовые операции предлагаемого алгоритма.

Рассмотрим эффективность алгоритма быстрого вычисления ДПФ действительной последовательности в сравнении с комплексным БПФ и существующими алгоритмами БПФ действительных последовательностей. Стандартное N -точечное комплексное БПФ по основанию 2 требует выполнения $N/2 \log_2 N$ базовых операций, получивших, как уже указывалось, название «бабочки». Каждая базовая операция требует одного комплексного умножения и двух комплексных сложений. Так как комплексное умножение состоит из четырех действительных умножений и двух действительных сложений, то выполнение одной «бабочки» БПФ потребует выполнения четырех действительных умножений и шести действительных сложений. Таким образом, вычислительные затраты на выполнение стандартного N -точечного комплексного БПФ по основанию 2 равны $2N \log_2 N$ действительных умножений и $3N \log_2 N$ сложений.

Алгоритмы БПФ действительной последовательности, рассмотренные в работах [9, 46], требуют выполнения $N \log_2(N/2) + 4N$ действительных умножений и $3/2 N \log_2(N/2) + 4N$ действительных сложений.

Оценим вычислительные затраты предлагаемого алгоритма быстрого вычисления ДПФ действительных последовательностей.

Число слоев направленного графа предлагаемого алгоритма по основанию 2 равно r , при длительности последовательности $N = 2^r$.

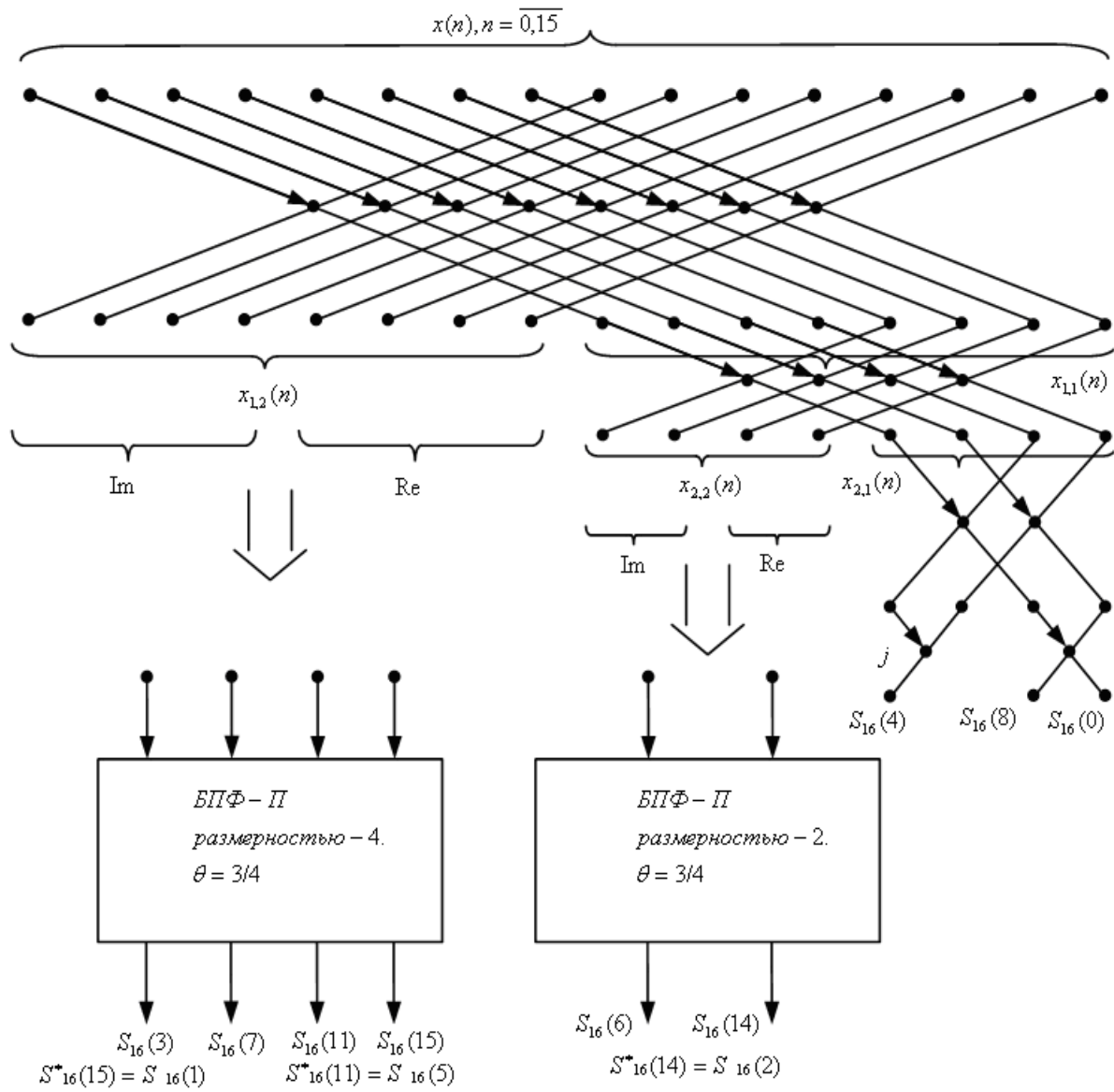


Рисунок 5.9 – Граф алгоритма быстрого вычисления ДПФ действительной последовательности

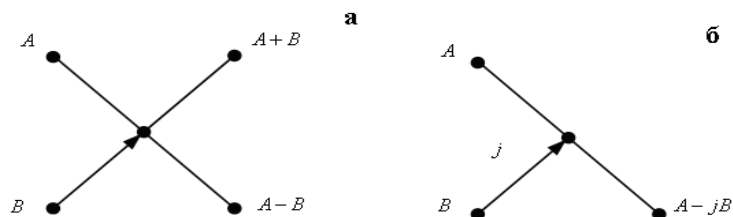


Рисунок 5.10 – Базовые операции алгоритма

Сумма действительных сложений и вычитаний, осуществляемых на всех слоях графа, представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем 2:

$$S_{\bar{n}\bar{e},\bar{a}\bar{a}\bar{e}\bar{n}\bar{d}} = \sum_{k=1}^{r+1} 2^{k-1} = 2^{r+1} - 1. \quad (5.32)$$

Например, для графа, приведенного на рисунке 5.9, $S_{\bar{n}\bar{e},\bar{a}\bar{a}\bar{e}\bar{n}\bar{d}} = 31$.

Найдем число умножений и сложений, необходимое для реализации алгоритмов БПФ-П. Отметим, что реализация комплексных алгоритмов БПФ-П, как и комплексных алгоритмов БПФ, требует $2N \log_2 N$ действительных умножений и $3N \log_2 N$ сложений.

Нетрудно установить, что число требуемых операций при выполнении комплексных БПФ-П определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} S_{\bar{n}\bar{e},\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{i}} &= \sum_{k=1}^{r-2} 3k2^k; \\ S_{\bar{o}\bar{i},\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{i}} &= \sum_{k=1}^{r-2} 2k2^k. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Следовательно, общее число сложений, которые необходимо выполнить при реализации предлагаемого алгоритма, задается соотношением:

$$S_{\bar{n}\bar{e}} = S_{\bar{n}\bar{e},\bar{a}\bar{a}\bar{e}\bar{n}\bar{d}} + S_{\bar{n}\bar{e},\bar{A}\bar{I}\bar{O}-\bar{i}} = 2^{\hat{e}+1} - 1 + \sum_{k=1}^{r-2} 3k2^k. \quad (5.34)$$

В качестве критерия эффективности, аналогично работе [46], выберем относительную экономию вычислений при применении сравниваемых алгоритмов:

$$\gamma = \frac{\bar{e}\bar{n}\bar{e}\bar{i} \bar{i}\bar{a}\bar{d}\bar{a}\bar{o}\bar{e}\bar{e} \hat{a} \bar{a}\bar{e}\bar{a}\bar{i}\bar{d}\bar{e}\bar{d}\bar{o}\bar{i}\bar{a} \quad A - \bar{e}\bar{n}\bar{e}\bar{i} \bar{i}\bar{a}\bar{d}\bar{a}\bar{o}\bar{e}\bar{e} \hat{a} \bar{a}\bar{e}\bar{a}\bar{i}\bar{d}\bar{e}\bar{d}\bar{o}\bar{i}\bar{a} \quad B}{\bar{e}\bar{n}\bar{e}\bar{i} \bar{i}\bar{a}\bar{d}\bar{a}\bar{o}\bar{e}\bar{e} \hat{a} \bar{a}\bar{e}\bar{a}\bar{i}\bar{d}\bar{e}\bar{d}\bar{o}\bar{i}\bar{a} \quad A}. \quad (5.35)$$

Сделаем одно замечание.

Под числом операций в формуле (5.35), в зависимости от применяемых для реализации алгоритма аппаратных решений, могут пониматься как только выполняемые умножения, так и сумма выполняемых умножений и сложений. Последний случай имеет место в случае применения высокоскоростных

специализированных умножителей, которые позволяют операцию умножения выполнять практически за то же время, что и сложения.

На рисунках 5.11 и 5.12 показана относительная экономия вычислений в предлагаемом алгоритме по сравнению с комплексным БПФ и алгоритмом БПФ действительных последовательностей, предложенном в работах [67, 83].

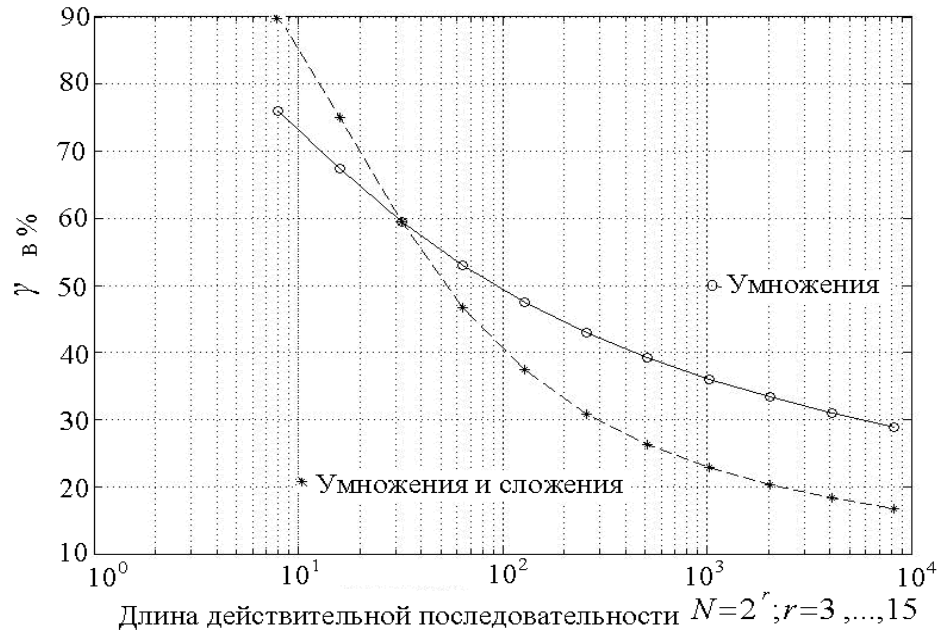


Рисунок 5.11 – Относительная экономия вычислений γ в %. Сравнение с алгоритмом [46]

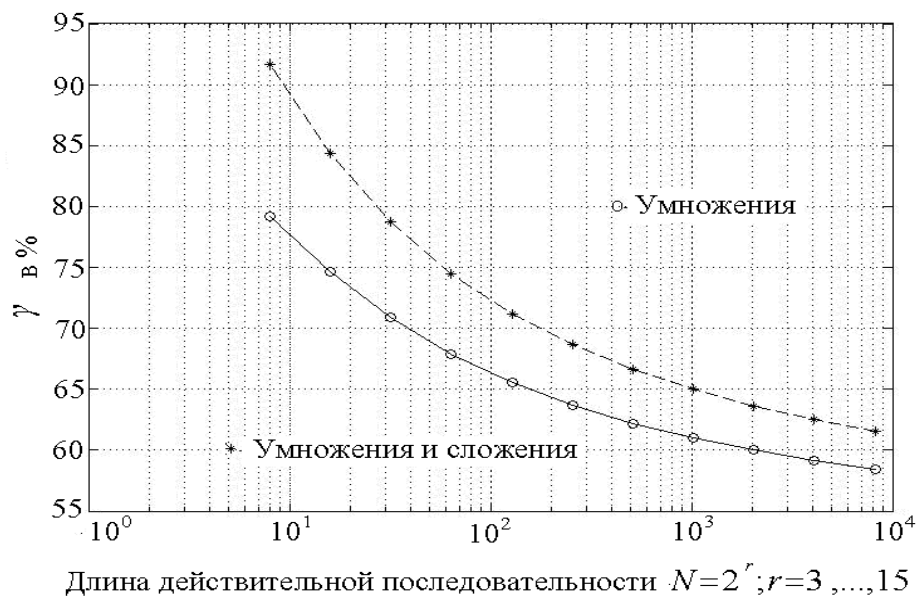


Рисунок 5.12 – Относительная экономия вычислений в %. Сравнение с комплексным БПФ

В заключение раздела отметим, что разработка данного эффективного метода и алгоритма быстрого вычисления ДПФ действительных последовательностей (эффективного именно за счет метода, а не аппаратных решений) стала возможной благодаря тому, что автором была разработана теория параметрического дискретного преобразования Фурье, включая быстрые алгоритмы его вычисления для действительных и комплексных последовательностей.

5.4. Быстрый алгоритм параметрического дискретного преобразования Фурье сигналов большой длительности в реальном масштабе времени

В предыдущих главах диссертационного исследования назван целый ряд областей научных исследований, где необходимо проводить обработку ДИС большой длительности в реальном масштабе времени. Применение алгоритмов БПФ по основанию 2 для решения такого рода задач наталкивается на два существенных недостатка данных алгоритмов:

- во-первых, процесс вычислений можно начинать только после поступления более половины отсчетов исходного дискретного сигнала;
- во-вторых, накладывается жесткое ограничение на число отсчетов исходного сигнала, которое должно быть целой степенью двух.

Например, в среде проектирования инженерных приложений MATLAB ограничение на число отсчетов исходного сигнала снимается тем, что исходный сигнал *автоматически*, помимо исследователя дополняется нулевыми отсчетами до степени двух. Вряд ли такой подход можно считать решением проблемы – скорее это вынужденная мера борьбы с указанным недостатком алгоритмов БПФ по основанию два.

Исследуем структуру параметрического экспоненциального базиса с целью разработки быстрых алгоритмов ДПФ-П последовательностей большой длительности в реальном масштабе времени, свободных от указанных выше недостатков.

Пусть задан дискретный сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, M-1}$, который может быть представлен в виде вектора M -мерного линейного пространства:

$$X_M = [x(0), x(1), \dots, x(M-1)]^T. \quad (5.36)$$

Параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П) сигнала (5.36), согласно (2.15), равно:

$$S_{M,\theta} = \frac{1}{M} F_{M,\theta} X_M; \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (5.37)$$

где $X_M = [x(0), x(1), \dots, x(M-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, M-1}$, в виде вектора M -мерного линейного пространства;

T – знак транспонирования;

$S_{M,\theta} = [s(0,\theta), s(1,\theta), \dots, s((N-1),\theta)]^T$ – вектор коэффициентов разложения

X_M по системе ДЭФ-П, задаваемой матрицей F_M :

$$F_{M,\theta} = \begin{matrix} & & & & & n \\ & & 0 & 1 & \dots & (M-1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ (M-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_M^\theta & \dots & W_M^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_M^{(1+\theta)} & \dots & W_M^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_M^{(N-1+\theta)} & \dots & W_M^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} & & \\ k & & & & & \end{matrix}, \quad W_M = \exp(-j \frac{2\pi}{M}). \quad (5.37, a)$$

Пусть число отсчетов дискретного сигнала X_M (5.36) равно:

$$M = N \cdot r; \quad r = 1, 2, 3, \dots; \quad N = 2^\delta, \quad \delta = 2, 3, \dots \quad (5.38)$$

Отметим, что **размер матрицы ДЭФ F_M в этом случае уже не является целой степенью двух**, и следовательно диапазон анализируемых длительностей сигнала X_M быстрыми алгоритмами **существенно расширяется**. Матрица ДЭФ-П $F_{M,\theta}$ в этом случае может быть представлена следующим образом:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & & & & & n \\ & & 0 & 1 & \dots & (Nr-1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ (Nr-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{\theta/r} & \dots & W_N^{\theta(Nr-1)/r} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)/r} & \dots & W_N^{(1+\theta)(Nr-1)/r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(Nr-1+\theta)/r} & \dots & W_N^{(Nr-1+\theta)(Nr-1)/r} \end{bmatrix} & & \\ k & & & & & \end{matrix}, \quad W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}). \quad (5.39)$$

Представим вектор X_M (5.36) в виде блочного вектора X_r :

$$X_r = [X_0, X_1, \dots, X_{r-1}]^T; \quad (5.45)$$

$$\text{где } X_i = [x(iN), x(iN+1), \dots, x(iN+N-1)]^T, i = \overline{0, r-1}.$$

Тогда вычисление ДПФ-П вектора X_M , согласно выражению (5.37), с учетом (5.44) и (5.45) можно найти как:

$$S_r = A_{r, \text{дв.}} X_r / M, \quad (5.46)$$

где $S_r = [S_0, S_1, \dots, S_{r-1}]^T$ – вектор коэффициентов разложения блочного вектора X_r : $S_i = [s(i), s(r+i), \dots, s(rN-r+i)]^T, i = \overline{0, r-1}$.

Отметим, что вычисление вектора S_r можно проводить в r этапов, каждый из которых состоит из r подэтапов.

На первом этапе при поступлении вектора $X_0 = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ определяем матричные произведения:

$$Y_{i,0} = A_{i,1} \times X_0$$

где $i = 1, 2, \dots, r$ – номер подэтапа.

На втором этапе при поступлении вектора $X_i = [x(N), x(N+1), \dots, x(2N-1)]^T$ находим матричные произведения $Y_{i,1} = A_{i,1} \cdot X_1 \cdot W_r^{(i-1+\theta)}$, $i = 1, 2, \dots, r$ и сумму векторов $Y_{i,0}$ и $Y_{i,1}$, $i = 1, \dots, r$. Выполняя аналогично оставшиеся $(r-2)$ этапов, получим вектор S_r коэффициентов ДПФ-П вектора X_r :

$$S_r = [S_0, S_1, \dots, S_{r-1}]^T; \quad (5.47)$$

$$\text{где } S_{i-1} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{r-1} Y_{i,k}; Y_{i,k} = A_{i,1} X_k W_r^{(i-1+\theta)k};$$

i и k – номера подэтапов и этапов соответственно.

Естественно, поэтапное вычисление ДПФ вектора X_r будет эффективным только в том случае, когда матричные произведения (5.47) могут быть получены с помощью быстрых алгоритмов.

Из сравнения матриц (5.37) и (5.42) нетрудно видеть, что матрица $A_{r,1}$ представляет собой матрицу ДПФ-П при:

$$\theta_1 = \theta/r ; \theta_2 = (1+\theta)/r , \dots , \theta_r = (r-1+\theta)/r , \quad (5.48)$$

т.е. вычисления матричных произведений (5.47) могут быть получены методом БПФ-П.

Таким образом, предлагаемый метод распараллеливания процесса вычисления ДПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, M-1}$, позволяет, с одной стороны, использовать быстрые алгоритмы вычислений ДПФ-П, с другой стороны – начинать вычисления после поступления N отсчетов исходного сигнала, что дает возможность резко уменьшить задержку в начале вычислений, так как $N \ll M$.

На рисунке 5.13 представлена блок-схема алгоритма, иллюстрирующая процесс поэтапного вычисления ДПФ-П X_M .

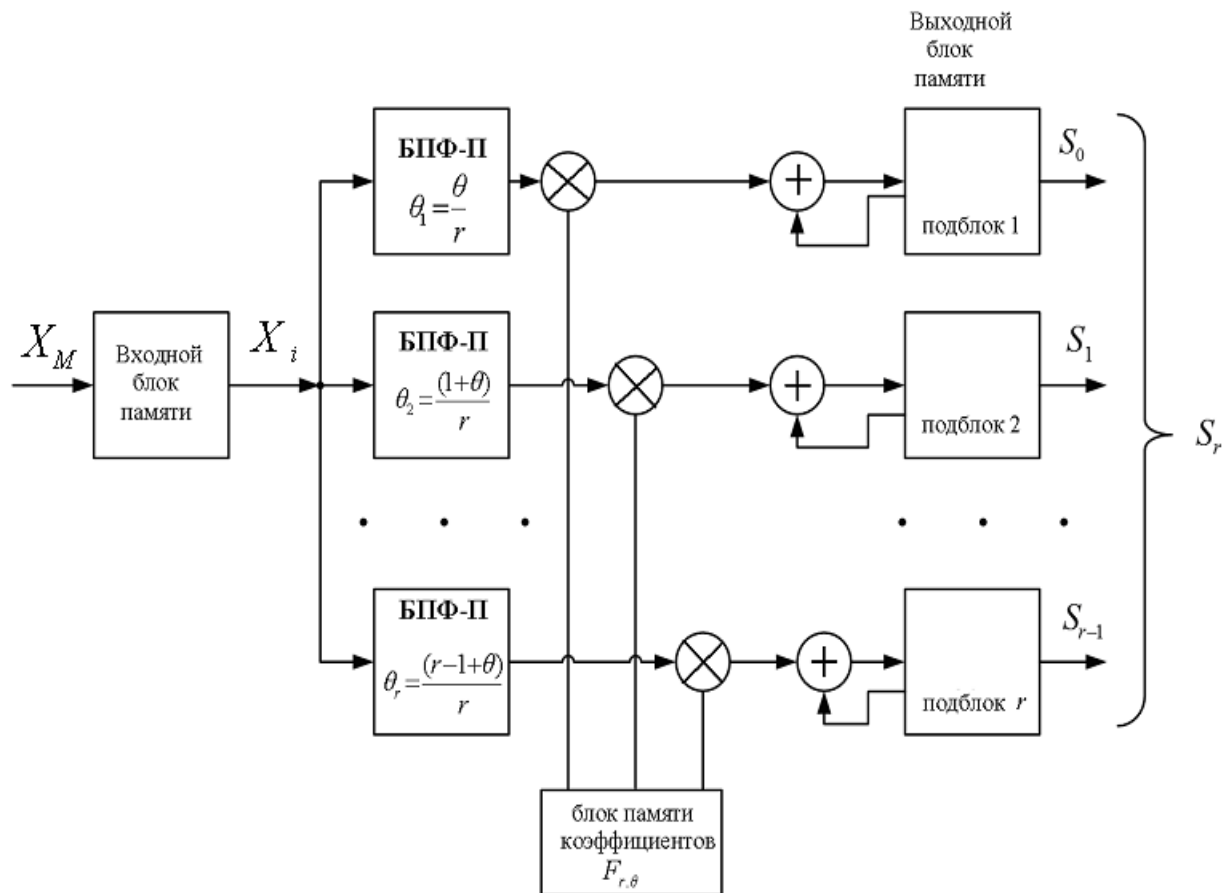


Рисунок 5.13 – Структура алгоритма БПФ-П в реальном масштабе времени

Учитывая свойство линейности дискретного преобразования Фурье, возможен и несколько иной порядок вычисления коэффициента ДПФ в реальном масштабе времени. Сначала осуществить накопление исходной реализации с поворотом на множители согласно (5.43), а затем вычисления ДПФ-П при соответствующих значениях θ_i (5.48). На рисунке 5.14 представлена блок-схема соответствующего алгоритма.

Оценим эффективность предлагаемого метода вычисления ДПФ-П с точки зрения реализации его в реальном масштабе времени. Для M -точечного БПФ-П по основанию 2 общее число базовых операций равно $M/2 \log_2 M$, так как преобразование включает в себя несколько этапов, на каждом из которых выполняется $M/2$ базовых операций. Следовательно, время вычислений ДПФ-П равно:

$$T_1 = (M/2 \log_2 M) T_{a1}, \quad (5.49)$$

где T_{a1} – время выполнения базовой операции M -точечного БПФ-П.

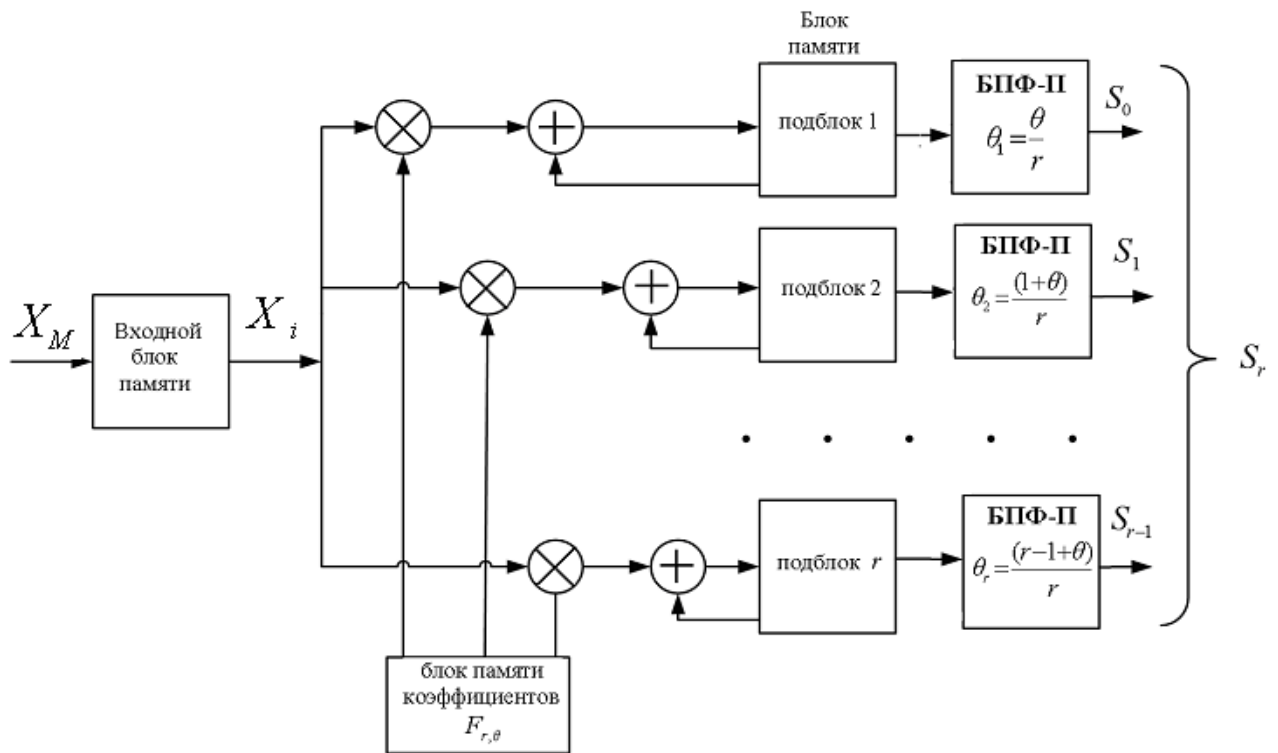


Рисунок 5.14 – Структура алгоритма БПФ-П в реальном масштабе времени (вариант 2)

Так как вычисление ДПФ с помощью БПФ-П можно начинать лишь после поступления $M/2$ отсчетов, то его выполнение при работе в реальном масштабе времени должно быть закончено за время $M/f_{\hat{e}a1}$, где $f_{\hat{e}a1}$ – частота дискретизации сигнала.

Следовательно, уравнение реализации реального масштаба времени имеет вид:

$$T_{a1}/2 \log_2 M = 1/f_{\hat{e}a1}; \quad (5.50)$$

а время задержки выдачи результатов равно $T_{c1} = T_1/2$.

В предлагаемом методе время вычисления N -точечного ДПФ-П с помощью БПФ-П равно:

$$T_2 = (N/2 \log_2 N) T_{a2}, \quad (5.51)$$

где T_{a2} – время выполнения базовой операции N -точечного БПФ-П.

При этом уравнение реализации реального масштаба времени в предлагаемом методе записывается как:

$$T_{a2} \log_2 N / 2 = \frac{1}{f_{\hat{e}a2}}; \quad (5.52)$$

где $f_{\hat{e}a2}$ – возможная частота дискретизации сигнала,

а время задержки выдачи результатов:

$$T_{c2} = T_1/2 + NT_{\phi}, \quad (5.53)$$

где T_{ϕ} – время выполнения одного комплексного умножения.

Анализ уравнений (5.50), (5.52) позволяет сделать следующие выводы. В разработанном методе быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье сигналов большой длительности возможны три варианта повышения эффективности вычисления ДПФ-П, обеспечивающие реальный масштаб времени:

1. При $f_{\hat{e}a1} = f_{\hat{e}a2}$ – время выполнения базовой операции может быть увеличено в $\log_2 M / \log_2 N$ раз.

2. При $T_{a1} = T_{a2}$ – частота дискретизации сигнала может быть повышена в $\log_2 M / \log_2 N$ раз.
3. При $f_{\hat{a}1} = f_{\hat{a}2}$, $T_{a1} = T_{a2}$ – число отсчетов анализируемого сигнала может быть увеличено в r раз.

Кроме того, предлагаемый метод, позволяет резко уменьшить время задержки (5.53) в получении коэффициентов ДПФ-П N -точечной последовательности, а также существенно расширить диапазон длительностей исходного сигнала, частотный спектр которых может быть получен быстрыми алгоритмами.

Таким образом, на основе исследования структуры систем дискретных экспоненциальных функций разработан метод получения коэффициентов параметрического дискретного преобразования Фурье последовательностей большой длительности в реальном масштабе времени. Предлагаемый метод позволяет распараллеливать процесс измерения параметров дискретных электрических сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье, совмещая процесс получения бинов параметрического дискретного преобразования Фурье с поступлением отсчетов анализируемого дискретного сигнала. В силу того, что дискретное преобразование Фурье является частным случаем параметрического дискретного преобразования Фурье (при значении параметра $\theta = 0$), полученные результаты в полной мере справедливы и для ДПФ.

ВЫВОДЫ

1. На практике, чтобы воспользоваться преимуществами, которыми обладает параметрическое ДПФ по сравнению с ДПФ, также необходимы быстрые процедуры его реализации (аналогичные БПФ), поскольку данное измерительное преобразование (как и измерительное преобразование ДПФ) требует выполнения N^2 комплексных умножений, что приводит к необоснованно быстрому росту вычислительных затрат с ростом N .

2. Доказано существование быстрых процедур реализации параметрического преобразования Фурье, которые автор по аналогии с алгоритмами быстрого преобразования Фурье назвал алгоритмами быстрого параметрического преобразования Фурье.
3. Параметрический базис Фурье (базис параметрических дискретных экспоненциальных функций) является мультипликативным, в отличие от базиса дискретных экспоненциальных функций, не по двум переменным, а по одной переменной. Поэтому существует только один класс алгоритмов быстрого параметрического преобразования Фурье – класс алгоритмов быстрого параметрического преобразования Фурье с прореживанием по времени, который допускает множество модификаций.
4. Разработаны алгоритмы быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье как с замещением (*in place*) так и без замещения (*no place*). Получены направленные графы разработанных быстрых процедур реализации быстрых алгоритмов параметрического дискретного преобразования Фурье.
5. Параметрическое дискретное преобразование Фурье неявно предполагает обработку комплексного ДИС. Однако на практике, как правило, исходные ДИС являются действительными сигналами. Задание действительного ДИС в комплексной форме путем приравнивания его мнимой части нулю приводит к нерациональному использованию вычислительных мощностей процессорных измерительных средств.
6. Предложены два алгоритма реализации параметрического дискретного преобразования Фурье действительных ДИС, которые дают относительную экономию числа операций для значений параметра $\theta = 0, 1/2$ более чем 50 %. Для параметров $\theta \neq 0, 1/2$ предложен алгоритм, позволяющий одновременно находить частотные спектры ДИС при значениях параметра θ и $1 - \theta$.

7. Разработан быстрый алгоритм дискретного преобразования Фурье действительных ДИС, дающий относительную экономию числа операций в сравнении с существующими быстрыми алгоритмами более чем 30 %.
8. Предложен быстрый алгоритм параметрического дискретного преобразования Фурье ДИС большой длительности в реальном масштабе времени. Для ДИС длительностью $M = N \cdot r$, где $N = 2^p$, $p = 1, 2, \dots$, разработанный алгоритм позволяет либо снизить требования к скорости выполнения базовой операции в $\log_2 M / \log_2 N$ раз, либо повысить частоту дискретизации исходного сигнала в $\log_2 M / \log_2 N$ раз, либо увеличить число отсчетов анализируемого сигнала в r раз.

ГЛАВА 6

**ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ
В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ФУРЬЕ**

**6.1. Применение методов и алгоритмов цифровой обработки
информационных сигналов в параметрических базисах Фурье**

для повышения эффективности, надежности и качества технических систем

Обзор современного состояния систем цифровой обработки информационных сигналов (систем ЦОИС) [63,75] позволил сделать следующие выводы.

Во-первых, проведение измерений всегда является частью систем ЦОИС, в связи с чем в мировой практике общепринято считать ИС *носителями общей измерительной информации*. Отметим, что при обработке ИС крайне важно обеспечение выполнения современных требований к единству и точности измерений информационных параметров ИС [63]. Например, в системах пассивной гидролокации недостаточная точность измерений параметров гидроакустических ИС приводит к принятию ошибочных решений при определении принадлежности того или иного объекта к классам «*свой-чужой*», что, по известным причинам, чревато серьезными последствиями. Не менее серьезны последствия необеспечения необходимых метрологических характеристик и в других предметных областях, таких, например, как виброакустическое функциональное диагностирование машин и механизмов, медицинская компьютерная диагностика.

Во-вторых, совокупность информационных параметров, характеризующих объект исследования, применяемые методы и средства их измерения и обработки, требования к функциональным возможностям и метрологическим характеристикам средств измерения и обработки определяются, прежде всего, задачами, стоящими в целом перед суперсистемами, в состав которых входят системы ЦОИС, а также условиями решения этих задач.

В-третьих, в реализации систем ЦОИС наблюдается тенденция перехода от специализированных устройств ЦОИС к универсальным перепрограммируемым системам ЦОИС на основе новой информационной технологии – технологии виртуальных приборов, разрабатываемых в программно-инструментальной среде LabVIEW. Данный вопрос более подробно рассмотрен в разделе 6.2.

Анализ систем ЦОИС, которые являются сложными техническими системами, оснащенными специальным математическим и алгоритмическим обеспечением и содержащими в своем составе подсистемы, функциональные устройства и процессорные измерительные средства, отличающиеся как по структуре, свойствам, так и характеру связей и параметрам, предпочтительнее проводить на базе системного подхода.

В системном анализе сложную систему принято описывать с трех точек зрения: функциональной, морфологической и информационной. Основываясь на этой общей методологии и с учетом того, что согласно теории сложных систем уровни декомпозиции системы (границы систем различных уровней) должны совпадать с уровнями иерархии, иерархическую функциональную морфологически-информационную модель ЦОИС можно представить в виде следующих описаний [75].

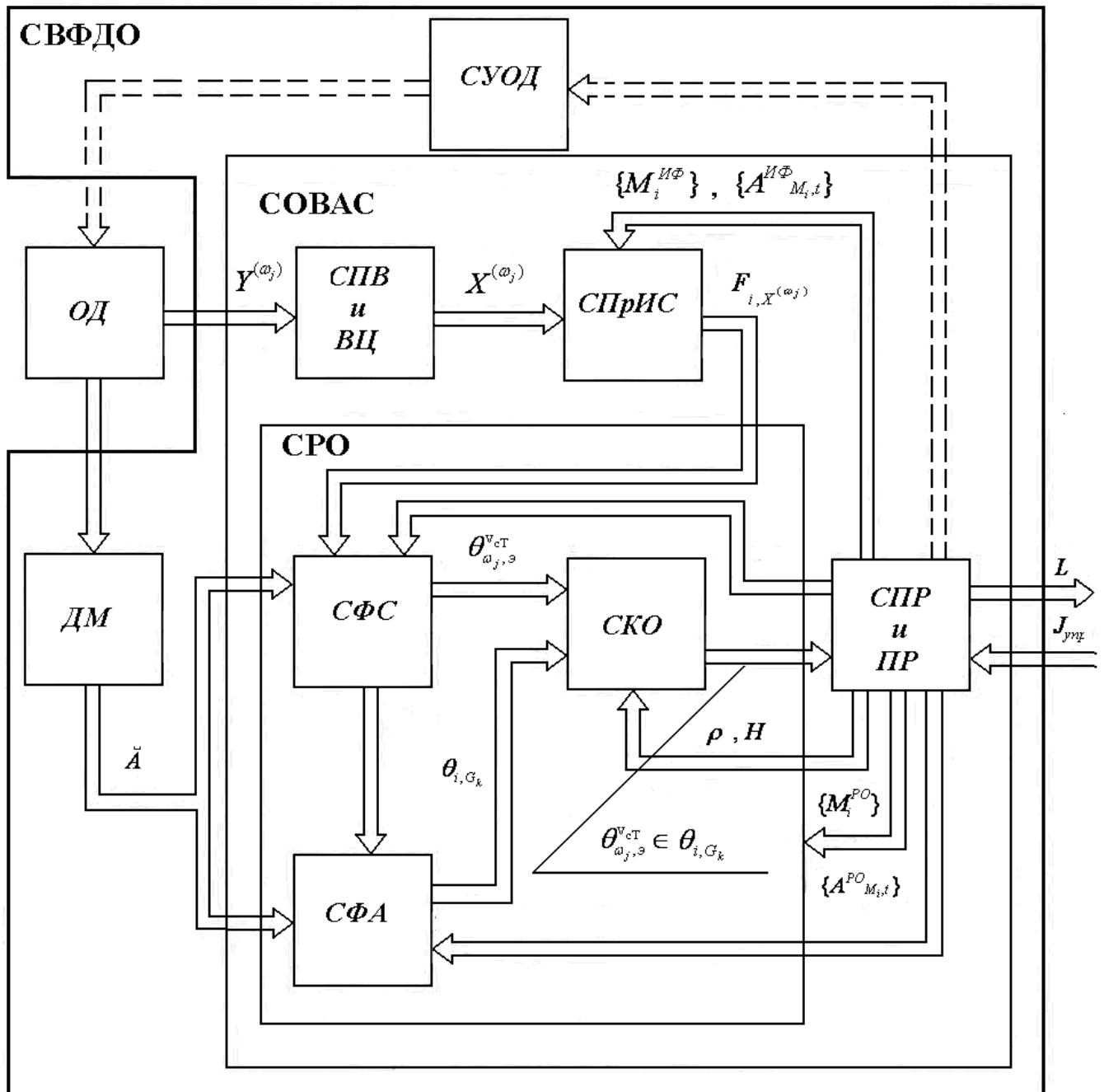
1. Функциональное описание S_Φ системы ЦОИС – тройка конечных множеств, отражающих функции Φ , операторы преобразования R и иерархию G системы ЦОИС:

$$S_\Phi = \{\Phi, R, G\}. \quad (6.1)$$

2. Морфологическо-информационное описание $S_{M,E}$ системы ЦОИС – пятерка конечных множеств, отражающих элементы M (подсистемы, внутри которых морфологическо-информационное описание не распространяется), их свойства, связи V , структуры E , композицию K и организацию системы I ЦОИС:

$$S_{M,E} = \{M, V, E, K, I\}. \quad (6.2)$$

На базе этих описаний автором разработана иерархическая функциональная морфологическо-информационная модель системы ЦОИС в составе суперсистемы виброакустического функционального диагностирования объектов (СВФДО), которая реализована в условиях производства [75]. Обобщенная функционально-структурная схема СВФДО приведена на рисунке 6.1



ОД – объект диагностирования; ДМ – диагностическая модель; СОВАС – система обработки виброакустического сигнала; СУОД – система управления объектом диагностирования (может

отсутствовать, поэтому связи показаны пунктиром). Подсистемами СОВАС являются: СПВиВЦ – система первичных вибропреобразователей и входных цепей; СПРИС – система процессорных измерительных средств измерения параметров виброакустического сигнала; СПРiПД – система принятия решения и постановки диагноза; СРО – система распознавания образов, включающая в себя СФС (систему формирования словаря диагностических признаков), СФА (систему формирования алфавита классов (диагнозов)), СКО (систему классификации образов)

Рисунок 6.1 – Обобщенная функционально-структурная схема системы виброакустического функционального диагностирования объектов (СВФДО)

Функциональное диагностирование объектов (диагностирование объектов, проводимое в процессе осуществления ими своих прямых функций) на основе анализа порождаемых ими информационных сигналов, находит самое широкое применение в различных областях научных исследований. Например, в клинической медицинской практике диагностика состояния пациента, анализ морфологических изменений его органов проводится на основе цифровой обработки электроэнцефалограмм (ЭЭГ), кривых кровяного давления (ККД), электрокардиограмм (ЭКГ) и других биомедицинских сигналов. В практике производства и эксплуатации сложных машин и механизмов при комплексной оценке технического состояния машинного оборудования на всех этапах его жизненного цикла, а также диагностике различного рода неисправностей в рабочих условиях проводится анализ виброакустических сигналов машин и механизмов [7, 35, 49, 55, 57, 75].

Дадим краткое функциональное описание каждой из систем СВФДО в некотором обобщенном виде.

Система первичных вибропреобразователей и входных цепей (СПВ и ВЦ) включает в себя первичные преобразователи виброакустических сигналов в их электрические эквиваленты, согласующие устройства, нормирующие

преобразователи, коммутаторы и другие преобразователи первичной информации.

Система выполняет следующее преобразование:

$$X^{(\omega_j)} = R_k^{(\omega_j)} \cdot (Y^{(\omega_j)}):$$

где $Y^{(\omega_j)} = \{y_i^{(\omega_j)}\}$ - множество виброакустических сигналов объекта

$$\omega_j = \overline{1, m};$$

$X^{(\omega_j)} = \{x^{(\omega_j)}\}$ - множество электрических эквивалентов $Y^{(\omega_j)}$;

$R_k^{(\omega_j)}$ - оператор k -го первичного преобразователя, $k = \overline{1, n}$.

Система процессорных измерительных средств измерения параметров виброакустического сигнала (СПРИС).

Система осуществляет измерение различных функций (в том числе и спектрально-временных) виброакустического сигнала на базе метода M_i и алгоритма $A_{M_i, t}$:

$$F_{i, X^{(\omega_j)}} = R_i^{\tilde{N} \dot{\partial} \dot{E} \tilde{N}} (X^{(\omega_j)}),$$

где $F_{i, X^{(\omega_j)}}$ - функция сигнала $X^{(\omega_j)}$ объекта ω_j , получаемая с помощью оператора системы. $R_i^{\tilde{N} \dot{\partial} \dot{E} \tilde{N}}$, $i = \overline{1, p}$.

Система формирования словаря диагностических признаков (СФС) формирует словарь диагностических признаков: $V_{\tilde{n}} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ на базе измеренных функций $F_{i, X^{(\omega_j)}}$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, m}$, с учетом диагностической модели \check{A} и множества T (задается (СПР и ПД) : $V_{c, T} = R^{\tilde{N} \dot{\partial} \dot{N}} (\{F_{i, X^{(\omega_j)}}\}, \check{A}, T)$, где $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$, $\tau_i = 1 \vee 0$ в зависимости от того, используется ли признак v_i словаря V_c в дальнейшем или нет.

Система формирования алфавита (СФА) предназначена для формирования алфавита классов. В том случае, когда понятие класса совпадает с понятием диагноза (например, в дифференциальной диагностике), то говорят о формировании алфавита диагнозов.

Дадим функциональное описание рассматриваемой системы. Пусть задано множество объектов: $\Omega_o = \{\omega_{1,o}, \omega_{2,o}, \dots, \omega_{M,o}\}$ (обучающая выборка), также множество возможных решений: $L = \{l_1, l_2, \dots, l_R\}$, которые могут быть приняты СПР и ПД по результатам решения задачи распознавания.

Пусть множество $G = \{g_1, g_2, \dots, g_S\}$ задает возможные варианты разбиения обучающей выборки Ω_o на классы:

$$G_k : \Omega_{i,o}^{G_k} \cap \Omega_{j,o}^{G_k} = \emptyset; \quad \Omega_{i,o}^{G_k} \neq \emptyset; \quad \bigcup_{i=1}^{m_k} \Omega_{i,o}^{G_k} = \Omega_o; \quad i, j = \overline{1, m_k}; \quad i \neq j; \quad k = \overline{1, S}.$$

Затем строится описание θ_{i,G_k} на языке словаря $V_{c,T}$ каждого класса

$$\Omega_{i,o}^{G_k}, \quad i, j = \overline{1, m_k};$$

с учетом диагностической модели, либо непосредственно по выборке Ω_o , либо с помощью процедур обучения: $\theta_{i,G_k} = R^{\tilde{N}\hat{O}\hat{A}}(V_{c,T}, G_k, A)$.

Система классификации образов (СКО) решает традиционную задачу распознавания образов – построение решающих правил, обеспечивающих минимизацию ошибок при распознавании неизвестных объектов.

Система осуществляет следующие функции (СПР и ПД задает набор решающих функций – H). Вновь поступающий объект $\omega_{j,\varepsilon}$, принадлежащий множеству объектов $\Omega_y = \{\omega_{1,y}, \omega_{2,y}, \dots, \omega_{N,y}\}$ (экзаменационная выборка), описывается на языке словаря признаков V_{cT} как $\theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}}$ (формируется СФС), и затем определяется его принадлежность к одному из классов θ_{i,G_k} :

$$R^{\tilde{N}\hat{E}\hat{I}}(\theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}}, \rho, H, \theta_{i,G_k}) = \theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}} \in \theta_{i,G_k} \Leftrightarrow \rho(\theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}}, \theta_{i,G_k}) = \max_{i=1, m_k} \rho(\theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}}, \theta_{i,G_k}),$$

где $\rho(\theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}}, \theta_{i,G_k})$ – некоторая мера сходства $\theta_{\omega_j,y}^{v_{cT}}$ и θ_{i,G_k} $i = \overline{1, m_k}$.

Функциональное описание СПР и ПД данной будет дано позднее, при построении морфологическо-информационного описания СВФДО.

При системном подходе к исследованию систем иерархию последних принято описывать на основе иерархии целей, качество достижения которых характеризуют эффективностью. Под эффективностью понимается свойство

процесса функционирования системы, определяемое как его приспособленность к решению поставленных перед системой задач. Эффективность системы, в свою очередь, определяется показателями качества, которые разделяются на функциональные показатели $\{\Phi\}$, характеризующие свойства системы, полезные в смысле ее прямого назначения (ее функций), и экономические $\{C_i\}$ характеризующие, во-первых, затраты на реализацию требуемых свойств системы, во-вторых, экономический эффект от ее применения.

При оценивании показателей качества систем наибольшее применение нашли следующие критерии пригодности:

$$\Gamma_1 : \bigcap_{i=1}^m (k_{i,j} \in \{k_{i,j}^{\ddot{a}\ddot{r}}\});$$

оптимальности:

$$\Gamma_1 : \bigcap_{i=1}^m (k_{i,j} \in \{k_{i,j}^{\ddot{r}\ddot{o}}\});$$

где $k_{i,i}$ – показатель i свойства j системы; $k_{i,j}^{\ddot{a}\ddot{r}}$ – множество допустимых значений показателя $k_{i,j}$; $k_{i,j}^{\ddot{r}\ddot{o}}$ – множество оптимальных значений показателя $k_{i,j}$

При системном подходе исследуемая система может рассматриваться как подсистема (субсистема) в системе более высокого иерархического уровня (суперсистема). В связи с этим различают внешние и внутренние критерии эффективности функционирования систем. Например, СВФДО может рассматриваться как подсистема суперсистемы проектирования и производства, или суперсистемы эксплуатации объектов. В этом случае в качестве цели подсистемы целесообразно выбирать достижение соответствующей суперсистемой экстремальных значений показателей эффективности.

Главной целью создания СОВАС является повышение надежности и ресурса объектов, резкого сокращения расходов на их ремонт и эксплуатацию, т.е. вероятность выполнения задачи виброакустического функционального диагностирования объектов:

$$P_{\dot{a}\ddot{u}\ddot{r}.ç\grave{a}\grave{a}}^{\ddot{A}f} = p(\Delta\dot{Y}/C \in \{W_{\ddot{u}\ddot{r}}\}),$$

где $\Delta\dot{Y}$ – общий экономический эффект, полученный от применения СВФДО; $\{W_{\dot{o}o\dot{n}}\}$ – область допустимых значений $\Delta\dot{Y}/C$.

Частные цели подсистем должны определяться главной целью СОВАС. Морфологическо-информационное описание $S_{M,\dot{E}}$ (6.2) дает представление о строении и организации исследуемой системы.

Морфологическое описание, как и функциональное описание, иерархично, причем уровни иерархии в описаниях совпадают (рисунок 6.1). Элементный состав СВФДО относится к смешанным и содержит как гомогенные элементы (однотипные элементы в смысле близости их основных свойств), так и гетерогенные (разнотипные) элементы.

Важным признаком морфологии являются свойства элементов, которые для СОВАС являются в основном информационными, т.е. предназначенные для приема, передачи и преобразования информации. В системах других видов различают также энергетические (преобразующие энергию) и вещественные (осуществляющие преобразование вещества) элементы. Морфологические свойства исследуемой системы существенным образом зависят от назначения связей и характера связей (прямые и обратные). Для СОВАС – это, в основном, также информационные (рисунок 6.1). При этом обратные связи имеют в основном функцию управления. Для целенаправленных систем (обеспечивающих достижение цели в различных ситуациях), каковой и является СВФДО, наличие этих связей обязательно.

Структура СВФДО иерархическая, детерминированная, адаптивная. Композиционные свойства определяются способом объединения элементов в подсистемы. Композиция СВФДО определяется в основном рецепторными подсистемами (способными преобразовывать внешнее воздействие в информационные сигналы, например, СПВиВЦ) и рефлексивными подсистемами (способными преобразовывать процессы на информационном уровне).

Информационное описание должно давать представление об организации исследуемой системы. Своеобразным моментом системного подхода является

введение так называемой "управляющей информации", под которой понимают совокупность сигналов, передаваемых от одной системы (подсистемы) к другой, влияющих на ее поведение и развитие.

На рисунке 6.1 $J_{\sigma i \delta}$ обозначает управляющую информацию, передаваемую от суперсистемы к СОВАС, а, например, G_k, ρ, H, T – управляющую информацию на уровне подсистем СОВАС.

Рассмотрим частные цели подсистем СОВАС. Для СПВиВЦ и СПрИС правомерным представляется выбор цели в виде минимизации затрат: $\min C^{\tilde{N}i\tilde{A} \hat{\epsilon} \tilde{A} \tilde{O}}$ и $\min C^{\tilde{N}i\delta \tilde{E} \tilde{N}}$.

Для СРО в качестве цели желательно выбрать экстремальное значение критерия эффективности вида:

$$\max_{\rho, H} \Delta_{G_k} = \max \sum_i^{m_1} P_{i\delta \cdot \delta \hat{a} \phi}(\theta_{i, G_k} | V_c) \cdot W(\theta_{i, G_k});$$

где $P_{i\delta \cdot \delta \hat{a} \phi}(\theta_{i, G_k} | V_c)$ – оценка апостериорной вероятности правильного решения задачи распознавания, усредненная по всем значениям признаков словаря V_c ; $W(\theta_{i, G_k})$ – значения выигрышей, получаемых суперсистемой от решений $L = \{l_1, l_2, \dots, l_r\}$ (выдаются СПРиПД), принимаемых по результатам решения задачи распознавания образов, $m = r + 1$.

Рассмотрим частную цель СПР и ПД. Согласно общей постановке задачи распознавания объектов и явлений, необходимо при формировании словаря признаков учитывать общую величину ресурсов C_0 , выделенных на реализацию всех процессорных измерителей функций $\{F_{i, X(\omega_j)}\}$, $i = \overline{1, p}$.

Если c_{v_j} – стоимость создания процессорного измерительного устройства, обеспечивающего определение признака v_j , то реальные затраты на создание комплекса процессорных измерительных средств (ПрИС), обеспечивающих

изготовления обойдется в 10 раз дороже, а потери в эксплуатации возрастут в 100 раз (соотношение 1:10:100) [15, 55].

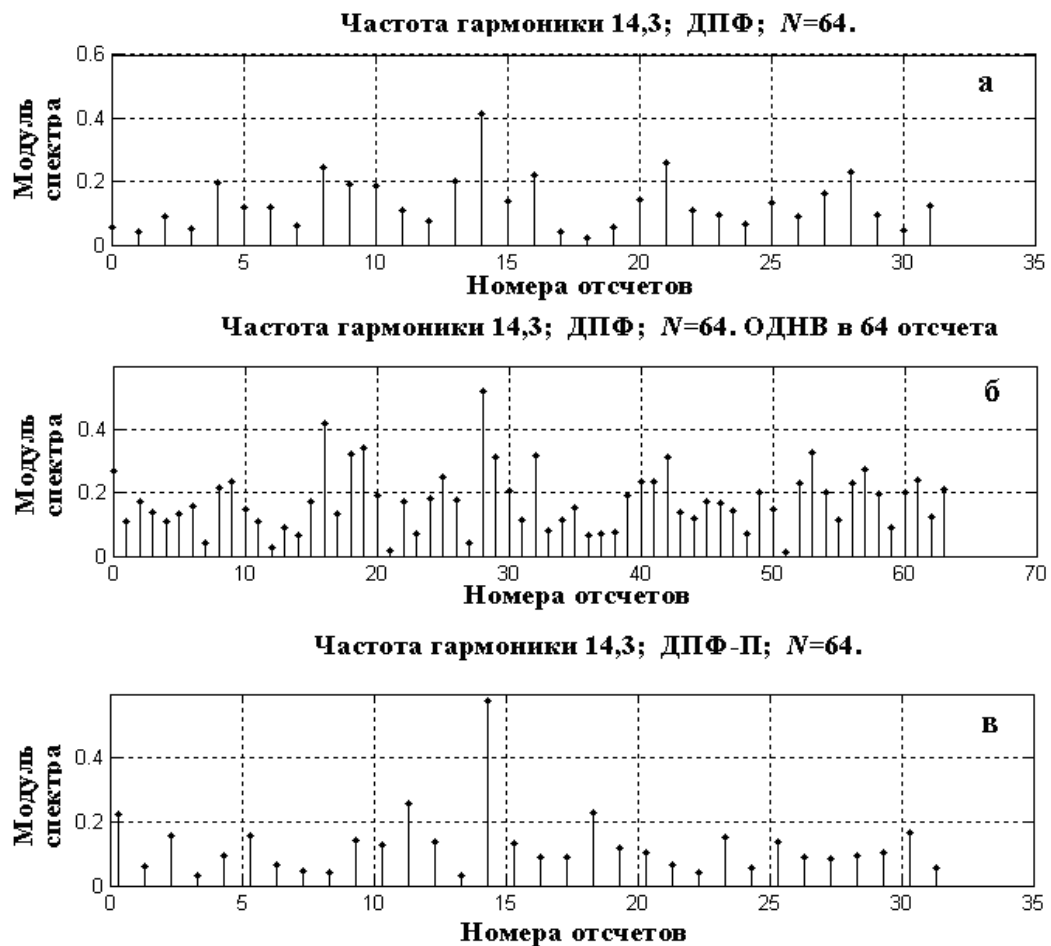
Таблица 6.1 – Обобщенное иерархическое функциональное морфологическо-информационное описание систем

УРОВЕНЬ		I	II	III	IV	
СИСТЕМА		СОВАС	СПР _и ПР	СРО	СПрИС	СПВ иВЦ
характеристика	Вход	$Y^{(\omega_j)}$	$\theta_{\omega_j}^{вст} \in \theta_{i, G_k}$	$(F_{i, X^{(\omega_j)}})$	$X^{(\omega_j)}$	$Y^{(\omega_j)}$
	Выход	L	L	$\theta_{\omega_j, \rho}^{вст} \in \theta_{i, G_k}$	$(F_{i, X^{(\omega_j)}})$	$X^{(\omega_j)}$
Операторы преобразования		$R^{СОВАС}$	$R^{СПРиПР}$	$R^{СРО}$	$R^{СПрИС}$	$R^{СПВиВЦ}$
Ограничения		$O^{СОВАС}$	$O^{СПРиПР}$	$O^{СРО}$	$O^{СПрИС}$	$O^{СПВиВЦ}$
ФУНКЦИИ		Обработка в/а сигнала	Принятие решений и постановка диагноза	Распознавание образов	Измерение функций в/а сигнала	Первичное преобразование в/а сигнала
		$R^{СОВАС} : \{ Y^{(\omega_j)} \times R^{СПВиВЦ} \times R^{СРО} \times T \times \rho \times H \times G_k \times R^{СПРиПР} \times J_\gamma \times O^{СОВАС} \} \Rightarrow L$	$R^{СПРиПР} : \{ \theta_{\omega_j}^{вст} \in \theta_{i, G_k} \times J_\gamma \times O^{СПРиПР} \Rightarrow L \}$	$R^{СРО} : \{ (T_{i, X^{(\omega_j)}}) \times R^{СФЭС} \times T \times R^{СФА} \times G_k \times R^{СРО} \times \rho \times H \times O^{СРО} \Rightarrow \theta_{\omega_j}^{вст} \in \theta_{i, G_k} \}$	$R^{СПрИС} : \{ X^{(\omega_j)} \times O^{СПрИС} \Rightarrow (F_{i, X^{(\omega_j)}}) \}$	$R^{СПВиВЦ} : \{ Y^{(\omega_j)} \times O^{СПВиВЦ} \Rightarrow X^{(\omega_j)} \}$
Показатели качества		$\{ \Phi_i^{СОВАС} \}$	$\{ \Phi_i^{СПРиПР} \}$	$\{ \Phi_i^{СРО} \}$	$\{ \Phi_i^{СПрИС} \}$	$\{ \Phi_i^{СПВиВЦ} \}$
Ограничения		$\{ O_i^{СОВАС} \}$	$\{ O_i^{СПРиПР} \}$	$\{ O_i^{СРО} \}$	$\{ O_i^{СПрИС} \}$	$\{ O_i^{СПВиВЦ} \}$
ЦЕЛИ		$\max_{ВЗ} P^{ДО}$	$\max_{G_k} \max_{\Gamma} \Delta G_k$	$\max_{\rho, H} \Delta G_k$	$\min_{С} C^{ПРИС}$	$\min_{С} C^{СПВиВЦ}$

- Внедрение виброакустического функционального диагностирования в производстве позволяет эффективно выявлять скрытые дефекты машин, механизмов и оборудования. При этом устранение дефектов носит **направленный характер** и не требует **полной разборки изделий** для поиска неисправностей, что значительно сокращает затраты средств, труда и времени.
- Методы и средства виброакустического функционального диагностирования объектов, находящихся в эксплуатации, позволяют перейти к так называемой «**эксплуатации по состоянию**». Известно, что за срок службы сложной технической системы расходы на ее эксплуатацию в 8–13 раз превышают начальную стоимость. Применяемая в настоящее время **практика планово-предупредительных ремонтов** исходит из усредненных данных о ресурсе того или иного объекта. В результате одни экземпляры объектов поступают в планово-предупредительный ремонт, **когда он еще не нужен**, а другие – когда он **уже не нужен**. При переходе к эксплуатации по состоянию каждый экземпляр объекта эксплуатируется по результатам виброакустического диагностирования **«до предельного состояния»**, а не исходя из усредненных показателей о ресурсе данного типа объектов.
- Особое место занимают методы и средства виброакустического функционального диагностирования при переходе **к безлюдной технологии**, например, на гибких автоматизированных производствах или опасных объектах.

Проиллюстрируем преимущества параметрических базисов Фурье перед базисом Фурье на модельном сигнале. Пусть задан гармонический сигнал с частотой $k = 14,3$ в шуме, значения которого распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1. Ставится задача измерения частоты квазидетерминированного сигнала (так называемая **задача локализации спектральных пиков** [46]). Нетрудно видеть,

что при использовании ДПФ (даже с применением ОДНВ) невозможно «совместить» сетку частот фильтров ДПФ с частотой гармонической компоненты, так как увеличение интервала анализа за счет дополнения исходного сигнала нулевыми отсчетами позволяет изменять интервал между отсчетами *лишь в кратное число раз*. В то же время, с помощью ДПФ-П задача локализации спектральных пиков решается вариацией параметра θ без каких-либо проблем (рисунок 6.2, а, б, в).



а – ДПФ; б – ДПФ + ОДНВ; в – ДПФ-П, $\theta = 0.3$.

Рисунок 6.2 – Измерение частоты гармонического сигнала методами

Приведем пример применения частотных моделей (Приложение №2) для оценки качества изготовления специальных токарных станков моделей 250 ИТП, 250 ИТВ, 250ИТВФ1. Повышенную вибрацию и шум в станках могут создавать различные узлы и механизмы, но основную долю вносят коробки передач. Их вибрации и шум связаны с погрешностями изготовления, сборки и монтажа,

наличие которых приводит также к появлению вредных динамических нагрузок, снижающих долговечность и точность станка в целом. Дефекты изготовления, сборки и монтажа приводят к появлению в спектре виброакустического сигнала отдельных дискретных составляющих (ДС) (и рядов ДС), параметры которых (амплитуды частоты, фазы) используются в СВФДО в качестве информативных диагностических признаков.

Например, погрешности профилей зубьев какого-либо колеса приводят к появлению ДС на частотах $f_{\dot{\gamma}} = \gamma \cdot n \cdot z / 60$; где γ – коэффициент, учитывающий прерывность процесса образования зубьев (для фрезерованных колес $\gamma = 6 \div 12$, для шлифованных колес $\gamma = 10 \div 20$); n – частота вращения вала, об/мин; z – число зубьев колеса. При циклических погрешностях, связанных с биением сопряженных колес, в спектре виброакустического сигнала появляются ДС на частотах $f_{\dot{A}_1} = (l_1 \cdot z_1 \pm l_2) \cdot n_1 / 60$ и $f_{\dot{A}_2} = (l_1 \cdot z_2 \pm l_2) \cdot n_2 / 60$; где n_1, n_2 – частоты вращения сопряженных колес, об/мин; z_1, z_2 – числа их зубьев; $l_1, l_2 = 1, 2, 3, \dots$. Дефекты сборки коробок передач проявляются при увеличении межосевого расстояния в росте интенсивности ДС на зубцовых частотах $f_z = n \cdot z / 60$, а при наличии эксцентриситета – в появлении ДС на частотах $f_{\dot{\gamma}_1} = (l_1 \cdot z_1 - l_2) \cdot n_1 / 60$ и $f_{\dot{\gamma}_2} = (l_1 \cdot z_2 - l_2) \cdot n_2 / 60$. Дефекты подшипников, применяемых в коробках передач, погрешности их монтажа также приводят к появлению ряда ДС на характерных частотах. На рисунке 6.3 приведена упрощенная кинематическая схема коробки передач указанных моделей металлорежущих станков при частоте вращения выходного шкива 630 об/мин., а в таблице 6.2 расчетные частоты ДС (где $f_1 \div f_4$ – частоты вращения валов; $f_{z,12} \div f_{z,34}$ – зубцовые частоты сопряженных пар; $f_{\dot{\gamma},1} \div f_{\dot{\gamma},3}$ – частоты проявления погрешностей профилей зубьев ведущих колес соответственно с $z = 27, 27, 31$ (см. рисунок 6.3)).

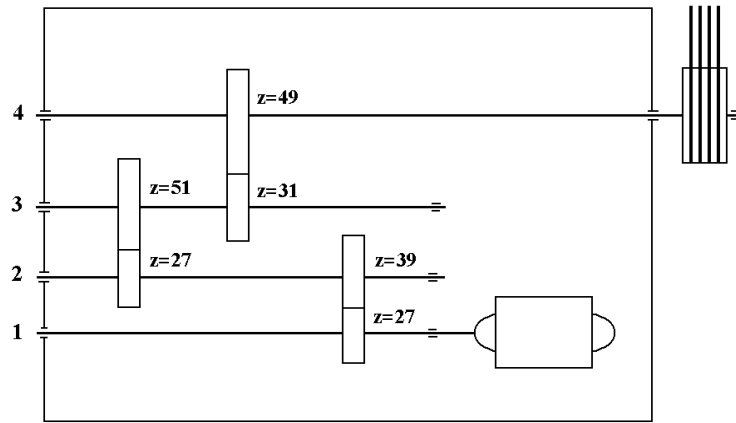


Рисунок 6.3 – Упрощенная кинематическая схема коробки передач металлорежущих станков специальных токарных станков моделей 250 ИТП, 250 ИТВ, 2 расчетные частоты ДС 50ИТВФ1 при $n = 630$ об/мин., $1 \div 4$ валы

Таблица 6.2 – Расчетные частоты дискретных составляющих

Частота	f_1	f_2	f_3	f_4	$f_{z,12}$	$f_{z,23}$	$f_{z,34}$	$f_{i,1}$	$f_{i,2}$	$f_{i,3}$
Гц	21,4 3	14,83	7,55	4,78	578,7	400,5	234	6944	4806	2809

На рисунке 6.4 приведен фрагмент энергетического спектра виброакустического сигнала, где четко виден ряд ДС около зубцовой частоты $f_{z,12}$.

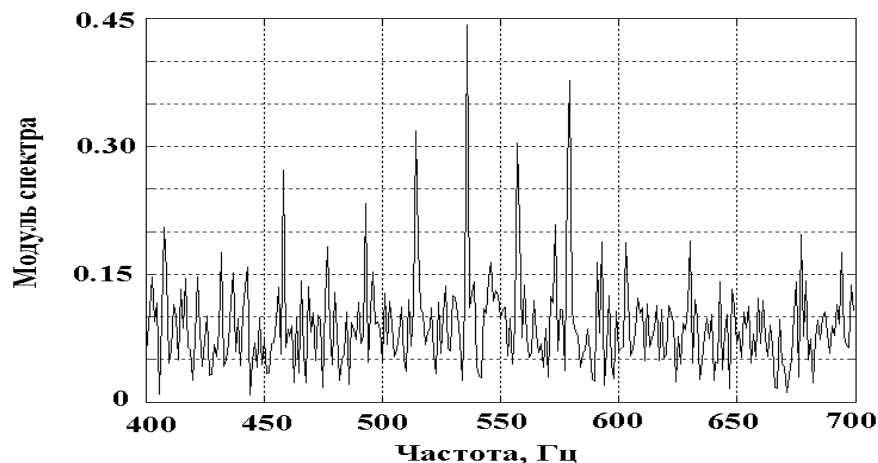
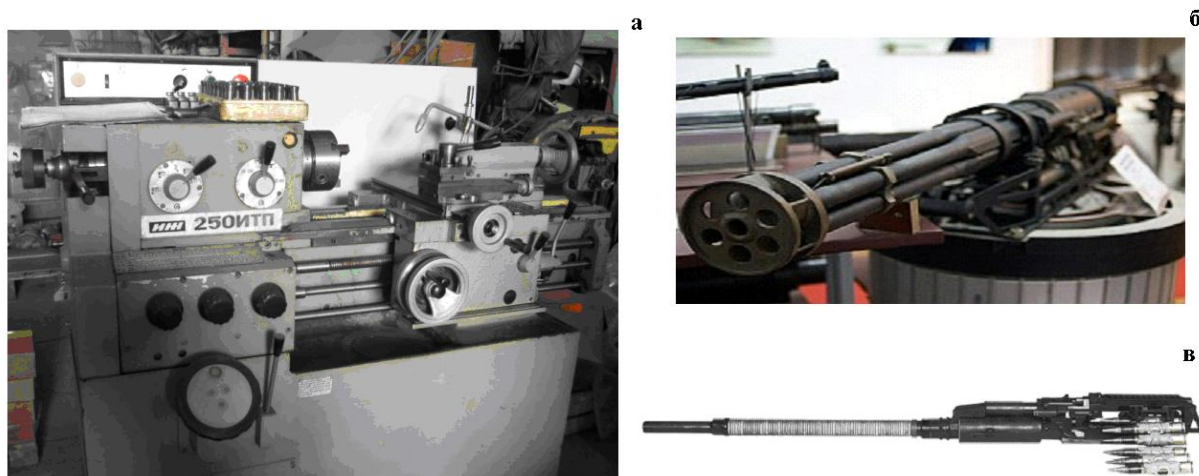


Рисунок 6.4 – Фрагмент энергетического спектра виброакустического сигнала. При этом наблюдается ряд ДС, как на частотах $f_{z,12} + l_2 \cdot f_1$, так и на частотах $f_{z,12} - l_2 \cdot f_1$. Однако первый ряд менее выражен, что говорит об эксцентриситете ведущего колеса с $z = 27$ на валу 1.

Актами (Приложение №3) о внедрении результатов выполненных НИР подтверждено, что методы и алгоритмы измерения и обработки параметров виброакустических информационных сигналов, предложенные автором в диссертационной работе, обладают целым рядом преимуществ по сравнению со стандартными методами, успешно реализованы в системах обработки виброакустических сигналов в составе систем виброакустической функциональной диагностики и обеспечили подтвержденное на практике повышение эффективности, надежности и качества диагностируемых объектов с *общим экономическим эффектом более 1 миллиона руб./год (в ценах 1985 года)*.

На рисунке 6.5 приведены некоторые объекты, порождаемые ИС которых обрабатывались СВФДО, выполненных в соответствии с договорами на НИР (Приложение 3).



а – токарно винторезный станок 250 ИТП; **б** – авиационная пушка 9А-768, предназначенная для вооружения самолетов МиГ-27, МиГ-31, Су-24, Су-24М. и выполненная по многоствольной схеме автоматики с вращающимся блоком стволов (6 стволов, 9000 выстрелов в минуту); **в** – авиационная пушка 9А-4071 К, предназначенная для вооружения МИГ-29, СУ-27 и других современных самолетов и выполненная по одноствольной схеме автоматики открытого типа (1500–1800 выстрелов в минуту).

Рисунок 6.5 – Объекты, порождаемые ИС которых обрабатывались СОВАС

Обзор современного состояния развития СВФДО в различных областях научных исследований выявил тенденцию формального переноса методов и алгоритмов обработки сигналов из одной предметной области в другую, без учета специфики информационных сигналов в конкретной предметной области, и – как следствие – снижение эффективности функционального диагностирования объектов [75].

Для решения указанной проблемы необходимо дальнейшее развитие теории цифровой обработки сигналов, проведение комплекса исследований по разработке и внедрению методов, алгоритмов анализа сигналов, ориентированных на применение в конкретных предметных областях и обладающих широкими функциональными возможностями на основе предложенной иерархической морфологическо-информационной модели функционального диагностирования объектов.

6.2. Реализация методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье в программно-инструментальной среде LabVIEW – информационной технологии виртуальных приборов

Разработка и реализация методов, алгоритмов и средств ЦОИС в целом является повторяющимся процессом, в рамках которого находится решение проблемы H (1.18):

$$H = \{Q, F, V\};$$

где $Q = \{Q_i\}$ – множество целей, достижение которых разрешает проблему

H . Определяется требованиями к средству ЦОИС, которые, в свою очередь, определяются СВФДО исходя из повышения эффективности, надежности и качества диагностируемой исследуемой (диагностируемой) технической системы;

$F = \{F_j\}$ – множество свойств проблемы. Предполагает описание как свойств средства ЦОИС, так и описание его взаимодействия с суперсистемой и (или) средой, в состав которой оно входит;

$V = \{V_k\}$ – множество гипотез (альтернатив) разрешения проблемы H (множество операторов, с помощью которых достигается разрешение проблемы H).

При этом, с одной стороны, время и выделяемые средства на разработку того или иного средства ЦОИС сокращаются, с другой стороны, постоянно растут требования к научно-техническим, технико-экономическим характеристикам разрабатываемого средства ЦОИС.

И все это происходит на фоне постоянного усложнения методов и алгоритмов, которые должно реализовывать разрабатываемое средство ЦОИС. Последнее связано тем, что зачастую эффекты 3–4 порядка малости [30] играют ключевую роль в повышении эффективности производства современных изделий.

В то же время инженеры-разработчики методов, алгоритмов и средств ЦОИС в своей практической деятельности широко используют персональные компьютеры (ПК), как при определении структуры и метода и алгоритма функционирования проектируемого средства ЦОИС, так и при его моделировании, макетировании, настройке и регулировке.

Отметим, что до недавнего времени при решении указанных задач инженер был вынужден прибегать к помощи профессиональных программистов, которые, как правило, не являлись специалистами в конкретной предметной области применения средства ЦОИС. В результате резко возросло время разработок и, главное, снижалось их качество.

Положение изменилось с появлением *новой информационной технологии – технологии виртуальных приборов*, разрабатываемых в программно-инструментальной среде LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench).

Отметим, что термин виртуальный прибор (*ВП, англ. VI – Virtual Instruments*) не вполне удачен, так как может вводить в заблуждение. Средства

обработки ИС, разработанные по данной технологии, не являются виртуальными в истинном понимании этого слова и имеют дело с реальными ИС. Появление термина «*виртуальный*» в названии средства ЦОИС объясняется технологией *виртуальной имитации функций ЦОИС математическими и программными методами*.

Среда LabVIEW является открытой средой графического программирования, которая *де-факто* стала стандартом в области разработки средств ЦОИС для решения задач в различных приложениях. Программно-инструментальная среда LabVIEW позволяет [32, 33]:

- встраивать ранее созданные программы на текстовых языках высокого уровня;
- работать с библиотеками DLL;
- является сервером/контейнером ActiveX;
- поддерживает все стандартные протоколы обмена данными между приложениями;
- имеет открытую сетевую структуру;
- поддерживает работу различных операционных систем (Windows, Mac, Linux, Real-Time).

Программно-инструментальная среда LabVIEW позволяет создавать и отрабатывать и системы ЦОИС практически любой сложности, уменьшив затраты и время на их разработку, повысив их качество. Таким образом, LabVIEW предоставляет возможность создания на базе ПК комплексов цифровой обработки измерительной информации с заданными метрологическими характеристиками, реализующего функции множества средств цифровой обработки ИС.

Отметим два основных отличия LabVIEW от других языков программирования¹⁸. Во-первых, LabVIEW реализует концепцию графического программирования G, поэтому исходный код представляет собой блок-диаграмму (соединенные друг с другом пиктограммы элементов языка), которая затем

¹⁸ <http://www.labview.ru>

компилируется в машинный код. Во-вторых, отличительной особенностью LabVIEW является поддержка выполнения кода, написанного на языке G, в режиме потока данных (потокое программирование), в то время как традиционные текстовые языки (например, MATLAB, C и C++) обеспечивают выполнение кода в виде последовательности команд.

Графический язык и концепция потокового программирования LabVIEW (принцип написания кода LabVIEW – Data Flow) позволяет решать задачи более удобными и эффективными методами, чем традиционные текстовые языки. Ключевые особенности программирования на языке G, а именно, интуитивно понятный и наглядный графический код, а также управляемое потоком данных выполнение программы, позволяют сделать процесс программирования более близким к процессам мышления, чем другие языки. Несмотря на высокий уровень абстракции кода, производительность программ, написанных в среде LabVIEW, остается сопоставимой с языками типа C, благодаря встроенному компилятору кода.

В данном диссертационном исследовании, исходя из числа аналоговых каналов, максимальной частоты выборки, разрешения и диапазонов входных сигналов и размеров, в качестве устройства сбора данных результатов измерений были выбраны два *USB-устройства сбора данных компании National Instruments: NI USB – 6008 и NI USB – 6009.*

Данные устройства сбора данных объединяют в себе все основные функции, необходимые для работы в приложениях сбора и сохранения данных, проведения мобильных измерений, а также для использования в лабораторных исследованиях и учебных целях. Отметим также, что новые технологии, такие как запатентованные *NI Signal Streaming*, дают возможность поддерживать высокоскоростной и разнонаправленный поток данных через USB для достижения максимальной производительности внешних приборов сбора данных.

Другой показатель качества работы устройства сбора данных – это точность измерений. Несмотря на то, что каждый DAQ-модуль компании National Instruments калиброван, *точность измерений, осуществляемых модулями*

компании National Instruments, до сих пор находится в зависимости от показателей времени и температуры. В связи с этим отметим, что такие технологии, как NI-MCal, дают возможность повысить точность прибора за счет использования самокалибровки ПО для распознавания природы ошибки и ее исправления. Устройства сбора данных NI USB – 6008 и NI USB – 6009 присоединяются к компьютеру посредством интерфейса full-speed USB и содержат восемь каналов ввода аналоговых сигналов (AI), 2 канала генерации аналоговых сигналов (AO), 12 каналов цифрового ввода/вывода (DIO) и 32-разрядный счетчик.

В диссертационном исследовании для ввода аналоговых сигналов была рассмотрена также *задача использования в качестве устройства ввода/вывода звуковой карты персонального компьютера.*

Современные звуковые карты, как правило, позволяют реализовывать режим *«full duplex»*, аппаратная и программная поддержка которого обеспечивается их производителем. Данный режим позволяет независимо и одновременно одним приложениям считывать данные с аналого-цифрового преобразователя (АЦП), другим приложениям – осуществлять запись данных в цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП).

Таким образом, путем создания двух независимых виртуальных приборов в программно-инструментальной среде LabVIEW, мы, имея возможность их одновременного запуска, можем создать процессорные измерительные средства прямых и косвенных измерений различного назначения на базе ПК.

Как показала практика создания на базе ПК процессорных средств обработки ИС, для выбора звуковых карт необходим их анализ по следующим основным характеристикам:

- частота дискретизации (оцифровки) аналогового сигнала;
- разрядность и динамический диапазон;
- отношение сигнал/шум (SNR – Signal to Noise Ratio);
- коэффициент нелинейных искажений.

Современные звуковые карты могут поддерживать частоты дискретизации от 8 кГц до 192 кГц, что, согласно теореме Котельникова, соответствует частотному диапазону входных аналоговых сигналов от 4 кГц до 96 кГц (обычно нужно делать запас по частоте дискретизации в 4-8 раз). Разрядность АЦП и ЦАП современных звуковых карт также колеблется от 8 до 24 разрядов, что соответствует числу уровней оцифровки входного аналогового сигнала от 256 уровней до 167777216 уровней. Соответствующий динамический диапазон изменяется от 48 дБ до 144 дБ.

Шум в звуковой плате возникает вследствие разных причин, основная из которых – ошибка дискретизации (шум дискретизации). Шум дискретизации есть всегда и составляет не менее половины младшего разряда. Например, для 16-разрядной звуковой платы отношение сигнал/шум (SNR) не может быть лучше, чем 93 дБ.

И наконец, коэффициент нелинейных искажений (Total Harmonic Distortion, THD), измеряемый в процентах, характеризует нелинейные искажения восстанавливаемого цифрового сигнала через ЦАП. Если коэффициент нелинейных искажений (THD) равен 1% – то это *«грязное звучание»*, 0.1 % – «нормальное звучание», 0.01 % – *«чистое звучание класса Hi – Fi»*, 0.002 % – *«звучание класса Hi – Fi End»*.

Основные интерфейсы для подключения звуковых карт это: PCI, PCIe и USB. Отметим, что функции записи и воспроизведения, реализованные в программно-инструментальной среде LabVIEW, позволяют считывать (вводить) ИС со входа звуковой карты в массив данных и записывать (выводить) ИС из массива данных на выход звуковой карты, записывать данные в звуковой файл с расширением «.wav» или считывать такой файл, а также воспроизводить звуковой файл с расширением «.wav» на выходе звуковой карты.

Во второй главе диссертации (раздел 2.2), исходя из того, что дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) некоторой последовательности

$y(n)$, $n = \overline{-\infty, +\infty}$ задает ее **непрерывный спектр**, а ДВПФ определяется как z-преобразование последовательности $y(n)$, $n = \overline{-\infty, +\infty}$ на единичной окружности:

$$S_y(f) = S_y(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2,$$

сделан вывод о том, что коэффициенты ДПФ $S_N(k)$ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad \text{где } W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N}), k = \overline{0, (N-1)}$$

равны значениям ДВПФ взвешенной последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$

(взвешенное ДВПФ) в точках $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ на единичной окружности:

$$\begin{aligned} S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp(j \frac{2\pi}{N} k)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp(-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n). \end{aligned}$$

Таким образом, ДПФ позволяет измерять в дискретном множестве точек $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ непрерывный спектр, задаваемый взвешенным ДВПФ (рисунок 1.4).

Однако при необходимости измерения непрерывного спектра, задаваемого взвешенным ДВПФ, на множестве частот, отличном от множества частот, определяемого соотношением $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$, сталкиваемся с проблемой осуществления данных измерений. Дело в том, что ДПФ не дает ответа на вопрос: каковы значения спектра, определяемого ДВПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, между значениями относительных частот $\frac{2\pi}{N}k$, $k = \overline{0, N-1}$ на единичной окружности («**эффект частотола**»). В разделе 2.2 для решения указанной выше проблемы было предложено и исследовано параметрическое ДПФ, которое определяется следующими соотношениями:

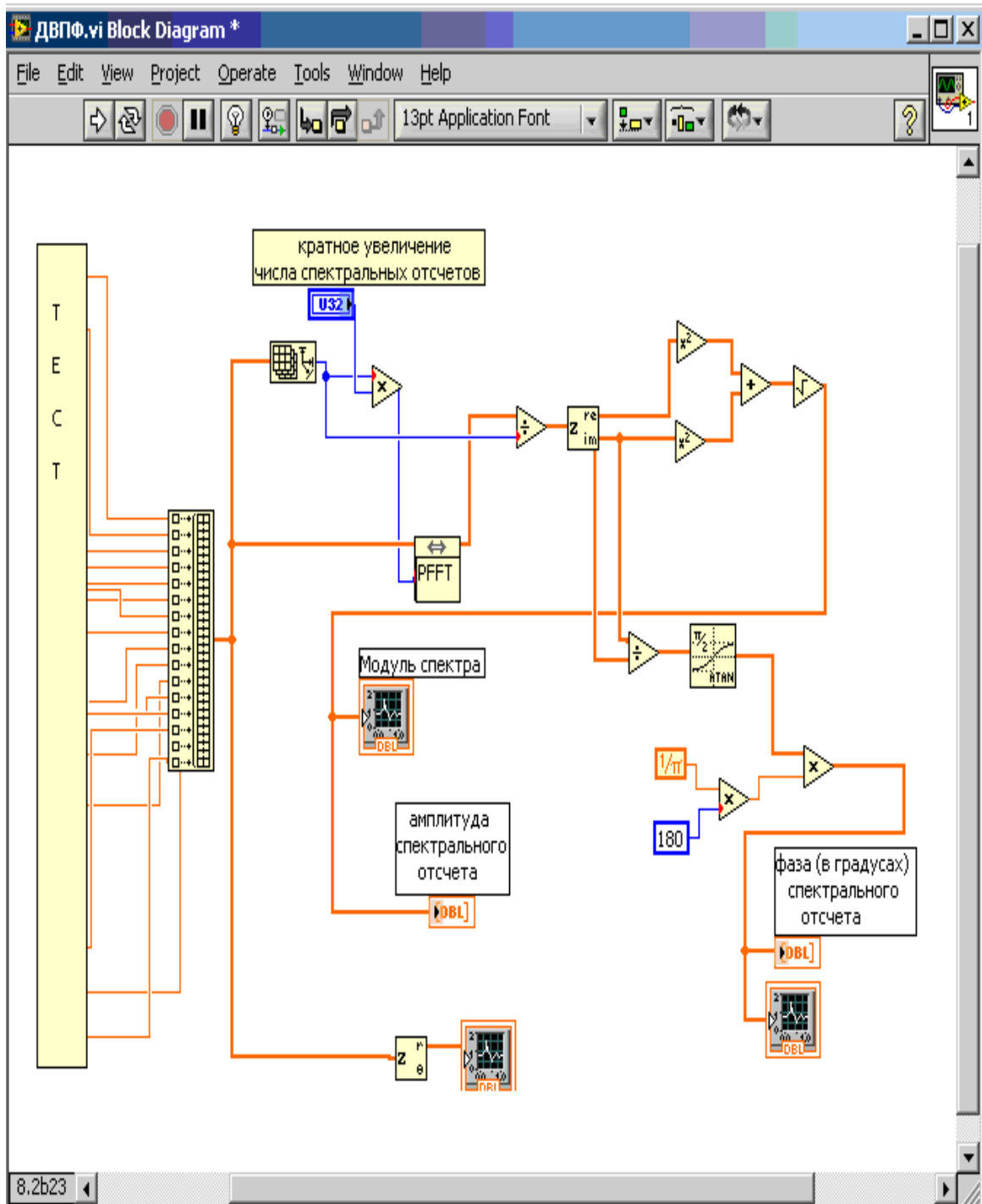
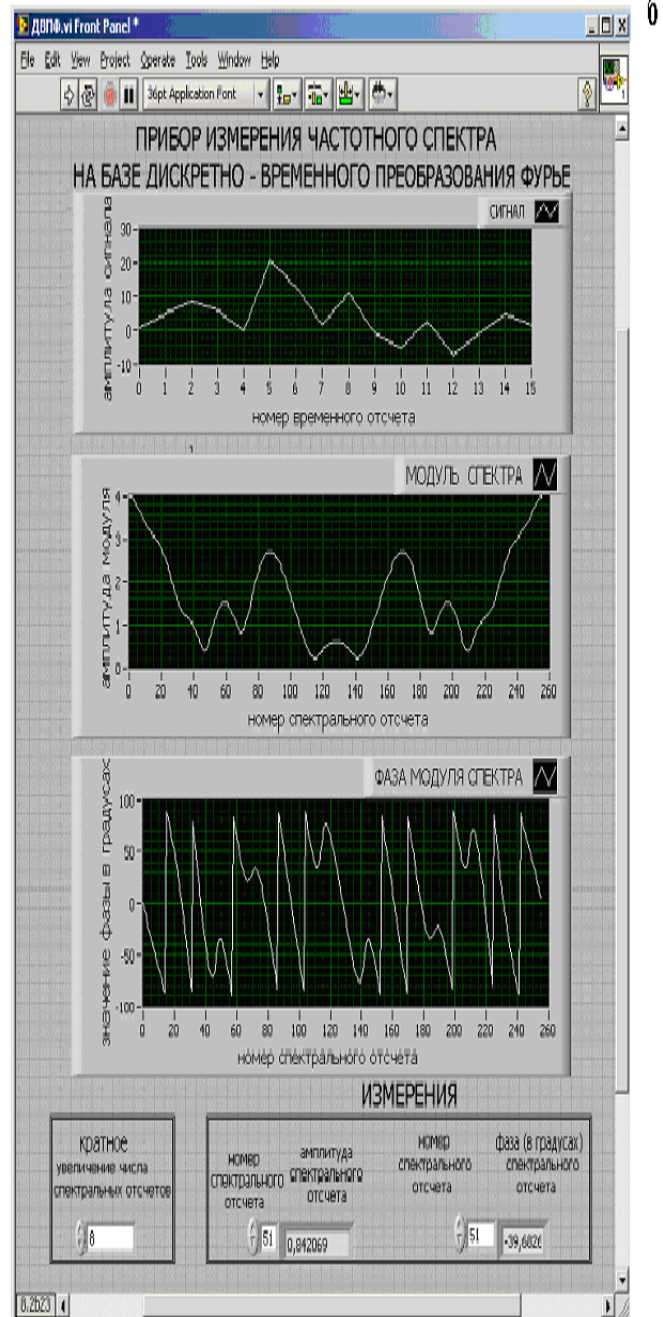
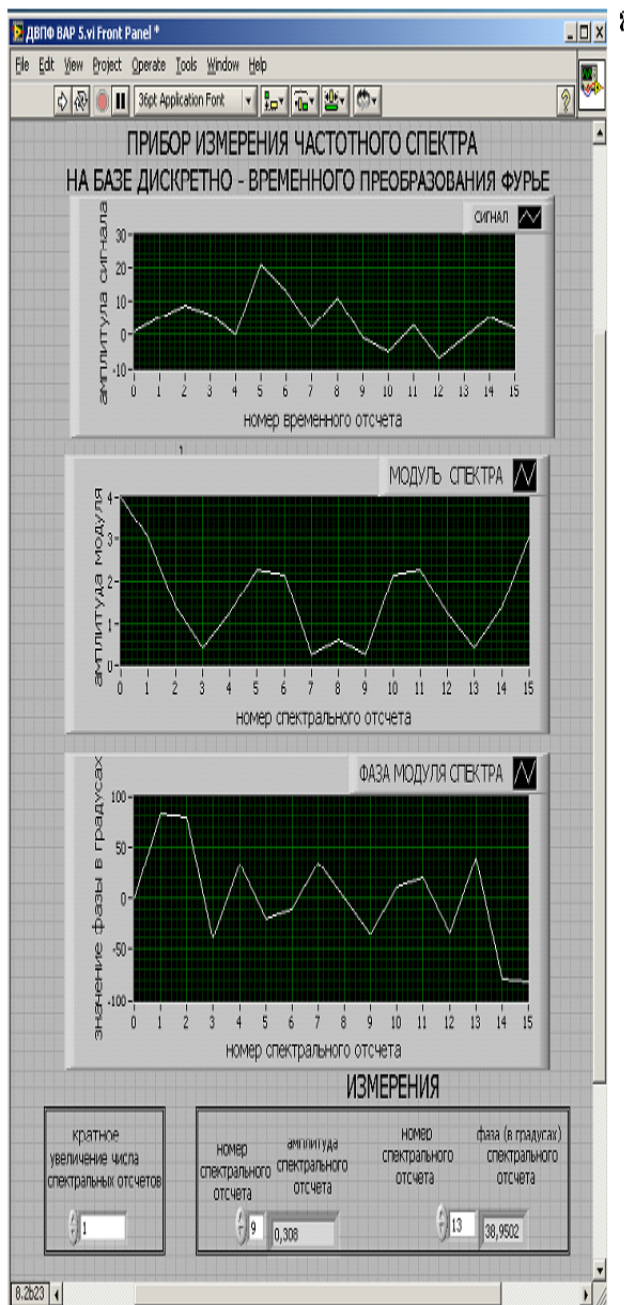


Рисунок 6.6 – Блок-диаграмма виртуального прибора измерения частотного спектра, на базе взвешенного ДВПФ



а: без увеличения числа спектральных отсчетов; б: число увеличения числа спектральных отсчетов равно 8

Рисунок 6.7 – Виртуальный прибор измерения частотного спектра на базе взвешенного ДВПФ

Во второй главе (раздел 2.1) для измерения на конечных интервалах временных спектров детерминированных дискретных сигналов автор ввел в теорию дискретных измерений новую форму преобразования Фурье – *дискретно-*

частотное преобразование Фурье (ДЧПФ). Там же показано, что исходный дискретный измерительный сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ равен значениям непрерывного временного спектра, задаваемого ДЧПФ **взвешенной последовательности** $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ при значениях переменной $n = \overline{0, N-1}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t), 0 \leq t \leq 1.$$

Таким образом, исходный дискретный измерительный сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, является, как уже отмечалось в первой главе настоящей работы, только одним из возможных временных спектров дискретного измерительного сигнала $x(n)$. Отсутствие же ответа на вопрос, каковы значения временного спектра, определяемого ДЧПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ между значениями переменной $n = \overline{0, N-1}$, порождает эффект, названный автором **«эффектом частотола во временной области»**.

В разделе 2.3 работы на основе анализа структуры обратного ДПФ для измерения дискретного временного спектра сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ при значениях переменной n , отличных от множества $\{n = \overline{0, N-1}\}$, предложено модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье (МДПФ-П) (для борьбы с эффектом частотола во временной области), которое определяется в алгебраической форме следующим выражением:

$$x(n, \xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-k(n+\xi)}; \quad k = \overline{0, N-1},$$

где $S_N(k)$ – ДПФ сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$.

Данный подход к измерению временного спектра был реализован в виде виртуального прибора в программно-инструментальной среде LabVIEW. На рисунке 6.8 приведена блок-диаграмма виртуального прибора измерения временного спектра на базе взвешенного ДЧПФ, а на рисунке 6.9 – его лицевая панель.

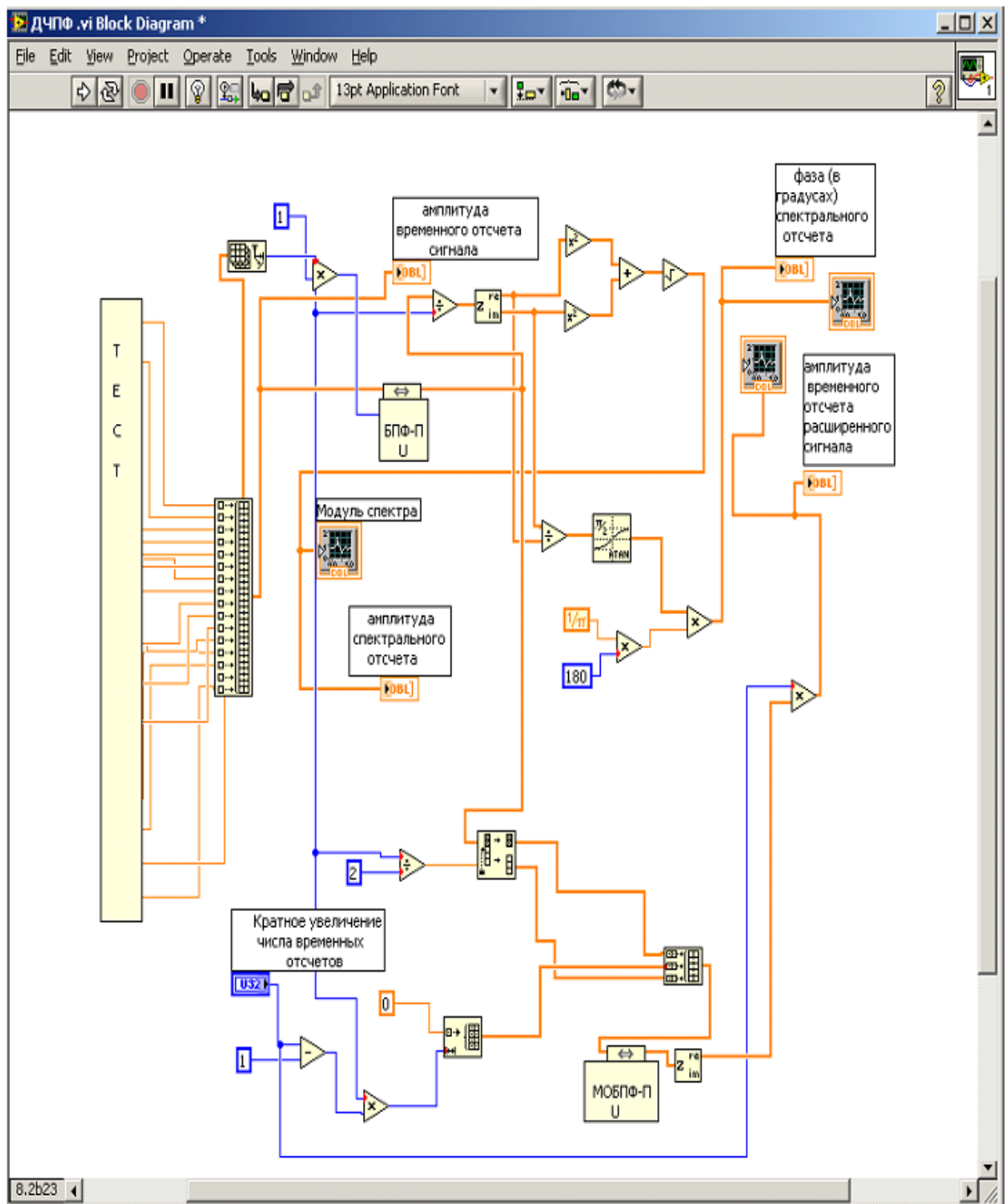
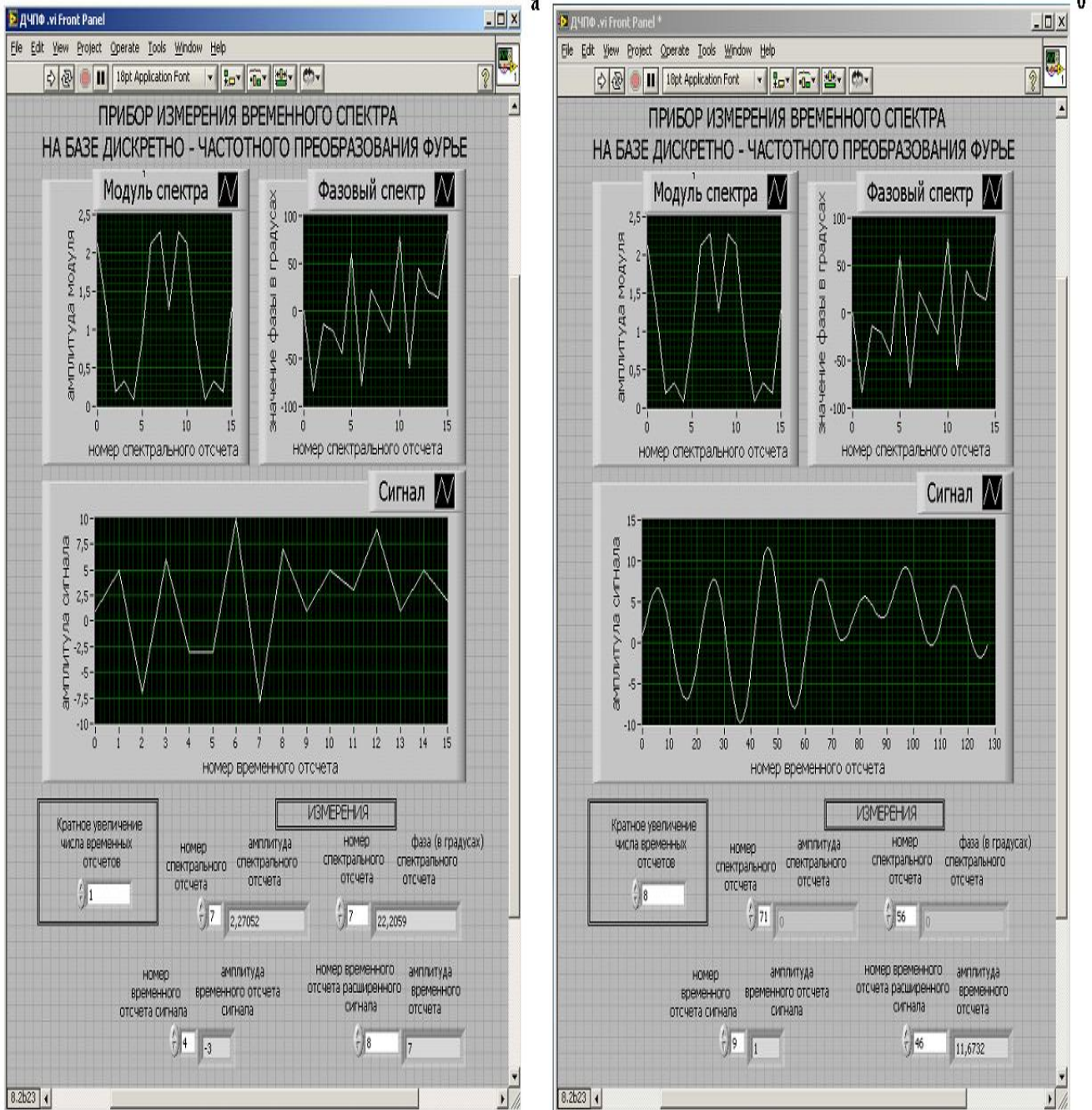


Рисунок 6.8 – Блок-диаграмма виртуального прибора измерения временного спектра на базе взвешенного ДЧПФ



а: без увеличения числа временных отсчетов; **б:** число увеличения числа временных отсчетов равно 8

Рисунок 6.9 – Лицевая панель виртуального измерительного прибора измерения временного спектра на базе взвешенного ДВПФ

В виртуальном приборе измерения временного спектра на базе взвешенного ДЧПФ реализовано в виде подприбора быстрое модифицированное параметрическое преобразование Фурье и их объединение (на блок-диаграмме –

подприбор МОБПФ-П). На рисунке 6.9 проиллюстрировано изменение временного спектра при увеличении числа временных отсчетов в восемь раз.

Прибор имеет 3 монитора: вывод модуля спектра, вывод фазы модуля спектра, вывод исходного сигнала. Предусмотрена возможность кратного увеличения числа временных отсчетов, измерения амплитуды спектральных отсчетов, их фазы, а также амплитуд расширенного временного сигнала. В ВП измерения временного спектра, на базе взвешенного ДЧПФ реализовано в виде виртуального подприбора быстрое модифицированное параметрическое преобразование Фурье.

На основе теоретических основ дискретных косвенных методов измерения мгновенных параметров электрических сигналов, разработанных автором и изложенных в 4 главе диссертации, был реализован в программно-инструментальной среде LabVIEW виртуальный прибор измерения огибающих (стандартной и модифицированной).

Дискретно-частотным преобразованием Фурье и модифицированным параметрическим дискретным преобразованием Фурье определен аппарат модификации в частотной области дискретного преобразования Гильберта, которая позволяет находить значения огибающей между значениями, измеряемыми с помощью дискретного преобразования Гильберта.

На рисунке 6.10 приведена блок-диаграмма данного виртуального прибора, а на рисунке 6.11 – его лицевая панель.

ВП измерения стандартной и модифицированной огибающих имеет 2 монитора: вывод исходного сигнала; вывод на один график стандартной и модифицированной огибающих. Предусмотрено измерение амплитуд отсчетов: входного сигнала; стандартной огибающей, модифицированной огибающей.

В виртуальном приборе измерения стандартной и модифицированной огибающих быстрое параметрическое преобразование Фурье и модифицированное параметрическое преобразование Фурье реализованы в виде виртуальных подприборов (на блок-диаграмме – подприборы ДПФ-П и МДПФ-П).

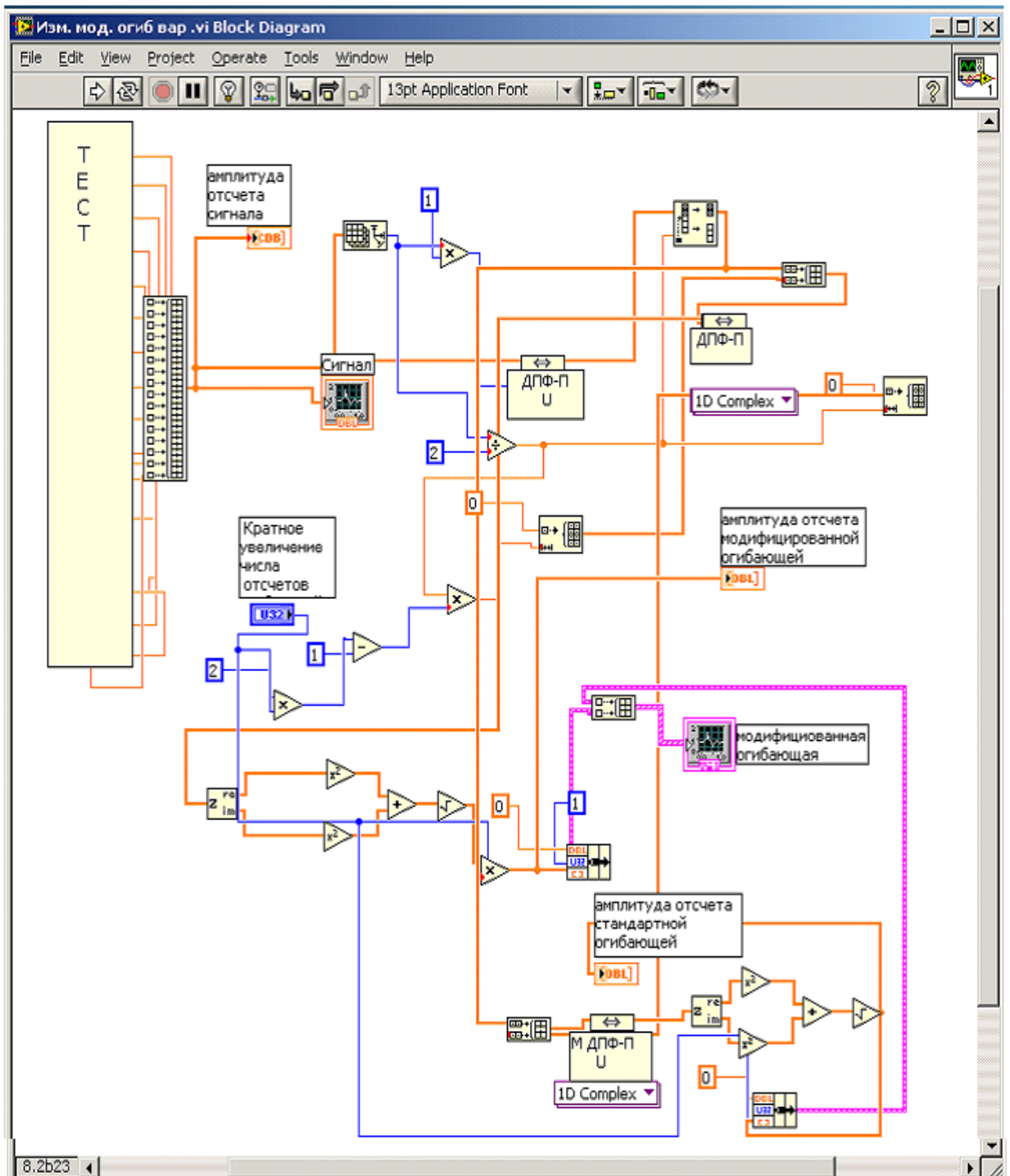
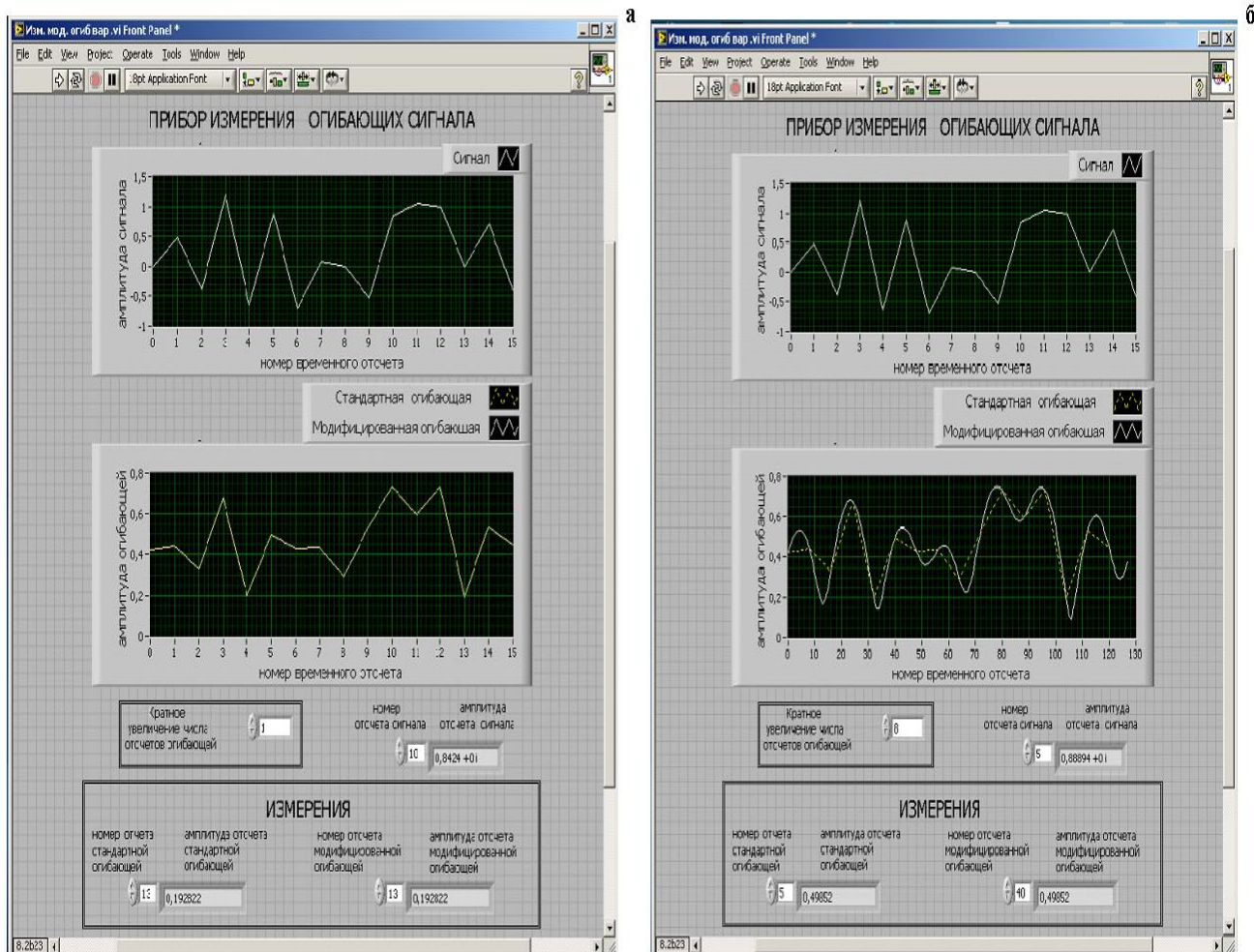


Рисунок 6.10 – Блок диаграмма виртуального измерительного прибора измерения мгновенной амплитуды сигнала, на базе дискретного преобразования Гильберта (стандартная огибающая) и обобщенного дискретного преобразования Гильберта (модифицированная огибающая)



(модифицированная огибающая – **а**; без увеличения числа отсчетов огибающей – **б**; число увеличения числа отсчетов огибающей равно 8

Рисунок 6.11 – Лицевая панель измерительного прибора измерения мгновенной амплитуды сигнала на базе дискретного преобразования Гильберта (стандартная огибающая) и обобщенного дискретного преобразования Гильберта

В рамках выполнения научно-исследовательской работы *«Совершенствование Информационно-управляющей системы комплексной безопасности ОАО «Чепецкий механический завод» (ИУСКБ)»*

указанные ВП были использованы при совершенствовании ИУСКБ)», ОАО «Чепецкий механический завод» (г. Глазов, Удмуртская Республика) в части математического и алгоритмического обеспечения для исследования информационных сигналов с датчиков.

В техническом задании¹⁹ (ТЗ) на совершенствование «Информационно-управляющей системы комплексной безопасности ОАО Чепецкий механический завод» предусмотрено, что функциональная структура ИУСКБ должна *рассматриваться и реализовываться в концепции обеспечения безопасности по трем функциональным «барьерам» безопасности* (рисунок 6.12):

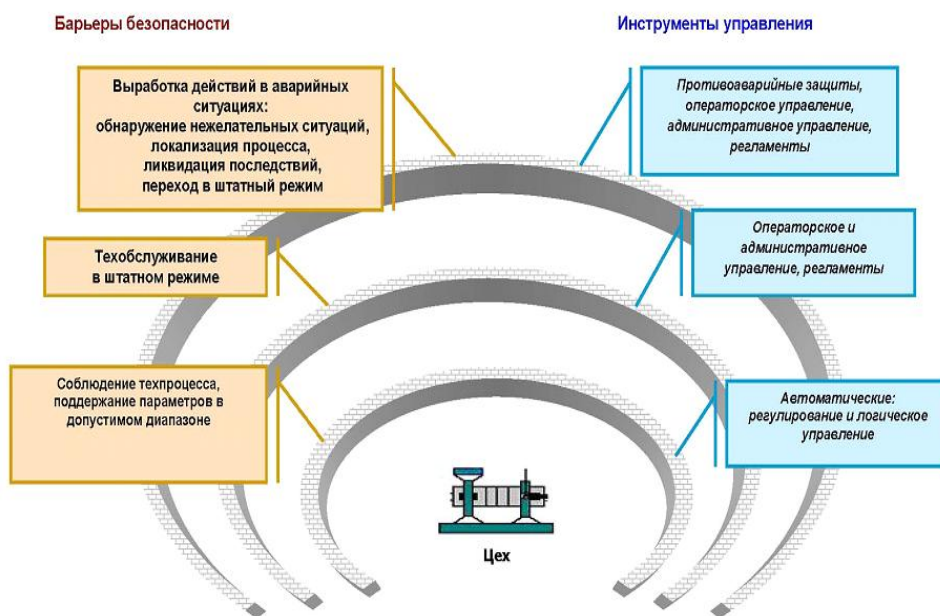


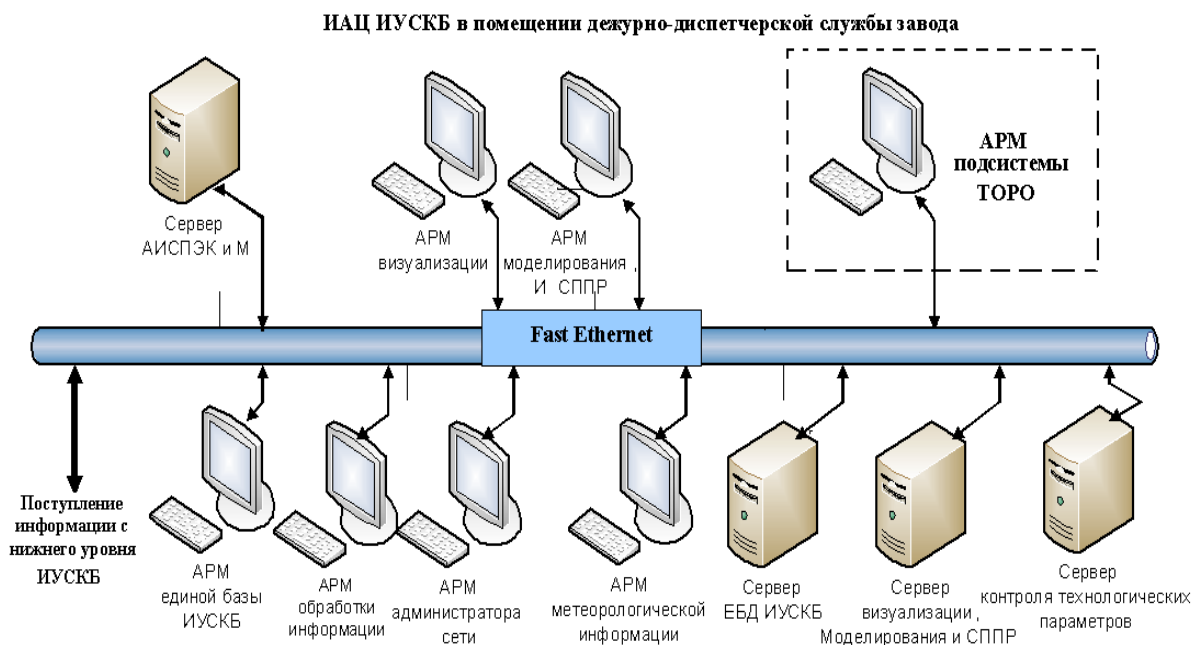
Рисунок 6.12 – Барьеры обеспечения безопасности опасного объекта

- *первым барьером* является выполнение соблюдения хода технологических процессов (ТП) и поддержание их параметров в допустимом диапазоне. Гарантацией выполнения этого является исключение риска человеческих ошибок при управлении и надежность средств АСУ ТП;
- *вторым барьером* является обеспечение исправности оборудования, что достигается соблюдением норм эксплуатации и регулярным контролем состояния;

¹⁹ Договор № 6/АС-09 ЧМЗ от 21 октября 2009 г. «Разработка технического задания на совершенствование «Информационно-управляющей системы комплексной безопасности (ИУСКБ) ОАО Чепецкий механический завод».

➤ *третьим барьером* обеспечения безопасности является выполнение действий в аварийных ситуациях для *нежелательных событий* (НС). Эти меры включают: обнаружение НС, локализацию процесса, ликвидацию последствий, переход в штатный режим. Основным инструментом обнаружения и локализации являются *система противоаварийной автоматической защиты (ПАЗ)* и операторское управление. Ликвидация последствия – это, как правило, административное управление персоналом, производящим ремонт и дезактивацию в соответствии с регламентом и должностными инструкциями.

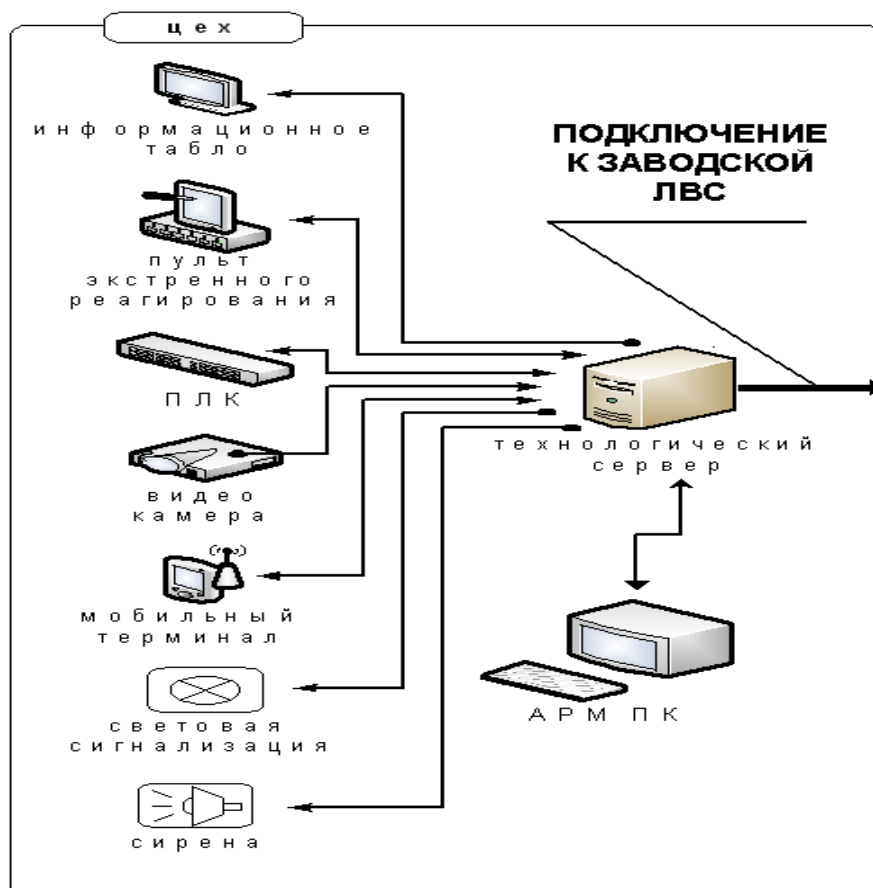
Таким образом, согласно ТЗ, вторым барьером является обеспечение исправности оборудования, что достигается *соблюдением норм эксплуатации, проведением планового техобслуживания и регулярным контролем состояния*. Это обстоятельство отражено и в уровнях технических средств ИУСКБ (рисунок 6.13 и рисунок 6.14).



ЕБД – единая база данных; СППР – система поддержки принятия решений при возникновении чрезвычайных ситуаций; АИСПЭК и М – автоматическая информационная система производственного

контроля и мониторинга; ТОРО – техническое обслуживание и ремонт оборудования (выделено пунктиром).

Рисунок 6.13 – Состав технических средств верхнего уровня ИУСКБ



ПЛК – программируемые логические контроллеры, предназначенные для сбора данных от различных датчиков и приборов, предоставления данных в верхний уровень управления, и для управления индикаторами, сиренами, исполнительными механизмами (вентиляторы и пр.); АРМ ПК – персональные компьютеры, для визуализации, мониторинга и анализа ситуации технологических участков.

Рисунок 6.14 – Состав технических средств нижнего уровня ИУСКБ

В акте (Приложение №3) о результатах исследовательской работы в рамках выполнения НИР *«Совершенствование Информационно-управляющей системы комплексной безопасности ОАО «Чепецкий механический завод» (ИУСКБ)»* подтверждено, что методы и алгоритмы измерения и обработки

параметров виброакустических информационных сигналов, предложенные автором в диссертационной работе, обладают целым рядом преимуществ по сравнению со стандартными методами, успешно реализованы в системе ИУСКБ и обеспечили подтвержденное на практике повышение ее эффективности.

6.3. Сравнительный анализ методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье

В предыдущих главах диссертационной работы было показано, что введенный автором *параметрический дискретный базис Фурье* при значении параметра $\theta = 0$ является *классическим дискретным базисом Фурье*, который представляет собой *полную ортогональную систему дискретных экспоненциальных функций* – ДЭФ, разложение по которой называется *дискретным преобразованием Фурье* – ДПФ.

Параметрический дискретный базис Фурье при значениях параметра $\theta \neq 0$ (параметр θ может принимать любые действительные значения в интервале $0 \leq \theta < 1$) при *каждом конкретном значении параметра θ* представляет собой *полную ортогональную систему параметрических дискретных экспоненциальных функций* – ДЭФ-П, разложение по которой представляет собой, введенное автором, *параметрическое дискретное преобразование Фурье* – ДПФ-П при значении параметра θ .

Другими словами, в диссертационном исследовании введено *множество параметрических дискретных базисов Фурье, мощность которого определяется мощностью множества значений параметра θ* .

В работе [15] предложена структурно-следственная блок-схема диагностирования зубчатого зацепления (рисунок 6.15), которая позволяет выбрать диагностические признаки, определить методы и алгоритмы обработки виброакустического сигнала. В качестве примера в [15] рассмотрены следующие

наиболее часто проявляющиеся дефекты редуктора: износ, питтинг²⁰, излом зуба, задир (заедание) (II уровень структурно-следственной блок-схемы).

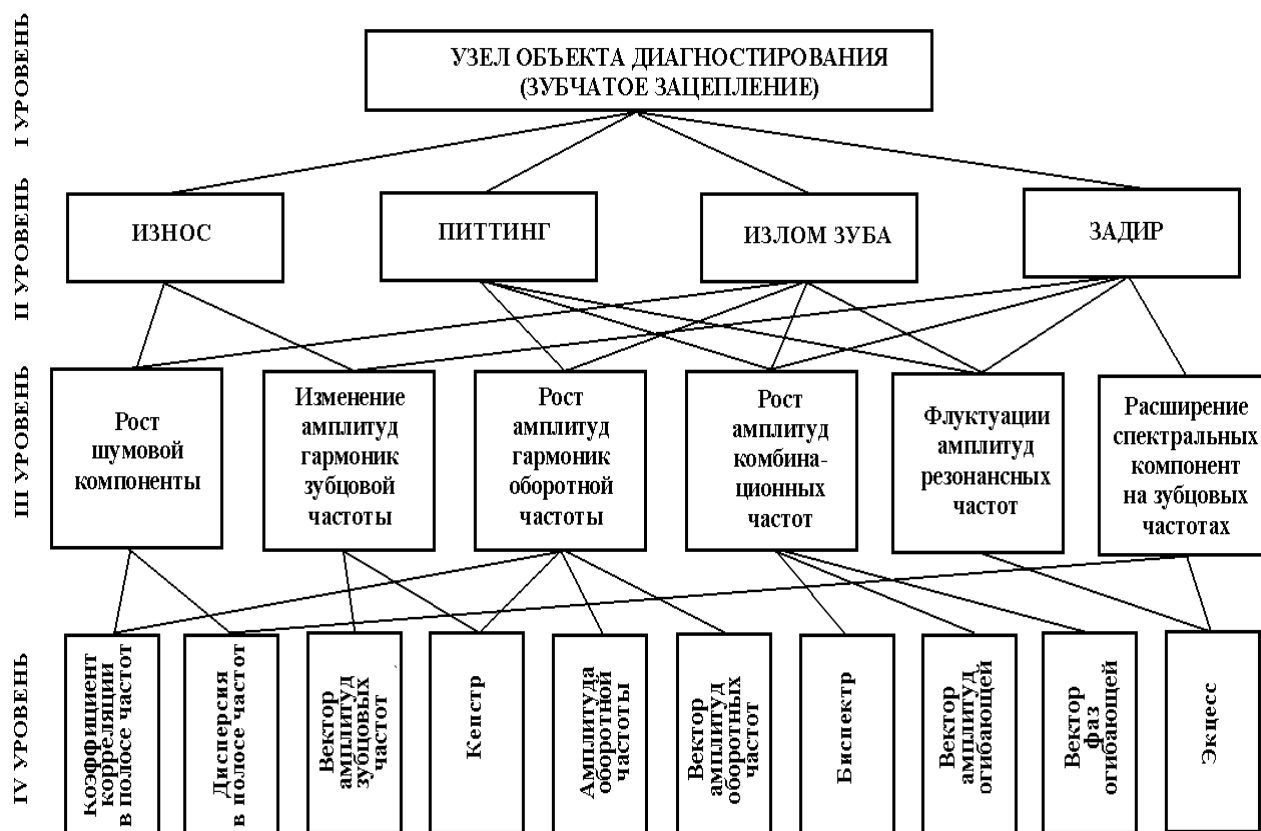


Рисунок 6.15 – Структурно-следственная блок-схема диагностирования зубчатого зацепления

На III уровне структурно-следственной блок-схемы рассматриваются характерные изменения спектральных характеристик виброакустического сигнала, связанные с тем или иным дефектом. На IV уровне структурно-следственной блок-схемы рассматриваются методы, позволяющие выделять диагностические признаки для каждого дефекта.

На рисунке 6.16, исходя из собственного опыта и результатов научных исследований других авторов [150], автором предложена структурно-следственная блок-схема неинвазивной диагностики сердечно-сосудистой системы человека, которая позволяет выбрать диагностические признаки,

²⁰ Питтинговая коррозия (англ. **pitting**, от англ. **pit** — покрывать(ся) ямками) — коррозия металлов, ведущая к образованию питтингов, то есть язв, полостей в металле, начинающихся с его поверхности.

определить методы и алгоритмы обработки биомедицинских сигналов (фонокардиограммы (ФКГ), электрокардиограммы (ЭКГ)).

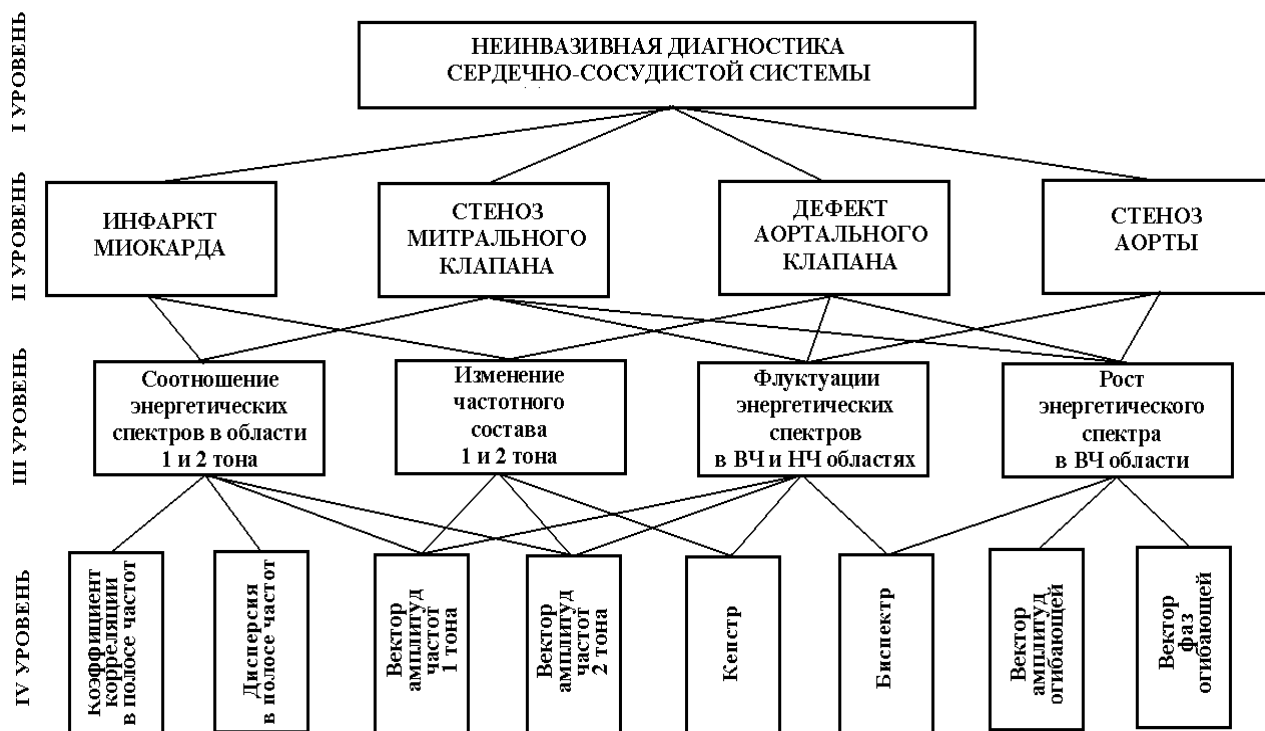
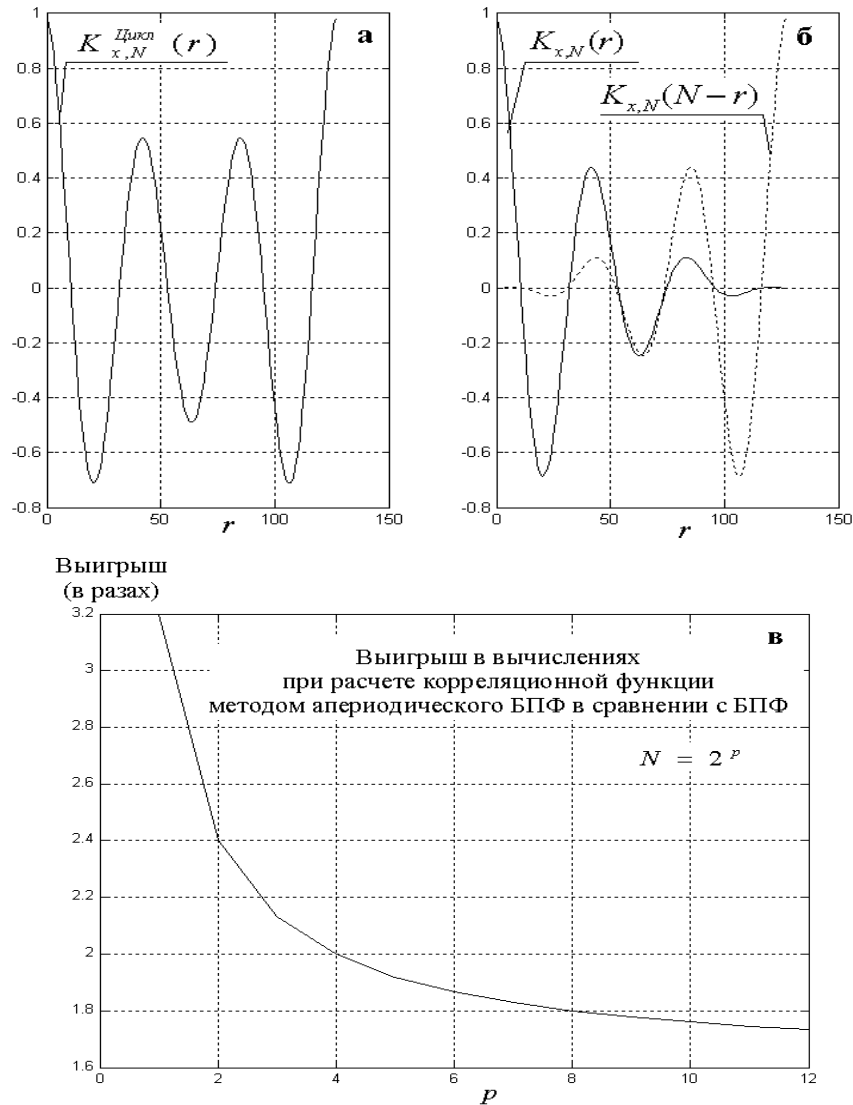


Рисунок 6.16 – Структурно-следственная блок-схема диагностирования сердечно-сосудистой системы человека

Рассмотрены следующие наиболее часто проявляющиеся патологии сердечно-сосудистой системы человека: инфаркт миокарда, стеноз митрального клапана, дефект аортального клапана, стеноз аорты (II уровень структурно-следственной блок-схемы). На III уровне структурно-следственной блок-схемы рассматриваются характерные изменения спектральных характеристик биомедицинских сигналов, связанные с патологическими изменениями сердечно-сосудистой системы человека. На IV уровне структурно-следственной блок-схемы рассматриваются методы, позволяющие выделять диагностические признаки для каждой патологии.

Из структурно-следственных блок-схем (рисунки 6.15, 6.16) и обобщенной функционально-структурной схемы системы виброакустического функционального диагностирования объектов (рисунок 6.1) непосредственно следует, что в основе компьютерной диагностики объектов лежит дискретное преобразование Фурье с присущими ему достоинствами и недостатками.

На рисунке 6.17 приведены результаты сравнительного анализа (по объему вычислений) подавления эффекта наложения в корреляционной области методами БПФ ИС, подвергнутого ОДНВ (раздел 2.1), и аperiodического БПФ исходного ИС (раздел 3.2). Отметим, что экономия оперативной памяти при использовании аperiodического БПФ исходного ИС по отношению БПФ ИС, подвергнутого ОДНВ составляет 50%.



- а** – циклическая корреляционная функция, полученная методом БПФ;
б – эффект наложения корреляционных функций: $K_{x,N}(r)$ и $K_{x,N}(N-r)$;
в – выигрыш в вычислениях при расчете корреляционной функции методом БПФ-П в сравнении с БПФ.

Рисунок 6.17 – Сравнительный анализ подавления эффекта наложения в корреляционной области методами ДПФ-П

Функциональные возможности параметрических базисов Фурье по подавлению эффекта утечки были продемонстрированы в разделе 2.4 (рисунок 2.7) и в разделе 6.1 (рисунки 6.1, 6.4), а по подавлению эффектов частотола и гребешкового эффекта во временной и в частотной областях в разделе 6.2 (рисунки 6.7, 6.9, 6.11).

Таким образом, внедрение в практику цифровой обработки информационных сигналов параметрических дискретных базисов Фурье позволило усовершенствовать существующие и разработать новые методы и алгоритмы цифровой обработки, обладающие функциональными возможностями по подавлению эффектов наложения, частотола, утечки и гребешкового эффекта во временной, частотной и корреляционной областях, которые присущи методам, основанным на дискретном преобразовании Фурье.

ВЫВОДЫ

1. Проведение измерений всегда является частью систем ЦОИС, в связи с чем при цифровой обработке ИС крайне важно обеспечение выполнения современных требований к единству и точности измерений информационных параметров ИС.
2. Совокупность информационных параметров, характеризующих объект исследования, применяемые методы, алгоритмы и средства их измерения и обработки, требования к функциональным возможностям и метрологическим характеристикам средств измерения и обработки определяются, прежде всего, задачами, стоящими в целом перед суперсистемами, в состав которых входят системы ЦОИС, а также условиями решения этих задач.
3. В реализации систем ЦОИС наблюдается тенденция перехода от специализированных устройств ЦОИС к универсальным перепрограммируемым системам ЦОИС на основе новой информационной технологии – технологии виртуальных приборов, разрабатываемых в

программно-инструментальной среде LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench), которая позволяет обрабатывать и создавать средства ЦОИС практически любой сложности, уменьшив затраты и время на их разработку, повысив их качество.

4. Наряду с преимуществами у среды LabVIEW есть и существенный недостаток, вытекающий из природы вещей. Универсальность комплекса «*объект – измерение – обработка*» в программно-инструментальной среде LabVIEW достигается сменой математического и алгоритмического обеспечения соответствующих методов ЦОИС. Другими словами, для компьютерной (виртуальной) имитации (математической и алгоритмической) реальных средств ЦОИС необходима прежде всего разработка эффективных методов и алгоритмов соответствующих преобразований.
5. Показаны принципы разработки виртуальных средств (приборов) ЦОИС на конечных интервалах в параметрических дискретных базисах Фурье. Проведен сравнительный анализ методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье. Приведены результаты внедрения методов, алгоритмов и средств, разработанных в диссертационном исследовании.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решены следующие основные задачи:

- выявлены научные и технические проблемы современной цифровой спектральной обработки сложных и смешанных информационных сигналов методами и алгоритмами на основе дискретного преобразования Фурье;
- осуществлено развитие теории, разработаны методы и алгоритмы цифровой спектральной обработки сложных и смешанных информационных сигналов во временной, корреляционной, частотной и частотно-временной областях на конечных интервалах в параметрических дискретных базисах Фурье;
- проведено развитие теории, разработаны методы и алгоритмы цифровой обработки мгновенных параметров смешанных информационных сигналов на конечных интервалах на основе параметрических дискретных преобразований Фурье;
- разработаны быстрые процедуры спектральной обработки информационных сигналов на основе параметрических дискретных преобразований Фурье;
- поставлены и решены задачи практической реализации разработанных методов и алгоритмов цифровой спектральной обработки ИС в параметрических дискретных базисах Фурье.

В рамках решения указанных выше задач получены следующие основные результаты, позволившие обеспечить выполнение повышенных требований к эффективности, надежности и качеству создаваемых изделий и технических систем различного назначения.

1. Разработаны преобразования для обработки информационных сигналов в частотной и частотно-временной областях:
 - параметрическое дискретное преобразование Фурье;
 - апериодическое дискретное преобразование Фурье;
 - скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье.

Данные преобразования позволяют, в отличие от обработки ИС в классических дискретных базисах Фурье, проводить обработку ИС в

частотной и частотно-временной областях не на фиксированных множествах частот, а на множестве частот, мощность которых регулируется параметрами соответствующих преобразований.

2. Разработана новая форма преобразование Фурье – дискретно-частотное преобразование Фурье, которая позволяет поставить в соответствие во временной области дискретному сигналу непрерывный сигнал, решая проблему негативного влияния на результаты измерения эффекта частотола во временной области.
3. Разработано преобразование для обработки информационных сигналов во временной области:
 - модифицированное параметрическое дискретное преобразование Фурье, позволяющее, в отличие от обработки ИС в классических дискретных базисах Фурье, проводить обработку ИС во временной области не на фиксированном множестве моментов времени, а на множестве моментов времени, мощность которого регулируется параметром преобразования.
4. Разработаны модификации и обобщения дискретного преобразования Гильберта:
 - модифицированное дискретное преобразование Гильберта;
 - обобщенное дискретное преобразование Гильберта;
 - модифицированное обобщенное дискретное преобразование Гильберта.

Отличием разработанных обобщений дискретного преобразования Гильберта от стандартного дискретного преобразования Гильберта является учет свойства локальности данного преобразования, что позволило повысить точность измерения огибающих сложных ИС сигналов минимум на порядок.
5. Предложены методы цифровой блочной обработки с накоплением, на основе которых проведено обобщение метода Герцеля. Разработанные методы позволили проводить цифровую обработку ИС как на целых, так и

дробных частотах, обеспечив при этом высокую частотную разрешающую способность и устойчивость цифровой обработки ИС.

6. Проведено обобщение структуры гребенчатого фильтра. В математической основе обобщенного гребенчатого фильтра лежит поворот нулей амплитудно-частотной характеристики гребенчатого фильтра, что позволило сократить время цифровой обработки ИС, решить проблему погрешностей коэффициентов фильтров на основе частотной выборки, не теряя при этом одного из важнейших достоинств данного вида фильтров – возможности рекуррентного получения результатов фильтрации.
7. Открытый автором эффект неинвариантности энергетического спектра действительных гармонических сигналов в классическом и параметрических базисах Фурье дает возможность оценить потенциальную точность обработки сложных и смешанных ИС в классическом и параметрических дискретных базисах Фурье.
8. Осуществлено развитие теории цифровой обработки сложных ИС во временной, частотной и частотно-временной областях, а также смешанных ИС в корреляционной, спектральной и спектрально-временной областях на конечных интервалах. Разработанные теоретические основы цифровой обработки сложных и смешанных ИС в параметрических дискретных базисах Фурье являются базой создания новых и совершенствованию существующих методов, алгоритмов и средств повышения эффективности, надежности и качества технических систем в различных областях науки и техники.
9. Созданы быстрые алгоритмы обработки ИС на конечных интервалах в параметрических дискретных базисах Фурье. Предложенные алгоритмы позволили более чем на порядок сократить время цифровой обработки ИС и обеспечить ее реализацию в реальном масштабе времени.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ЦОС – цифровая обработка сигналов;
- ЦОИС – цифровая обработка информационных сигналов;
- ИС – информационный сигнал;
- ДПФ – дискретное преобразование Фурье;
- ДЭФ – дискретная экспоненциальная функция;
- БПФ – быстрое преобразование Фурье;
- МиС – методы, алгоритмы и средства;
- АИС – аналоговый информационный сигнал;
- ДИС – дискретный информационный сигнал;
- ЦИС – цифровой информационный сигнал;
- ДКИ – дискретные косвенные измерения;
- ДВПФ – дискретно-временное преобразование Фурье;
- ВИС – виброакустический информационный сигнал;
- ДСИ – дискретные статистические измерения;
- ДКСИ – дискретные косвенные статистические измерения;
- ПриС – процессорное измерительное средство;
- ДВПФ – дискретно-временное преобразование Фурье;
- ОДНВ – операция дополнения нулями во временной области;
- ДЧПФ – дискретно-частотное преобразование Фурье;
- ОДНЧ – операция дополнения нулями в частотной области;
- СДПФ – скользящее дискретное преобразование Фурье
- ДПФ-П – параметрическое преобразование Фурье;
- ДЭФ-П – параметрическая дискретная экспоненциальная функция;
- МДПФ-П – модифицированное параметрическое преобразование Фурье;
- МДЭФ-П – модифицированная параметрическая дискретная экспоненциальная функция;
- СДПФ-П – параметрическое скользящее дискретное преобразование Фурье;
- ЦБОН – цифровая блочная обработка с накоплением;
- СДИС – случайный дискретный информационный сигнал;
- АДПФ – апериодическое дискретное преобразование Фурье;
- ДПГ – дискретное преобразование Гильберта;
- СЭСФ – скользящий энергетический спектр Фурье;
- СЭСФ – скользящий энергетический параметрический спектр Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агамалов Ю.Р. Измерение гармонического сигнала на фоне некогерентных периодических помех /Ю.Р.Агамалов // Датчики и системы.-2014.-№6.-С.44-47.
2. Андреев Н.А. Методы и алгоритмы адаптивной многоскоростной обработки траекторного сигнала в задачах радиовидения / Н.А.Андреев, С.В.Витязев. В.В.Витязев // Цифровая обработка сигналов.-№1.-2010.-С.38-44.
3. Анциферов С.С. Общая теория измерений: Учебное пособие /С.С.Анциферов, Б.И.Голубь Под ред. Акад. РАН Н.Н. Евтихеева.- М.:Горячая линия-Телеком, 2007.-176 с.
4. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов /Н.Ахмед, К.Р.Рао.-М.:Связь, 1980.-248 с.
5. Батищев В.И. Аппроксимационные методы и системы измерения и контроля параметров периодических сигналов /Милентьев В.С., Батищев В.И.-М.: Физматлит, 2011. – 240 с.
6. Беллман Р Введение в теорию матриц: Пер. с англ. ,2-е изд.-М.: Наука, 1976.- 352 с.
7. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных процессов: Пер. с англ. /Дж Бендат, А.Пирсол .-М.:Мир, 1989.-540 с.
8. Бодин А.Н. Концепция виртуальной медицинской диагностической системы/О.Н.Бодин и др.// Датчики и системы.-2011.-№4.-С.13-16.
9. Богнер Р. Введение в цифровую фильтрацию / Под ред. Р.Богнера, А.Константинидиса –М.:Мир, 1976.-212с.
10. Бриллинджер Д. Временные ряды: Обработка данных и теория: Пер. с англ. /Д.Бриллинджер под ред. И.Н. Колмогорова.-М.: Мир, 1980.-536 с.
11. Вакман Д.Е. Об определении понятий амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала/ Д.Е. Вакман Д.Е//Радиотехника и электроника/.-№5.-1972.- С. 973-978.

12. Вашкевич М.И. Применение полиномиальных алгебр и теории Галуа для синтеза быстрых алгоритмов дискретных косинусных преобразований / М.И.Вашкевич, А.А.Петровский // Цифровая обработка сигналов.-№3.-2011.- С.2-10.
13. Вентцель Е.С. Теория вероятностей /Е.С. Вентцель. М.: Наука, 1969.-576 с.
14. Верне. Быстрое преобразование Фурье для действительных сигналов: уменьшение необходимой емкости памяти и числа шагов за счет применения нечетного дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР, 1971.-Т.59.-№10.- С.184-186.
15. Виброакустическая диагностика зарождающихся дефектов / Ф.Я.Балицкий, М.А.Иванова, А.Г.Соколова. Е.И.Хомяков.-М.: Наука, 1984.-119 с.
16. Виленкин С.Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций.-М.: Энергия, 1979.-320 с.
17. Витязев В.В. Многоскоростная обработка сигналов: ретроспектива и современное состояние (ч.1) /В.В.Витязев, С.В.Витязев. А.А.Зайцев // Цифровая обработка сигналов.-№1.-2008.-С.12-22
18. Витязев В.В. Многоскоростная обработка сигналов: ретроспектива и современное состояние (ч.2) /В.В.Витязев, С.В.Витязев. А.А.Зайцев // Цифровая обработка сигналов.-№2.-2008.-С.2-9.
19. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов. –Спб.: 2001.-58 с.
20. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц /Ф.Р.Гантмахер.-М.: Наука, 1966.- 576 с.
21. Глинченко А.С. Измерение параметров сигналов в системах низкочастотной индуктивной разведки /А.С.Глинченко, О.А.Троннин // Датчики и системы.- 2009.-№9.-С.14-17.
22. Глинченко А.С. Исследование спектрально-веса измерения частоты сигналов / А.С.Глинченко, О.А.Тронин // Цифровая обработка сигналов.- №2.-2010.-С.22-28.
23. Голд Б. Цифровая обработка сигналов / Б.Голд, Ч.Рэйдер. Пер. с англ., под ред. А.М.Трахтмана. М.: Сов.радио. 1973.-368 с.

24. Градштейн Н.С. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений /Н.С.Градштейн, И.М.Рыжик.- М.:Физматгиз, 1963.-1100 с.
25. Грибанов Ю.И. Спектральный анализ случайных процессов./ Ю.И.Грибанов, В.И.Мальков .- М.: Энергия, 1974.-240 с.
26. Гучук В.В. Аппаратно-программное обеспечение методов анализа квазипериодических биосигналов (на примере пульсового сигнала лучевой артерии) / В.В.Гучук, А.А.Десова, А.А.Дорофеев, Н.Е.Киселева // Датчики и системы .-2014.-№8.-С.17-20.
27. Дженкинс Г. Спектральный анализ и его приложения / Г.Дженкинс, Д.Ваттс Вып.1 Пер с англ. В.Ф.Писаренко М.:Мир,1971.-312 с.
28. Дженкинс Г. Спектральный анализ и его приложения / Г.Дженкинс, Д.Ваттс Вып.2 Пер с англ. В.Ф.Писаренко М.:Мир,1972.-283 с.
29. Дружинин В.В., Кантор Д. С. Проблемы системологии (проблемы теории сложных систем).-М.: Сов.Радио,1976.-296 с.
30. Евдокимов Ю.К. LabVIEW для радиоинженера: от виртуальной модели до реального прибора. Практическое руководство для работы в программной среде LabVIEW /Ю.К.Евдокимов, В.Р.Линдваль, Г.И.Щербаков .-М.: ДМК Пресс, 2007.-400 с.
31. Еремин Е.Л Система адаптивного виброгашения вынужденных колебаний / Е.Л.Еремин, Е.А.Шепеленок //Датчики и системы.-2014.-№5.-С.16-18.
32. Загидуллин Р.Ш. LabVIEW в исследованиях и разработках /Р.Ш.Загидуллин .-М.: Горячая линия-Телеком, 2005.-352 с.
33. Загидуллин Р.Ш. Multisim, LabVIEW и Signal Express. Практика автоматизированного проектирования электронных устройств /Р.Ш.Загидуллин.-М.: Горячая линия-Телеком, 2009.-366 с.
34. Загоруйко Н.Г. Алгоритмы обнаружения эмпирических закономерностей / Н.Г.Загоруйко.-Новосибирск: Наука СО, 1985.-150 с.
35. Зубарев Ю.Б. Цифровая обработка сигналов – информатика реального времени /Ю.Б.Зубарев. В.В.Витязев. В.П.Дворкович // Цифровая обработка сигналов.-№1.-1999.-С.5-17.

36. Ильин Г.И. Особенности применения преобразования Гильберта для описания квазигармонических колебаний с произвольной структурой/ Ильин Г.И., Ильин А.Г.// Нелинейный мир. 2011. Т. 9. № 8. С. 493-496.
37. Кантемиров В.И. Аналого-цифровое преобразование случайных сигналов / В.И.Кантемиров // Датчики и системы.-2011.-№3.-С.16-19.
38. Кармалита В.А. Цифровая обработка случайных процессов.-М.: Машиностроение, 1986.- 79 с.
39. Кехтарнаваз Н. Цифровая обработка сигналов на системном уровне с использованием LabVIEW / Н.Кехтарнаваз, Н.Ким Пер с англ.-М.: Издательский дом «Додека-XX1»,2007.-304 с.
40. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения. Теоремы, формулы / Т.Корн, Г.Корн.-М.:Наука, 1973.-831 с.
41. Кнорринг В.Г. Измерения и когнитивистика / В.Г.Кнорринг, К.К.Семенов , Г.П.Солопченко // Датчики и системы.-2014.- №7.-С.54-61.
42. Коржик В.И. Огибающая сигнала и некоторые ее свойства / В.И Коржик //Радиотехника.-1968.-Том 23.-№4.-С.1-6.
43. Кравчук А.С. Вычисление достоверных коэффициентов Фурье цифрового сигнала / А.С. Кравчук, А.И.Кравчук, Рымуза З. // Цифровая обработка сигналов.- 2010.-№2.-С.19-21.
44. Куликовский К.Л. Методы и средства измерений / К.Л.Куликовский, В.Я.Купер.-М.: Энергоатомиздат. 1986.-448 с.
45. Куликовский Л.Ф. Теоретические основы информационных процессов / Л.Ф.Куликовский, В.В.Мотов.- М.: Высш. школа, 1987.-248 с.
46. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов : 2-е изд. Пер. с англ.-М.: ООО «Бином-Пресс». 2006.-636 с.
47. Левитан Б.М. Почти-периодические функции / Б.М.Левитан .-Гос.изд-во технико-теоретической литературы.-М., 1953.-392 с.
48. Левицкий А.А. Численное моделирование пьезоэлектрического вибрационного гироскопа / А.А.Левицкий. П.С.Маринушкин // Датчики и системы.-2009.-№9.-С. 11-14.

49. Марпл-мл.С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ.-М.:Мир, 1990.-584 с.
50. Мамонтова Л.А. Матричные операторы связи дискретных спектров Фурье и Уолша /Л.А.Мамонтова, В.А.Пономарев, Е.П.Попечителей // Автометрия.-1977.-№1.-С.41-46.
51. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения.-М.: Энергоатомиздат, 1982.-320 с.
52. Мирский Г.Я. Аппаратурное представление характеристик случайных процессов. Изд.2-е преработ. и доп., М.: Энергия, 1972.-456 с.
53. Мышкис А.Д. Математика (специальные курсы для втузов) .-М.: Наука. 1971.-632 с.
54. Никаноров С.П. Системный анализ: этап развития методологии решения проблем в США. http://or-rsv.net/Concept/Nikanorov_003.htm.
55. Неразрушающий контроль.Справочник в 8т./ Под общей ред. В.В.Клюева.-2-е изд.испр.Т.7: в 2кн.-М.:Машиностроение.2006.-829 с.
56. Новиков А.К. Корреляционные измерения в корабельной акустике /А.К.Новиков Л.: Судостроение , 1971.-256 с.
57. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов /Э.Оппенгейм Перев. с англ. М.: Мир,1980.-552 с.
58. Овчарук В.Н. Критерии выбора параметров акустической эмиссии материалов / В.Н.Овчарук // Датчики и системы.-2014.-№3.-С.1—13.
59. Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы: Пер. с англ. / Р.Отнес, Л.Эноксон.-М.: Мир, 1982.-428 с.
60. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах / В.Н.Пойда. Под ред. М.П.Чеголина . Минск: Наука и техника, 1978.-136 с.
61. Потемкин В.Г. МАТЛАВ 6: Среда проектирования инженерных приложений.-М.:ДиАЛОГ-МИФИ, 2003.-448 с.
62. Пономарев В.А. Исследование и разработка методов спектрального анализа гидроакустических сигналов применительно к классификации. Дисс. уч. ст. канд.техн. наук.-ЛЭТИ, 1974.-184 с.

63. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов / Пономарева О.В. – Ижевск: Издательство ИЖГТУ, – 2016. 172 с.
64. Ponomareva, O.V., Method for Effective Measurement of a Sliding Parametric Fourier Spectrum / V.A. Ponomarev, O.V. Ponomareva, A.V. Ponomarev//Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2014, Vol. 50, No. 2, pp.1-7.
65. Пономарева, О.В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического фурье-спектра действительных тональных сигналов / О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7 - 14.
66. Пономарева, О.В. Инвариантность текущего энергетического спектра Фурье комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2014. – Вып. 2. – С. 8 - 16.
67. Пономарева, О.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева, В.А. Алексеев, А.В. Пономарев // Вестник Ижевского государственного технического университета имени М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 106 - 109.
68. Пономарева, О.В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом апериодического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 1(23). – С. 100 - 107.
69. Пономарева, О.В. Инвариантность скользящего энергетического спектра Фурье дискретных сигналов в базисной системе параметрических экспоненциальных функций / О.В. Пономарева // Вестник Ижевского государственного технического университета имени М.Т.Калашникова. – 2014. – № 2(62). – С. 102 - 106.
70. Пономарева, О.В. Методы и алгоритмы спектрально-корреляционной компьютерной обработки электроэнцефалограмм / О.В. Пономарева, Е.Ф.

- Тюрикова // Современные информационные и электронные технологии. – 2014. – Т. 1. – № 15. – С. 70 - 71.
71. Пономарева, О.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Современные информационные и электронные технологии. – 2014. – Т. 1. – № 15. – С. 183 - 184.
72. Пономарева, О.В. Инвариантность текущего энергетического фурье-спектра действительных дискретных сигналов на конечных интервалах / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2014. – №1. – С. 15 - 21.
73. Пономарева, О.В. Метод эффективного измерения скользящего параметрического спектра Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Автометрия. – 2014. – Т. 50. – № 2. – С. 31 - 38.
74. Пономарева, О.В. Обобщение алгоритмов Герцеля и скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 1. – С. 3 - 11.
75. Пономарева, О.В. Иерархическая морфологическо-информационная модель системы функционального диагностирования объектов на основе цифровой обработки сигналов / О.В. Пономарева, В.А. Пономарев, А.В. Пономарев // Датчики и системы. – 2014. – № 1(176). – С. 2 - 8.
76. Пономарева, О.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки путем обобщения разностного уравнения нерекурсивного гребенчатого фильтра / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 244 - 247.
77. Пономарева, О.В. Обобщенная функционально-структурная модель информационно-измерительных систем функционального диагностирования объектов / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева, А.В. Пономарев //

- Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 115 - 118.
78. Пономарева, О.В. Измерение текущего энергетического фурье-спектра комплексных и действительных сигналов на конечных интервалах / О.В. Пономарева, В.А. Пономарев // Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 2(22). – С. 149 - 157.
79. Пономарева, О.В. Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Приборы и методы измерений. – 2013. – № 2(7). – С. 114 - 119.
80. Пономарева, О.В. Иерархическое морфологическо-информационное описание систем функционального диагностирования объектов / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Пономарева // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 121 - 124.
81. Пономарева, О.В. Формализованное описание погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Пономарева // Современные информационные и электронные технологии. – 2013. – Т. 1. – № 14. – С. 90 - 93.
82. Пономарева, О.В. Цифровой периодограмм анализ и проблемы его практического применения / О.В. Пономарева, В.А. Алексеев, А.В. Пономарев // Вестник Ижевского государственного технического университета имени М.Т.Калашникова. – 2013. – № 2(58). – С. 130 - 133.
83. Пономарева, О.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2013. – № 2. – С. 10 - 15.
84. Пономарева, О.В. Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев,

- В.А. Пономарев// Интеллектуальные системы в производстве. – 2013. – № 1(21). – С. 41 - 46.
85. Пономарева, О.В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2 - 7.
86. Пономарева, О.В. Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2012. – № 2(20). – С. 122 - 129.
87. Пономарева, О.В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей / О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С. 2 - 5.
88. Пономарева, О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2 - 6.
89. Пономарева, О.В. Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами / В.А. Алексеев, В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 91 - 99.
90. Пономарева, О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций / О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7 - 11.
91. Пономарева, О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 36 - 41.
92. Пономарева, О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций / В.А. Пономарев, О.В.

- Пономарева // Радиотехника и электроника. АН СССР. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561 - 1570.
93. Пономарева, О.В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Автометрия. СО АН СССР. – 1983. – № 4. – С. 39 - 45.
94. Пономарева, О.В. Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. 16. – № 9. – С. 67 - 68.
95. Пономарева, О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18 - 21.
96. Пономарева, О.В. Измерение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Вестник Ижевского Государственного Технического Университета им. М.Т. Калашникова. 2016.- №2.(70). -С. 80-83.
97. Пономарева, О.В. Применение временных окон в векторном анализе дискретных сигналов / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева, В.Ю. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2016. – № 2 (29). – С. 19 - 21.
98. Пономарева, О.В., Пономарев А.В. Восстановление значений непрерывных частотных спектров дискретных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Вестник Ижевского Государственного Технического Университета им. М.Т. Калашникова. 2015.- №3.(67). -С. 88-91.
99. Пономарева, О.В. Измерение временных спектров дискретных сигналов методом модифицированного параметрического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 132 - 138.
100. Пономарева О.В. Измерение скользящего взвешенного энергетического дискретно-временного спектра тональных компонент / О.В. Пономарева,

- А.В. Пономарев, В.А. Пономарев // Интеллектуальные системы в производстве. – 2014. – № 2 (24). – С. 126 - 132.
101. Пономарева, О.В. Цифровая обработка сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева, А.Д. Демин // Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: тр. 14-й междунар. науч. конф., 14 марта, 2014. Новочеркасск / ЮРГПУ. 2014. – С. 30 - 33.
102. Пономарева, О.В. Обобщение структурной схемы фильтров на основе частотной выборки / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA'2013): тр. 15-й междунар. науч. конф., март, 2013, Москва, Россия. – В т. 1. – 2013. – С. 117 - 121.
103. Пономарева, О.В. Аксиомы измерения дискретных стационарных случайных сигналов на конечных интервалах / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA'2013): тр. 15-й междунар. науч. конф., март, 2013, Москва, Россия. – В т. 1. – 2013. – С. 70 - 74.
104. Пономарева, О.В. Метод спектрального разложения дискретных стационарных случайных сигналов на конечных интервалах / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA'2013): тр. 15-й междунар. науч. конф., март, 2013, Москва, Россия. – В т. 1. – 2013. – С. 100 - 104.
105. Пономарева, О.В. Скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье в задачах обнаружения тональных компонент / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA'2012): тр. 14-й междунар. науч. конф., март, 2012, Москва, Россия. – В т. 1. – 2012. – С. 7 - 10.
106. Пономарева, О.В. Быстрое параметрическое преобразование Фурье действительных последовательностей / О.В. Пономарева // Цифровая

- обработка сигналов и ее применение (DSPA'2012): тр. 14-й междунар. науч. конф., март, 2012, Москва, Россия. – В т. 1. – 2012. – С. 104 - 108.
107. Ponomareva, Olga. Parametric Fast Fourier transform of the real sequences when the parameter $\Theta = \frac{1}{2}$ / Olga Ponomareva // Proc. of the 13th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET'2012), Odessa, Ukraine, 4-8 June, 2012. – Vol. 1. – Odessa, 2012. – P. 167.
108. Ponomareva, Olga. Properties of the parametric discrete Fourier transform of real sequences / Vladimir Ponomarev, Olga Ponomareva // Proc. of the 13th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET'2012), Odessa, Ukraine, 4-8 June, 2012. – Vol. 1. – Odessa, 2012. – P. 168.
109. Пономарева, О.В. Применение вейвлет-анализа и Фурье-анализа в задачах локализации периодических компонент / О.В. Пономарева // Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства: тр. 8-й всеросс. науч. конф., 14-16 нояб., 2012. Ижевск / ИжГТУ. 2012. – С. 117 - 119.
110. Пономарева, О.В. Применение методов цифрового спектрального анализа в задачах электроэнцефалографии / О.В. Пономарева, А.Н. Зямбахтина, М.Н. Пудова // Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства: тр. 8-й всеросс. науч. конф., 14-16 нояб., 2012. Ижевск / ИжГТУ. 2012. – С. 119 - 122.
111. Пономарева, О.В. Методы измерения меняющихся во времени спектров / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства: тр. 8-й всеросс. науч. конф., 14-16 нояб., 2012. Ижевск / ИжГТУ. 2012. – С. 260 - 263.
112. Пономарева, О.В. Применение однобинового скользящего параметрического ДПФ в задачах обнаружения и измерения параметров тональных компонент / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства: тр. 8-й всеросс. науч. конф., 14-16 нояб., 2012. Ижевск / ИжГТУ. 2012. – С. 264 - 268.

113. Пономарева, О.В. Параметрическое дискретное преобразование Фурье в задачах цифровой обработки сигналов / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства: тр. 8-й всеросс. науч. конф., 14-16 нояб., 2012. Ижевск / ИжГТУ. 2012. – С. 371 - 374.
114. Пономарева О.В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах виброакустического диагностирования объектов / О.В.Пономарева // Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов: тр. 4-й междунар. науч.-техн. конф., 26-27 сент., 2012. Могилев / БРУ. 2012. – С. 188 - 189.
115. Пономарева, О.В. Оценивание энергетических спектров случайных процессов методом параметрического ДПФ / О.В. Пономарева, Н.В. Пономарева // Приборостроение в 21 веке – 2012. Интеграция науки, образования и производства: тр. 8-й всеросс. науч. конф., 14-16 нояб., 2012. Ижевск / ИжГТУ. 2012. – С. 374 - 378.
116. Пономарева, О.В. Аналитические свойства параметрического ДПФ / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA'2011): тр. 13-й междунар. науч. конф., март, 2011, Москва, Россия. – В т. 1. – 2011. – С. 60 - 63.
117. Пономарева О.В. Использование параметрического дискретного преобразования Фурье в задачах виброакустической диагностики / О.В.Пономарева, А.Н.Зямбахтина, М.Н.Пудова // Приборостроение в 21 веке – 2011. Интеграция науки, образования и производства: тр. 7-й всеросс. науч. конф., 15-17 нояб., 2011. Ижевск / ИжГТУ. 2012.- С.281-184.
118. Пономарева, О.В. Спектральный анализ сигналов, подвергнутых операциям растяжения и удлинения / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA'2011): тр. 13-й междунар. науч. конф., март, 2011, Москва, Россия. – В т. 1. – 2011. – С. 63 - 67.
119. Пономарева, О.В. Оценивание энергетических спектров случайных сигналов методом параметрического ДПФ / О.В. Пономарева // Цифровая обработка

- сигналов и ее применение (DSPA'2011): тр. 13-й междунар. науч. конф., март, 2011, Москва, Россия. – В т. 1. – 2011. – С. 150 - 153.
120. Пономарева, О.В. Применение параметрического дискретного преобразования Фурье в анализе виброакустических сигналов / О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Информационно-измерительные, диагностические и управляющие системы: тр. 2-й междунар. науч. конф., 11-13 апр., 2011. Курск / ЮЗГУ. 2011. – С. 112 - 117.
121. Пономарева, О.В. Системный анализ проблем создания систем виброакустического функционального диагностирования объектов / О.В. Пономарева // Информационно-измерительные, диагностические и управляющие системы: тр. 2-й междунар. науч. конф., 11-13 апр., 2011. Курск / ЮЗГУ. 2011. – С. 117 - 120.
122. Пономарева, О.В. Обобщение частотных диагностических моделей для решения задач виброакустического функционального диагностирования объектов / О.В. Пономарева // Информационно-измерительные, диагностические и управляющие системы: тр. 2-й междунар. науч. конф., 11-13 апр., 2011. Курск / ЮЗГУ. 2011. – С. 121 - 124.
123. Ponomareva, Olga. Algorithm for fast computation of the discrete Fourier transform of real sequences / Vladimir Ponomarev, Olga Ponomareva // Proc. of the 12th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET'2011), Odessa, Ukraine, 23-27 May, 2011. – Vol. 1. – Odessa, 2011. – P. 116.
124. Ponomareva, Olga. Measurement of the probability characteristics of random processes using CPU measurement means / Vladimir Ponomarev, Olga Ponomareva, Alexey Ponomarev // Proc. of the 12th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET'2011), Odessa, Ukraine, 23-27 May, 2011. – Vol. 1. – Odessa, 2011. – P. 110.
125. Ponomareva, Olga. One-bin sliding parametric discrete Fourier transform in the problems of detection and measurement of tonal components / Olga Ponomareva // Proc. of the 12th international conference “Modern information and electronic

- technologies” (MIET’2011), Odessa, Ukraine, 23-27 May, 2011. – Vol. 1. – Odessa, 2011. – P. 184.
126. Пономарева, О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах / О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA’2010): тр. 12-й междунар. науч. конф., март, 2010, Москва, Россия. – В т. 1. – 2010. – С. 38 - 41.
127. Пономарева, О.В. Быстрое преобразование Фурье в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций / А.В. Пономарев, О.В. Пономарева, В.А. Пономарев // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA’2010): тр. 12-й междунар. науч. конф., март, 2010, Москва, Россия. – В т. 1. – 2010. – С. 136 - 138.
128. Пономарева, О.В. Параметрическое дискретное преобразование Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // Цифровая обработка сигналов и ее применение (DSPA’2010): тр. 12-й междунар. науч. конф., март, 2010, Москва, Россия. – В т. 1. – 2010. – С. 139 - 141.
129. Ponomareva, Olga. Fast Fourier transform algorithm in the basis of parametric discrete exponential functions / Vladimir Ponomarev, Olga Ponomareva // Proc. of the 11th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET’2010), Odessa, Ukraine, 24-28 May, 2010. – Vol. 1. – Odessa, 2010. – P. 160.
130. Ponomareva, Olga. Generalization of the discrete Fourier transform / Vladimir Ponomarev, Olga Ponomareva // Proc. of the 11th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET’2010), Odessa, Ukraine, 24-28 May, 2010. – Vol. 1. – Odessa, 2010. – P. 200.
131. Ponomareva, Olga. Fundamentals of the theory of spectral analysis of discrete signals on finite intervals / Olga Ponomareva // Proc. of the 11th international conference “Modern information and electronic technologies” (MIET’2010), Odessa, Ukraine, 24-28 May, 2010. – Vol. 1. – Odessa, 2010. – P. 201.
132. Ponomareva, Olga. Parametrical discrete Fourier Transform / Vladimir Ponomarev, Olga Ponomareva, Alexey Ponomarev // Proc. of the 9th international

- conference “Research, development and application of high technologies in the industry”, 22-23 April 2010, St.-Petersburg. – Vol. 1. – St.-Petersburg, 2010. – P. 200 - 202.
133. Ponomareva, Olga. Statistical stability of power spectrum of casual signals in the basis of parametrical exponential functions / Olga Ponomareva // Proc. of the 9th international conference “Research, development and application of high technologies in the industry”, 22-23 April 2010, St.-Petersburg. – Vol. 1. – St.-Petersburg, 2010. – P. 200 - 204.
134. Ponomareva, Olga. Fast transform in the basis of parametrical discrete exponential functions / Olga Ponomareva // Proc. of the 9th international conference “Research, development and application of high technologies in the industry”, 22-23 April 2010, St.-Petersburg. – Vol. 1. – St.-Petersburg, 2010. – P. 204 - 205.
135. Ponomareva, Olga. Theoretical basis of the spectral analysis of discrete signals at finite intervals / Olga Ponomareva // Proc. of the 9th international conference “Research, development and application of high technologies in the industry”, 22-23 April 2010, St.-Petersburg. – Vol. 1. – St.-Petersburg, 2010. – P. 401 - 403.
136. Пономарева, О.В. Основы методологии определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов процессорными измерительными средствами / В.А. Алексеев, О.В. Пономарева // Приборостроение-2010: тр. 3-й междунар. науч. конф., 10-12 нояб., 2010. Минск / БНТУ. 2010. – С. 144 - 145.
137. Пономарева, О.В. Оценка энергетических спектров случайных сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье в измерительных системах / А.В. Пономарев, О.В. Пономарева // Приборостроение-2010: тр. 3-й междунар. науч. конф., 10-12 нояб., 2010. Минск / БНТУ. 2010. – С. 220 - 221.
138. Пономарева, О.В. Теоретические основы параметрического дискретного преобразования Фурье / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева, А.В. Пономарев // Приборостроение-2010: тр. 3-й междунар. науч. конф., 10-12 нояб., 2010. Минск / БНТУ. 2010. – С. 222 - 223.

139. Пономарева, О.В. Быстрые алгоритмы параметрического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева // Приборостроение-2010: тр. 3-й междунар. науч. конф., 10-12 нояб., 2010. Минск / БНТУ. 2010. – С. 223 - 224.
140. Пономарева, О.В. Основы теории спектрального анализа дискретных сигналов в информационно-измерительных системах виброакустического диагностирования / О.В. Пономарева // Приборостроение-2010: тр. 3-й междунар. науч. конф., 10-12 нояб., 2010. Минск / БНТУ. 2010. – С. 225 - 226.
141. Пономарева, О.В. Диагностические модели в задачах виброакустического функционального диагностирования объектов / О.В. Пономарева, В.А. Пономарев, Р.М. Зарипов // Физические основы диагностики материалов и изделий, и приборов для её реализации: тр. всеросс. науч. конф., 12-13 нояб., 2010. Тюмень / ТюмГНГУ. 2010. – С. 18 - 21.
142. Пономарева, О.В. Оценка энергетических спектров виброакустических сигналов методом параметрического дискретного преобразования Фурье / О.В. Пономарева // Физические основы диагностики материалов и изделий, и приборов для её реализации: тр. всеросс. науч. конф., 12-13 нояб., 2010. Тюмень / ТюмГНГУ. 2010. – С. 21 - 26.
143. Пономарева, О.В. Проблемы создания методов и средств виброакустического функционального диагностирования, ориентированных на применение в условиях производства диагностируемых объектов и обладающих широким спектром функциональных возможностей / О.В. Пономарева // Физические основы диагностики материалов и изделий, и приборов для её реализации: тр. всеросс. науч. конф., 12-13 нояб., 2010. Тюмень / ТюмГНГУ. 2010. – С. 26 - 30.
144. Пономарева, О.В. Новый метод спектральной обработки виброакустических сигналов в диагностике технологических погрешностей зубчатых передач / О.В. Пономарева // Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов: тр. 3-й междунар. науч. конф., 23-25 сент., 2009. Могилев / БРУ. 2009. – С. 186 - 187.

145. Пономарева, О.В. Диагностика двигателей внутреннего сгорания на основе адаптивной структурно-лингвистической модели / А.В. Пономарев, О.В. Пономарева // Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов: тр. 3-й междунар. науч. конф., 23-25 сент., 2009. Могилев / БРУ. 2009. – С. 188 - 189.
146. Пономарева О.В. Неразрушающий контроль коробок передач станков во виброакустическому сигналу цифровыми методами / О.В. Пономарева // Новые материалы, неразрушающий контроль и наукоемкие технологии в машиностроении: тр. 4-й междунар. науч. конф., 9-11 дек., 2008. Тюмень / ТюмГНГУ. 2008. – С. 143-145.
147. Пономарева, О. В. Микропроцессорная информационно- измерительная система спектрально-временного анализа виброакустических сигналов: дис. канд. тех. наук: 12.01.16/ О. В. Пономарева.- Куйбышев, 1987.- 205 л.
148. Прохоров С.А. Ортогональные модели структурных функций / Прохоров С.А., Графкин В.В. // Автометрия. 2011. №1, Том №47. С. 50-58.
149. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. Под ред. Ю.Н.Александрова. М.: Мир, 1978.-835 с.
150. Рангайан Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход/ Пер. с англ. Под ред. А.П.Немирко.- М.: ФИЗМАТЛИТ.-2007.-440 с.
151. Раушер К. Основы спектрального анализа / К Раушер, Ф.Йанссен, Р. Минихольд: Пер. с англ. – М.: Горячая линия –Телеком, 2006.-224с.
152. Рыболовлев А.А. Особенности графического оформления результатов в среде технических расчетов MATLAB /А.А.Рыболовлев, Д.А.Рыболовлев. // Цифровая обработка сигналов.-№2.-2014.-С.65-69.
153. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.1 Случайные процессы/С.М.Рытов М.: Наука, 1976.-501 с.
154. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учебное пособие для вузов / А.Г. Сергеев, В.В. Крохин В.В.–М.: Логос, 2002.– 408 с.
155. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко . СПб .: Питер, 2011.-604 с.

156. Серебренников М.Г. Выявление скрытых периодичностей / М.Г.Серебренников, А.А.Первозванский. М.: Наука, 1965.-244с.
157. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов и MATLAB / А.И.Солонина, Д.М.Клионский, Т.В.Меркучева, С.Н.Перов.- СПб.: БХВ-Петербург, 2013.- 512 с.
158. Скутин И.В. Применение методов математического программирования и преобразования Фурье при градуировке БИК-анализаторов/И.В.Скутин, К.А.Жаринов //Датчики и системы.-2014.-№5.-С.11-13.
159. Суранов А.Я. LabVIEW 8.20: Справочник по функциям.-М.: LVR Пресс, 2007.-536 с.
160. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию /А.М.Трахтман. М.: Сов.радио. 1972, 352 с.
161. Трахтман А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А.М.Трахтман, В.А.Трахтман. М.:Сов.радио.-1975.-208 с.
162. Тревис Дж. LabVIEW для всех / Джеффи Тревис : Пер. с англ. Клушин Н.А..-М.: LVR Пресс; Прибор Комплект, 2005.-544 с.:
163. Туровский Я.А. Динамика энергетических цепочек локальных максимумов вейвлет-коэффициентов биомедицинских сигналов /Я.А.Туровский, С.Д.Кургалин, А.Г.Семенов.// Цифровая обработка сигналов.-№2.-2013.- С.20-23.
164. Туровский Я.А. Анализ энцефалограмм на основе исследования цепочек локальных максимумов скейлограмм /Я.А.Туровский, С.Д.Кургалин, А.Г.Семенов.// Цифровая обработка сигналов.-№2.-2013.-С.24-29
165. Угольков В.Н. Некоторые вопросы дискретного анализа спектров сигналов В.Н.Угольков // Измерительная техника.-2004, №6.-С.58-71.
166. Федосов В.П. Цифровая обработка сигналов в LabVIEW :учеб. пособие / В.П.Федосов. А.К. Нестеренко .-М.:ДМК Пресс,2007.-400 с.
167. Финк Л.М. Сигналы. Помехи. Ошибки.. /Л.М.Финк.-2-е изд., перераб. и доп.- М.: Радио и связь, 1984.-256 с.

168. Финкелстайн Л. Наука об измерениях: анализ состояния и направлений развития / Л.Финкелстайн // Датчики и системы.-2010.-№2.-С.53-57.
169. Ханян Г.С. Аналитическое исследование и оценка погрешностей в задаче измерения параметров гармонического сигнала методом преобразования Фурье / Г.С.Ханян // Измерительная техника.-2003, №8.-С.3-10.
170. Цветков Э.И. Основы математической метрологии / Э.И.Цветков .-СПб.: Политехника, 2005.-510 с.
171. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ / Э.И.Цветков. М.: Энергия, 1973.-128 с.
172. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений / Э.И.Цветков.-Л.: Энергия, 1979.-288 с.
173. Цветков Э.И. Процессорные измерительные средства / Э.И.Цветков.-Л.: Энергоатомиздат, 1989.-224 с.
174. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии.-Л.:1981.-281 с.
175. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии /Л.П.Ярославский.- М.: Радио и связь. 1987.-296 с.
176. Application of the bispectrum for detection of small nonlinearities excited Journal of Sound and Vibration, Volume 329, Issue 20, 27 September 2010, Pages 4279-4293.
177. M.A. Acar, C. Yilmaz. Design of an adaptive–passive dynamic vibration absorber composed of a string–mass system equipped with negative stiffness tension adjusting mechanismOriginal Research Article. Journal of Sound and Vibration, Volume 332, Issue 2, 21 January 2013, Pages 231-245.
178. Hüseyin Akçay. Frequency domain subspace-based identification of discrete-time singular power spectra. Signal Processing, Volume 92, Issue 9, September 2012, Pages 2075-2081.
179. Luana Batista, Bechir Badri, Robert Sabourin, Marc Thomas. A classifier fusion system for bearing fault diagnosis. Expert Systems with Applications, Volume 40, Issue 17, 1 December 2013, Pages 6788-6797.

180. R. Beck, A.G. Dempster, I. Kale. Characterisation of finite-precision resonators used in recursive filter DFT implementationsOriginal Research Article. *Signal Processing*, Volume 80, Issue 1, January 2000, Pages 161-183.
181. C Bing Li, Pei-lin Zhang, Dong-sheng Liu, Shuang-shan Mi, Peng-yuan Liu. Classification of time–frequency representations based on two-direction 2DLDA for gear fault diagnosis. *Applied Soft Computing*, Volume 11, Issue 8, December 2011, Pages 5299-5305.
182. D. Blacodon, J. Bulté. Reverberation cancellation in a closed test section of a wind tunnel using a multi-microphone cesprtral method. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 333, Issue 9, 28 April 2014, Pages 2669-2687.
183. Vladimir Britanak. A survey of efficient MDCT implementations in MP3 audio coding standard: Retrospective and state-of-the-artReview Article. *Signal Processing*, Volume 91, Issue 4, April 2011, Pages 624-672.
184. Luis Chaparro. Chapter 11 - Fourier Analysis of Discrete-time Signals and Systems. *Signals and Systems Using MATLAB (Second Edition)*, 2015, Pages 683-768.
185. Animesh Chatterjee. Structural damage assessment in a cantilever beam with a breathing crack using higher order frequency response functions.*Journal of Sound and Vibration*, Volume 329, Issue 16, 2 August 2010, Pages 3325-3334.
186. Chao-Ping Chu, Li-Te Shen, Shaw-Hwa Hwang. A New Algorithm for Tone DetectionOriginal Research Article. *AASRI Procedia*, Volume 8, 2014, Pages 118-122.
187. Darian M. Onchis, Pavel Rajmic. Generalized Goertzel algorithm for computing the natural frequencies of cantilever beams. *Signal Processing*, Volume 96, Part A, March 2014, Pages 45-50.
188. Keri Elbhbah, Jyoti K. Sinha. Vibration-based condition monitoring of rotating machines using a machine composite spectrum. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 332, Issue 11, 27 May 2013, Pages 2831-2845.

189. Chih-Peng Fan, Guo-An Su. Pruning fast Fourier transform algorithm design using group-based method. Original Research Article. *Signal Processing*, Volume 87, Issue 11, November 2007, Pages 2781-2798.
190. Adly T. Fam. Efficient matched filters for DFT based codes. *Signal Processing*, Volume 90, Issue 11, November 2010, Pages 2996-2998.
191. Michael Feldman. Hilbert transform in vibration analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 25, Issue 3, April 2011, Pages 735-802.
192. Michael Feldman. Theoretical analysis and comparison of the Hilbert transform decomposition methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 22, Issue 3, April 2008, Pages 509-519.
193. Michael Feldman. Hilbert transform methods for nonparametric identification of nonlinear time varying vibration systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 47, Issues 1–2, 3 August 2014, Pages 66-77.
194. Rubén Fraile, Juan Ignacio Godino-Llorente. Cepstral peak prominence: A comprehensive analysis. *Biomedical Signal Processing and Control*, Volume 14, November 2014, Pages 42-54.
195. Z. Gao, P. Reviriego, X. Li, J.A. Maestro, M. Zhao, J. Wang. A fault tolerant implementation of the Goertzel algorithm. *Microelectronics Reliability*, Volume 54, Issue 1, January 2014, Pages 335-337.
196. Jarosław Gronczyński. Recursive Fourier transform algorithms with integrated windowing. Original Research Article. *Signal Processing*, Volume 87, Issue 5, May 2007, Pages 1003-1013.
197. A.Hajnayeb, A. Ghasemloonia, S.E. Khadem, M.H. Moradi. Application and comparison of an ANN-based feature selection method and the genetic algorithm in gearbox fault diagnosis. *Expert Systems with Applications*, Volume 38, Issue 8, August 2011, Pages 10205-10209.
198. Vu Dang Hoang. Wavelet-based spectral analysis. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*, Volume 62, November 2014, Pages 144-153.

199. Carl Q. Howard, Richard A. Craig. An adaptive quarter-wave tube that uses the sliding-Goertzel algorithm for estimation of phaseOriginal Research Article. *Applied Acoustics*, Volume 78, April 2014, Pages 92-97.
200. Carl Q. Howard. A sliding Goertzel algorithm for adaptive passive neutralizersOriginal Research Article. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 331, Issue 9, 22 April 2012, Pages 1985-1993.
201. Carl Q. Howard, Richard A. Craig. Noise reduction using a quarter wave tube with different orifice geometries. *Applied Acoustics*, Volume 76, February 2014, Pages 180-186.
202. A.J. Hillis, C.R.P. Courtney. Structural health monitoring of fixed offshore structures using the bicoherence function of ambient vibration measurements. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 330, Issue 6, 14 March 2011, Pages 1141-1152.
203. D.P. Jena, S.N. Panigrahi, Rajesh Kumar. Gear fault identification and localization using analytic wavelet transform of vibration signal. *Measurement*, Volume 46, Issue 3, April 2013, Pages 1115-1124.
204. Fan Jiang, Zhencai Zhu, Wei Li, Gongbo Zhou, Guoan Chen. Fault identification of rotor-bearing system based on ensemble empirical mode decomposition and self-zero space projection analysis. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 333, Issue 14, 7 July 2014, Pages 3321-3331.
205. Joe F. Chicharo, Mehdi T. Kilani. A sliding Goertzel algorithm. *Signal Processing*, Volume 52, Issue 3, August 1996, Pages 283-297.
206. Nasser Kehtarnavaz, Namjin Kim. Chapter 10 - DSP System Design: Dual-Tone Multi-Frequency (DTMF) Signaling. *Digital Signal Processing System-Level Design Using LabVIEW*, 2005, Pages 221-224.
207. Ilyes Khelf, Lakhdar Laouar, Abdelaziz M. Bouchelaghem, Didier Rémond, Salah Saad. Adaptive fault diagnosis in rotating machines using indicators selection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 40, Issue 2, November 2013, Pages 452-468.

208. David Labat. Recent advances in wavelet analyses: Part 1. A review of concepts. *Journal of Hydrology*, Volume 314, Issues 1–4, 25 November 2005, Pages 275-288.
209. Patricia S. Lessa, João R. Sato, Elisson F. Cardoso, Carlos G. Neto, Ana Paula Valadares, Edson Amaro Jr. Wavelet correlation between subjects: A time-scale data driven analysis for brain mapping using fMRI. *Journal of Neuroscience Methods*, Volume 194, Issue 2, 15 January 2011, Pages 350-357.
210. B. Liang, S.D. Iwnicki, Y. Zhao. Application of power spectrum, cepstrum, higher order spectrum and neural network analyses for induction motor fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 39, Issues 1–2, August–September 2013, Pages 342-360
211. Hinbin Lin, Kang Ding. A new method for measuring engine rotational speed based on the vibration and discrete spectrum correction technique. *Measurement*, Volume 46, Issue 7, August 2013, Pages 2056-2064.
212. Huanhuan Liu, Minghong Han. A fault diagnosis method based on local mean decomposition and multi-scale entropy for roller bearings. *Mechanism and Machine Theory*, Volume 75, May 2014, Pages 67-78.
213. Jiesi Luo, Dejie Yu, Ming Liang. Application of multi-scale chirplet path pursuit and fractional Fourier transform for gear fault detection in speed up and speed-down processes. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 331, Issue 22, 22 October 2012, Pages 4971-4986.
214. Mallat S.G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer.Soc.* 315 (1989), Pages 69-87.
215. R. Medina, M. Garrido. Improving impact-echo method by using cross-spectral density. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 304, Issues 3–5, 24 July 2007, Pages 769-778.
216. A.B. Ming, W. Zhang, Z.Y. Qin, F.L. Chu. Envelope calculation of the multi-component signal and its application to the deterministic component cancellation in bearing fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volumes 50–51, January 2015, Pages 70-100.

217. A.B. Ming, Z.Y. Qin, W. Zhang, F.L. Chu. Spectrum auto-correlation analysis and its application to fault diagnosis of rolling element bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 41, Issues 1–2, December 2013, Pages 141-154.
218. A. Mostafapour, S. Davoodi, M. Ghareaghaji. Acoustic emission source location in plates using wavelet analysis and cross time frequency spectrum. *Ultrasonics*, Volume 54, Issue 8, December 2014, Pages 2055-2062.
219. Serguei Naboko, Irina Pchelintseva, Luis O. Silva. Discrete spectrum in a critical coupling case of Jacobi matrices with spectral phase transitions by uniform asymptotic analysis. *Journal of Approximation Theory*, Volume 161, Issue 1, November 2009, Pages 314-336.
220. E. Najafi, A.H.M. Yatim. A novel current mode controller for a static compensator utilizing Goertzel algorithm to mitigate voltage sags. *Energy Conversion and Management*, Volume 52, Issue 4, April 2011, Pages 1999-2008.
221. M. Nichols, C.C. Olson. Optimal bispectral detection of weak, quadratic nonlinearities in structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 329, Issue 8, 12 April 2010, Pages 1165-1176.
222. J.M. Nichols, P. Marzocca, A. Milanese. On the use of the auto-bispectral density for detecting quadratic nonlinearity in structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 312, Issues 4–5, 20 May 2008, Pages 726-735.
223. Yi Qin, Shuren Qin, Yongfang Mao. Research on iterated Hilbert transform and its application in mechanical fault diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 22, Issue 8, November 2008, Pages 1967-1980.
224. S.R. Qin, Y.M. Zhong. A new envelope algorithm of Hilbert–Huang Transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 20, Issue 8, November 2006, Pages 1941-1952.
225. J.-M. Shan, R. Stockton. VIBRATION ANALYSIS OF ROTATING MACHINERY USING A BISPECTRUM. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 200, Issue 4, 6 March 1997, Pages 533-539.

226. Yuh-Tay Sheen. On the study of applying Morlet wavelet to the Hilbert transform for the envelope detection of bearing vibrations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 23, Issue 5, July 2009, Pages 1518-1527
227. M Gilson Jerônimo da Silva Jr., Ricardo Menezes Campello de Souza. Minimum multiplicative complexity algorithm for computing a single component of the discrete Fourier transform. Original Research Article. *Digital Signal Processing*, Volume 23, Issue 3, May 2013, Pages 1040-1043
228. Jyoti K. Sinha, C.B.N.S. Balla, K.K. Meher. Early contact detection between two components. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 303, Issues 3–5, 20 June 2007, Pages 918-924.
229. M.S. Safizadeh, S.K. Latifi. Using multi-sensor data fusion for vibration fault diagnosis of rolling element bearings by accelerometer and load cell. *Information Fusion*, Volume 18, July 2014, Pages 1-8.
230. K. Srinivasan, Praveen Panickar, Ganesh Raman, Byung-Hun Kim, David R. Williams. Study of coupled supersonic twin jets of complex geometry using higher-order spectral analysis. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 323, Issues 3–5, 19 June 2009, Pages 910-931.
231. Li Tan, Jean Jiang. Chapter 8 - Infinite Impulse Response Filter Design. *Digital Signal Processing (Second Edition)*, 2013, Pages 301-403.
232. Filippo Ubertini. Effects of cables damage on vertical and torsional eigenproperties of suspension bridges. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 333, Issue 11, 26 May 2014, Pages 2404-2421.
233. Jar-Ferr Yang, Fu-Kun Chen. Recursive discrete Fourier transform with unified IIR filter structures. Original Research Article. *Signal Processing*, Volume 82, Issue 1, January 2002, Pages 31-41.
234. Dejie Yu, Junsheng Cheng, Yu Yang. Application of EMD method and Hilbert spectrum to the fault diagnosis of roller bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 19, Issue 2, March 2005, Pages 259-270.

235. Y.M. Zhan, A.K.S. Jardine. Adaptive autoregressive modeling of non-stationary vibration signals under distinct gear states. Part 2: experimental analysis. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 286, Issue 3, 6 September 2005, Pages 451-476.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Специфика дискретных косвенных методов измерений характеристик дискретных сигналов на конечных интервалах.

Рассмотрим особенности такой характеристики дискретных сигналов, как их *временной спектр*. Дискретный сигнал, полученный путем равномерной дискретизации во времени исходного аналогового сигнала, может рассматриваться как разложение полученного дискретного сигнала по системе дискретных единичных импульсов (единичных отсчетов) [160]:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}; \quad u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}; \quad (\text{П1.1})$$

где m – число отсчетов задержки единичного импульса.

Используя понятие единичного импульса (П1.1), дискретный сигнал $x(n)$, заданный на N -интервале, можно описать следующим соотношением:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot u_0(n-m). \quad (\text{П1.2})$$

Выражение (П1.2) иллюстрирует фильтрующее свойство единичного импульса: из всех возможных отсчетов $x(m)$ с помощью единичного импульса выбирается только один отсчет при $m=n$. Таким образом сам дискретный сигнал $x(n)$ может рассматриваться *как одна из возможных форм временного спектра дискретного сигнала $x(n)$* .

Косвенное измерение, исходя из определения данного вида измерений, в общей теории измерений интерпретируется как нахождение некоторого функционала, описывающего локальную или интегральную характеристику сигналов. Например, исходя из такой интерпретации косвенного измерения, широко применяются функционалы, обеспечивающие в рамках общей теории измерений косвенные измерения амплитуд, фаз, частот гармонических составляющих дискретного сигнала. При этом подчеркивается, что для

повышения точности определения функционалов необходимо знать и промежуточные значения дискретного сигнала $x(n)$ (задача интерполяции).

В рамках общей теории измерений [3] широкое распространение получили два способа получения промежуточных значений дискретных сигналов: *линейная интерполяция и квадратичная интерполяция*. Нетрудно видеть, что определение промежуточных значений дискретного сигнала $x(n)$ можно интерпретировать как косвенные измерения временного спектра (1.17) при $m \neq n$.

Отметим, что это только один из возможных способов косвенных измерений временного спектра дискретного сигнала $x(n)$. Отметим, что данный метод косвенных измерений временного спектра $x(n)$ является *субъективным по определению*. *Объективный метод косвенных измерений временного спектра дискретного сигнала $x(n)$* основан на применении ОДПФ (1.6), в котором дискретный параметр n заменяется непрерывным параметром $t/\Delta t$ (нормированное время):

$$x(t/\Delta t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} S_N(k) W_N^{-k \frac{t}{\Delta t}}. \quad (\text{П1.3})$$

Как отмечалось в главе 1, *дискретные косвенные измерения* (дискретные косвенные методы измерений) параметров ДЭИС на конечных интервалах следует рассматривать как отдельную область косвенных методов измерений. Их не следует путать с *дискретной формой непрерывных косвенных измерений*. Отметим, что такая разновидность косвенных измерений также существует и широко применяется в рамках общей теории измерений. Однако крайне важно понимать, что это *два принципиально отличающихся друг от друга подхода к косвенным методам измерений*.

Рассмотрим несколько подробнее понятия *дискретного косвенного измерения* и *непрерывного косвенного измерения в дискретной форме*. При проведении дискретного косвенного измерения определение значения искомой дискретной величины на основании результатов прямых измерений других

дискретных величин, функционально связанных с искомой дискретной величиной, осуществляется *исключительно в дискретном виде*.

При проведении непрерывного косвенного измерения в дискретной форме, предварительно проводится операция интерполяции интерполяционным многочленом результатов дискретных прямых измерений непрерывных величин, функционально связанных с искомой величиной [3]. Другими словами проводится *переход от дискретной формы представления исходного дискретного сигнала к непрерывной (кусочн-непрерывной) форме представления*. И только затем проводится собственно косвенное измерение искомой величины. При этом определение значения искомой величины на основании интерполированных результатов прямых измерений осуществляется *численными методами*.

В этом заключаются принципиальные отличия этих двух подходов к косвенным измерениям, неучет которых приводит к спорным, а зачастую и к ошибочным научным и практическим выводам.

Рассмотрим данный вопрос более детально. Как известно, каждому дискретному сигналу $x(n)$, заданному на N -интервале, может соответствовать сколько угодно непрерывных функций совпадающих с отсчетами сигнала (рисунок П1.1), которые также принято называть *оггибающими дискретного сигнала* [160].

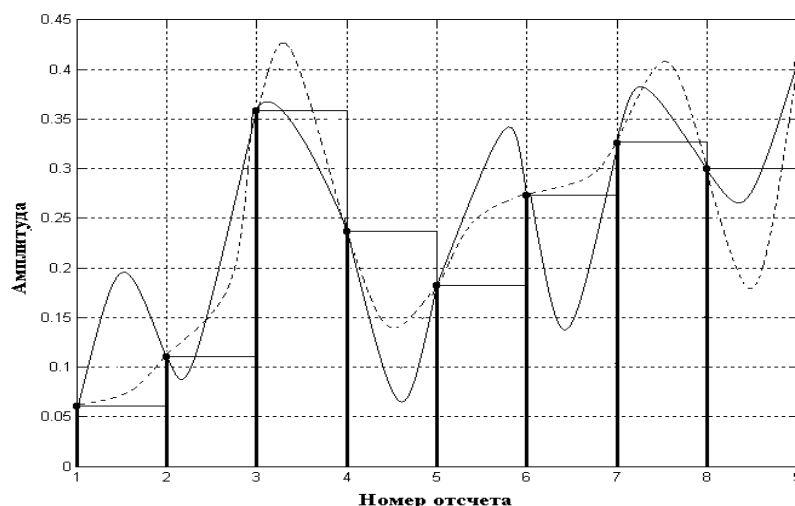


Рисунок П1.1 – Огибающие дискретного сигнала

Основываясь на этом очевидном утверждении, с целью повышения точности косвенного измерения, например, при нахождении такого функционала как интеграл некоторой функции, относительно которой известны только ее дискретные значения, находят промежуточные значения функции методом линейной или квадратичной интерполяции, путем применения интерполяционного многочлена в различных формах: Лежандра, Ньютона, Гаусса, Бесселя, Эверетта, Стирлинга [3, 36, 40, 160], а также применяют сплайн-интерполяцию с последующим использованием методов численного интегрирования [40]. Наиболее широкое применение получили два метода численного интегрирования: *метод трапеций и метод Симпсона*. Как уже отмечалось, в рамках общей теории измерений данный подход широко применяется при косвенных измерениях характеристик непрерывных (аналоговых) сигналов на конечных интервалах, заданных дискретными значениями. Абсолютно правомерный подход при дискретной форме непрерывных косвенных измерений.

Однако, попытки применения данного подхода для повышения точности дискретных косвенных методов измерений приводят к досадным ошибкам и некорректным выводам.

В качестве примера приведем исследования, изложенные в работе [43]. В статье предлагается способ определения, так называемых, «*достоверных коэффициентов Фурье цифрового сигнала*» со следующим заключением: «*В ходе проведенных исследований установлено, что не более 5% от общего числа вычисленных коэффициентов Фурье (с помощью ДПФ – авт.) для простейшей линейной функции (дискретной периодической пилообразной функции – авт.) имеют погрешность (менее – авт.) 0.005. Применение правила Симпсона позволяет существенно увеличить количество достоверно вычисленных коэффициентов Фурье для детерминированной функции*». В качестве критерия определения числа «*достоверно вычисленных коэффициентов Фурье*» в работе предлагается правило Рунге:

$$| S(k) - S_1(k) | < \eta \cdot | S_1(k) |; \quad (\text{П1.4})$$

где $\eta = 0.005$; $S(k)$ – ДПФ $x(n)$ на интервале $N = N_1 = 996$;

$S_1(k)$ – ДПФ $x(n)$ на интервале $N = N_2 = 498$;

$$x(n) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot (n-1)/N; \quad n = \overline{1, N/2} \\ 0; \quad n = N/2 + 1; \\ 2 \cdot [(n-1)/N - 1]; \quad n = \overline{N/2 + 2, N} \end{array} \right\}.$$

С точки зрения дискретных косвенных методов измерений, причина появления «недостовверных коэффициентов Фурье» дискретного периодического пилообразного сигнала $x(n)$, исходя из соотношения (П1.3), вполне очевидна. На рисунке П1.2, **а**, в качестве примера, приведен дискретный сигнал $x(n)$, $N = N_1 = 64$, а на рисунке П1.2, **б** – его дискретное преобразование Фурье (ДПФ) - $\text{real}[S(k)]$.

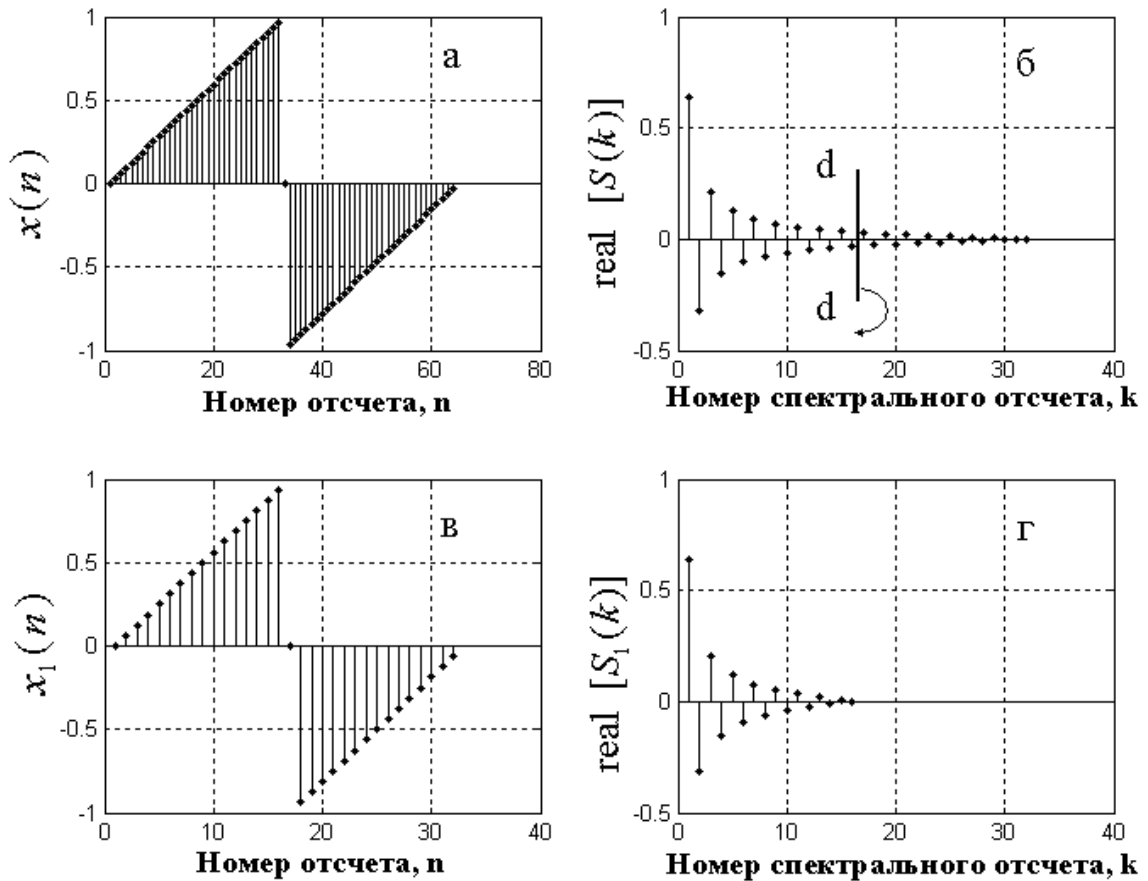


Рисунок П1.2 – а: дискретный сигнал $x(n)$, $N = 64 = N_1$; б: ДПФ дискретного сигнала $x(n)$, $\text{real}[S(k)]$; в: дискретный сигнал $x_1(n)$, $N = 32 = N_2$; г: ДПФ дискретного сигнала $x_1(n)$, $\text{real}[S_1(k)]$

Увеличивая интервал дискретизации $x(n)$ в два раза, мы приходим к сигналу $x_1(n)$, $N = 32 = N_2$ (рисунок П1.2 в). Увеличение интервала дискретизации приводит к **сворачиванию** (наложению) спектра $\text{real}[S(k)]$ (рисунок П1.2 б) относительно линии d-d. В результате мы получаем «свернутый» вариант спектра $\text{real}[S(k)]$ – спектр $\text{real}[S_1(k)]$. Так как коэффициенты Фурье $\text{real}[S(k)]$, $k = \overline{17,32}$ (рисунок П1.2, б) справа от линии d-d не равны нулю, то «свернутые» коэффициенты Фурье $\text{real}[S_1(k)]$, $k = \overline{1,16}$ (рисунок П1.2, г), естественно, не равны коэффициентам Фурье $\text{real}[S(k)]$, $k = \overline{1,16}$ (рисунок П1.2, б).

Нетрудно видеть, что для данного конкретного дискретного сигнала $x(n)$ (в силу монотонности его спектра) наименьшему относительному изменению подвержены **именно начальные коэффициенты** Фурье $\text{real}[S_1(k)]$. Для устранения **эффекта наложения частот** необходимо просто подвергнуть сигнал $x(n)$ низкочастотной цифровой фильтрации с частотой среза фильтра низких частот (ФНЧ) по линии d-d. В этом случае коэффициенты Фурье $\text{real}[S_1(k)]$, $k = \overline{17,32}$ (рисунок П1.2, б) будут равны нулю. Следовательно, коэффициенты Фурье $\text{real}[S_1(k)]$, $k = \overline{1,16}$ (рисунок П1.2, б) после «свертывания» частот будут равны коэффициентам Фурье $\text{real}[S(k)]$, $k = \overline{1,16}$ (рисунок П1.2, б). Т.е. **все коэффициенты Фурье** $\text{real}[S_1(k)]$, $k = \overline{1,16}$ (рисунок П1.2, б), в терминологии работы [43], «будут достоверными». Кстати это утверждение будет справедливо и для других периодических дискретных сигналов.

С точки зрения дискретных косвенных методов измерений, очевидна и причина «увеличения количества достоверно вычисленных коэффициентов Фурье» за счет применения правила Симпсона. Когда мы при проведении **косвенных измерений в дискретной форме** заменяем дискретный сигнал непрерывным (кусочно-непрерывным) сигналом (т. е. огибающей сигнала, рисунок П1.1), то мы **получаем для каждой огибающей свой спектр**.

Если мы считаем «восстановленный» нами непрерывный сигнал на интервале T из дискретного сигнала на интервале N периодом некоторого

периодического сигнала, то спектр будет дискретным, в противном случае спектр будет непрерывным. Важно другое:

- во-первых, выбор способа интерполяции дискретного сигнала никоим образом не связан со свойствами исходного непрерывного сигнала, т.е. выбор способа интерполяции дискретного сигнала является **субъективным по определению**;
- во-вторых, спектр непрерывного (кусочно-непрерывного) сигнала, сформированного из исходного дискретного сигнала, оказывается **бесконечным по частоте**.

Следовательно, проводя операцию дискретизации восстановленного (из дискретного сигнала) непрерывного (кусочно-непрерывного) сигнала мы свертываем в частотной области **нами же созданный бесконечный по частоте спектр**. Можно, конечно, предположить, что выбирая из тех или иных соображений огибающую для конкретного исходного дискретного сигнала, «сворачивая» полученный в результате интерполяции бесконечный по частоте спектр, мы будем **(предположительно)** иметь возможность «лучшего» приближения коэффициентов $\text{real} [S(k)]$ и $\text{real} [S_1(k)]$ $k = \overline{1,16}$ (рисунок П1.2).

Но, и это следует подчеркнуть, такой **подход в значительной степени субъективен** и, главное, не является универсальным методом «увеличения количества достоверно вычисленных коэффициентов Фурье» при косвенных методах измерения дискретных сигналов на конечных интервалах.

В заключение отметим, что приведенный **пример смешения двух принципиально отличающихся друг от друга подходов к косвенным методам измерений** далеко не единственен.

Выбор примера объясняется только тем, что он прекрасно иллюстрирует, к чему может приводить на практике игнорирование различий этих двух подходов к косвенным методам измерений характеристик дискретных сигналов на конечных интервалах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Частотные модели виброакустических сигналов некоторых элементов механических систем

Частотные модели технического состояния подшипников качения [15, 55, 179, 204, 212, 216, 217, 234] позволяют идентифицировать наличие и величину дефектов как на внутренней, так и на внешней беговых дорожках, а также дефекты шариков, роликов, сепаратора.

Детальный анализ энергетического спектра виброакустического сигнала, излучаемого подшипником качения, позволяет выявить наличие смазки в подшипниках, а также определить, какой силой нагружен подшипник, осевой или радиальной, какова величина внутреннего зазора, где проворачивается подшипник, на валу или в корпусе.

Дефекты подшипников качения возникают в следующей последовательности: кольца (внешнее, внутреннее), шарики или ролики, сепаратор. Измерение параметров виброакустического сигнала в частотной и частотно-временной областях, излучаемого подшипником качения, позволяет не только диагностировать его состояние на конкретный момент, но и прогнозировать развитие зарождающихся дефектов.

Как показывают экспериментальные исследования, энергетические спектры виброакустических сигналов зубчатых зацеплений имеют относительно сложную структуру [15, 55, 181, 203, 213, 235]. Одной из основных составляющих виброакустического сигнала является периодический сигнал, имеющий ступенчатую форму. Период этой составляющей зависит от скорости входа зубчатой пары в зацепление, ступенчатость же ее формы зависит от периодического изменения податливости за счет распределения нагрузки между различными числами зубьев. Основные причины появления данной составляющей связаны с геометрическими погрешностями профиля (в результате

износа или погрешностей изготовления), и/или с прогибом зубьев под нагрузкой. Геометрические погрешности профиля зубьев в энергетическом спектре виброакустического сигнала проявляются разным образом в зависимости от того, являются ли эти погрешности идентичными (проявление дефекта на частотах зацепления) или неидентичными (появление низкого спектрального уровня, распределенного по широкому частотному диапазону). В зубчатых зацеплениях имеет место проявление и нелинейных эффектов в виде амплитудной и частотной модуляций виброакустического сигнала. Необходимо отметить, что разделить эти два вида модуляций довольно сложно, однако их наличие приводит к одному интересному, с точки зрения диагностирования зубчатого зацепления, информативному признаку. За счет фазовых соотношений амплитудной и частотной модуляции в спектре виброакустического сигнала наблюдается несимметричность полос относительно некоторой несущей, что дает возможность идентифицировать эксцентриситет одного из колес зубчатого зацепления.

Частотные модели нашли широкое применение и при виброакустическом функциональном диагностировании двигателей внутреннего сгорания [55, 210, 211]. Основной составляющей в энергетическом спектре виброакустического сигнала цилиндропоршневой группы является периодический сигнал перекладки поршня в зазоре между поршнем и цилиндром. При этом наиболее интенсивный удар возникает вблизи верхней «мертвой точки». Следующая ярко выраженная периодическая составляющая энергетического спектра виброакустического сигнала двигателя внутреннего сгорания возникает вследствие удара при наличии зазора: кольцо – канавка поршня. В силу того, что рассмотренные периодические составляющие имеют разный частотный диапазон, возможна их частотная селекция. Техническое состояние кривошипно-шатунного механизма характеризуется ударным импульсом за счет зазора в сопряжениях: шатун – поршень, шейка – подшипник. Данный сигнал является периодическим и интенсивность ударного импульса определяется зазором в подшипниках верхней и нижней головок шатуна. В таблице П1.1, приведены частотные модели проявления некоторых дефектов

Таблица П1.1 – Частотные модели проявления дефектов.

Дефекты подшипников		
Причины дефекта	Частота проявления дефекта	Частотная модель дефекта
Внутреннее кольцо	Частота мелькания тел качения (шариков или роликов) или ее гармоники	$f_{1,k} = \frac{kzn}{120} \left[1 + \frac{d}{D_0} \cos \varphi \right]$ z – число тел качения; n – число оборотов вала в минуту; d – диаметр тела качения D_0 – диаметр окружности центров тела качения; φ – угол контакта, $k = 2, 3, \dots$
Наружное кольцо	Частота мелькания тел качения по наружному кольцу	$f_2 = \frac{zn}{120} \left[1 - \frac{d}{D_0} \cos \varphi \right]$
Тело качения или сепаратор	Частота собственного вращения тела качения	$f_3 = \frac{D_0 n}{120d} \left[1 - \frac{d^2}{D_0} \cos^2 \varphi \right]$
Сепаратор, тела качения и (или) кольца	Основная частота сепаратора	$f_4 = \frac{n}{120} \left[1 - \frac{d}{D_0} \cos \varphi \right]$
Крупный дефект внутреннего кольца	Верхние и нижние боковые оборотные частоты относительно частоты мелькания тел качения по внутреннему кольцу и их гармоники	$f_{k,r} = m f_{1,k} \pm r n / 60;$ $m, r = 1, 2, \dots$
Крупный дефект наружного кольца	Верхние и нижние боковые оборотные частоты относительно частоты мелькания тел качения по наружному кольцу и их гармоники	$f_{k,r} = m f_2 \pm r n / 60;$ $m, r = 1, 2, \dots$

Таблица П1.1 – Продолжение

Дефекты подшипников		
Чрезмерный внутренний зазор или проворачивание подшипника на валу	Гармоники оборотных частот	$f_5 = m/60;$ $r = 2,3,\dots$
Посадочное гнездо подшипника в корпусе слишком свободно	Первая и четвертая гармоники оборотной частоты	$f_6 = n/60;$ $f_7 = n/15.$
Дефекты зубчатых колес		
Причины дефекта	Частота проявления дефекта	Частотная модель дефекта
Дисбалансы валов колес	Оборотные частоты	$f_1 = n/60$
Биения валов и зубчатых венцов, накопленные погрешности колес	Оборотные частоты и их гармоники	$f_2 = kf_1$
Ошибки основного шага, ошибки профиля зубьев, переменная жесткость зацепления	Частоты зацепления и их гармоники	$f_3 = knz/60;$ z – число зубьев колеса
Погрешности зубьев делительного колеса	Побочные составляющие и их гармоники	$f_4 = kf_1z_1$
Эксцентриситет колес	Нижние боковые оборотные частоты относительно частот зацепления	$f_5 = f_3 \pm rf_1$ $r = 1,2,\dots$
Взаимодействие ошибок основного шага, ошибок профилей зубьев с биениями валов и зубчатых венцов., накопленными погрешностями колес	Верхние и нижние боковые оборотные частоты относительно частот зацепления и их гармоник	$f_6 = f_3 - rf_1$ $r = 1,2,\dots$

Таблица П1.1 – Продолжение

Дефекты двигателей внутреннего сгорания		
Причины дефекта	Частота проявления дефекта	Частотная модель дефекта
Неуравновешенность вращающихся деталей, сил инерции первого порядка и их моменты	Оборотные частоты и их гармоники	$f_1 = kn/60$; n – число оборотов коленчатого вала
Процесс сгорания топлива	Основная частота сгорания топлива	$f_2 = c/2D$; c – скорость звука в газе при сгорании; D – диаметр цилиндра (камеры сгорания) двигателя
Трение в коренных подшипниках	Оборотные частоты коренных подшипников и их гармоники	$f_3 = kzn/60$; $k = 1,2,\dots$; z - число трущихся пар.
Неуравновешенность деталей распределительного вала	Оборотные частоты распределительного вала и их гармоники	$f_4 = kz/120$.
Удары клапанов	Основные частоты клапанов и их гармоники	$f_5 = kz_1z/(60m)$; $f_5 = kz/120$; z_1 – число клапанов; m – коэффициент тактности.

Таблица П1.1 – Продолжение

Дефекты турбозубчатых агрегатов		
Причины дефекта	Частота проявления дефекта	Частотная модель дефекта
Неуравновешенность вращающихся деталей p -й ступени редуктора; погрешности, допущенные при их изготовлении и сборке	Оборотные частоты и их гармоники	$f_1 = kr_p n / 60$; r_p – передаточное число p -й ступени редуктора; n – число оборотов в минуту выходного вала; $k = 1, 2, \dots$
Кинематические погрешности пересопряжения зубьев шестерни и сателлитов первой ступени	Частоты зацепления и их гармоники	$f_2 = rC_1(r_1-1)n / 60$; C_1 – число сателлитов первой ступени.
Неуравновешенность вращающихся деталей турбины	Оборотные частоты и их гармоники	$f_3 = kn_1 / 60$; n_1 – число оборотов в минуту турбины
Неравномерность потока пара в проточной части турбины	Лопастные частоты и их гармоники	$f_4 = zn_1 / 60$; $f_5 = kf_4 / 60$
Погрешность пересопряжения привода импульсного насоса	Зубцовые частоты и их гармоники	$f_6 = kz_1 n / 60$; z_1 – число зубьев колеса привода

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Акты внедрения научных разработок, выполненных по результатам исследований в диссертации Пономаревой О.В.

УТВЕРЖДАЮ



Зам. директора ОАО «ЧМЗ»

Штуца М.Г.

2015 г.

АКТ

Об использовании результатов диссертационной работы к.т.н., доцента Пономаревой О.В. «Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье», выполненной на соискание ученой степени доктора технических наук

Результаты диссертационной работы Пономаревой О.В. использованы при разработке системы «Совершенствование информационно-управляющей системы комплексной безопасности (ИУСКБ)», ОАО «Чепецкий механический завод» (г. Глазов, Удмуртская Республика) в части математического и программного обеспечения для исследования сигналов с датчиков и аппаратуры.

Методы, алгоритмы и средства обработки информационных сигналов, предложенные в диссертационной работе Пономаревой О.В., обладают целым рядом преимуществ по сравнению со стандартными методами, алгоритмами и средствами.

Разработанные к.т.н., доцентом Пономаревой О.В. методы и алгоритмы обработки информационных сигналов успешно реализованы в системе ИУСКБ и обеспечили подтвержденное на практике повышение ее эффективности.



Ген. Директор

Ассоциации «Рост», д.т.н.

А.В.Толстых

Исполнитель

работ от ИжГТУ им.

М.Т.Калашникова, д.т.н.

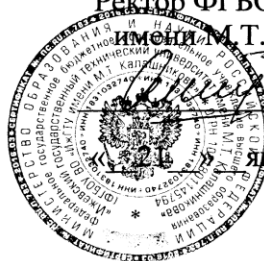
В.А.Алексеев

УТВЕРЖДАЮ

Ректор ФГБОУ ВПО «ИжГТУ
имени М.Т. Калашникова»

Б.А. Якимович

января 2016 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы к.т.н., доцента Пономаревой О.В. «Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье», выполненной на соискание ученой степени доктора технических наук

Настоящий акт подтверждает внедрение результатов диссертационной работы доцента Пономаревой Ольги Владимировны по теме: «Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье» в учебный процесс на кафедре «Приборы и методы измерений, контроля, диагностики» для студентов направления 12.03.01 «Приборостроение» специальности «Приборы и методы контроля качества и диагностики», магистрантов по программам подготовки 12.04.01–1 «Приборы, системы и изделия биомедицинского назначения», 12.04.01–2 «Приборы и методы контроля окружающей среды, веществ, материалов, изделий» по дисциплинам:

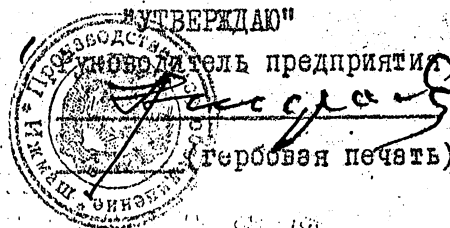
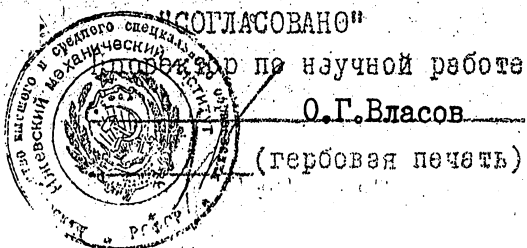
1. Математические основы обнаружения и фильтрации сигналов;
2. Программные средства моделирования;
3. Обнаружение и фильтрация сигналов в неразрушающем контроле;
4. Специальные методы контроля;
5. Обнаружение и фильтрация сигналов в медицине;
6. Графические средства проектирования;
7. Математическое моделирование приборов и систем.

Проректор по учебной
работе д.т.н., профессор

Хворенков В.В.

Декан приборостроительного факультета
к.т.н., доцент

Абилов А. В.



А К Т

о внедрении результатов НИР (ОКР)

Мы, представители п/о "ИЖМАШ"
 (наименование предприятия)

настоящим актом подтверждаем, что результаты
научно-исследовательской работы
 (научно-исследовательской или опытно-конструкторской)
 работы, выполненной Устиновским механическим институтом
 (наименование вуза)

, НИР (ОКР) № госрегистрации У10221

"Разработка системы виброакустической диагностики мотоциклетных
 двигателей на базе средств вычислительной техники" (П-10-83)
 стоимости 100000 руб. (сто тысяч рублей) тыс. руб.
 (цифрами и прописью)

начатой 1.07.83г., законченной и принятой заказчиком к внед-
 (дата)

рению 15.05.85 г. 8054/36, внедрены 15.05.85
 (дата, номер, поз. плана внедрения) (дата)

на п/о "ИЖМАШ" № 5-408-83/36
 внедрения, наименование предприятия, наименование и номер доку-

мента о внедрении

1. Вид внедренных результатов система виброакустической диагностики
 (свидетельство, патентная система, прибор, инструмент, технология,
 методика, программа ЭЦМ, образцы, материалы и т.д.)
2. Область и форма внедрения серийное производство
 (производственный процесс-серийное; уникальное, или единичное
 производство, проектные разработки, научные исследования и т.п.)
3. Технологический уровень НИР неохраноспособная
 (поданы заявки, получены положи-
 тельные решения, авторские свидетельства, патенты, медали ВДНХ,
 и др., их №, дата)
4. Публикации по материалам НИР Пономарев В.А. "Стохастические св-ва
параметрического дискретного преобразования Фурье". Радиотехника и
электроника, 1983, т.28, №8. 2). Пономарев В.А. "Принципы постро-
ения адаптивных систем виброакустической диагностики объектов на
базе ЭВМ". Тез. докладов Всесоюзной конференции "Теория адаптивных
систем и ее применение". Москва-Ленинград, 1983.

3. Эффект от внедрения повышение качества продукции, улучшение условий (экономия материальных ресурсов, рост производительности труда, повышение качества продукции, окупаемости, улучшения условий труда, механизация, оздоровление окружающей среды и т.д.)

4. Ожидаемый годовой экономический эффект

а) в целом по работе 226867 (двести двадцать шесть тысяч руб./год семь и прописью) тысяч восемьсот шестьдесят (сумма цифрами)

б) долевое участие Устиновского механического института (наименование вуза)

в общей (расчетной величине фондов поощрения: 15000 (пятнадцать тысяч) руб. (сумма цифрами)

и прописью)

Приложение: Расчет ~~экономического~~ годового экономического эффекта

От предприятия:

Начальник планово-экономической службы

А.Н. Тюленев

(И.О. Фамилия)

(дата)

Начальник бюро отд. 46.

А.М. Портнов

(И.О. Фамилия)

(дата)

Другие службы:

Гл. конструктор В.А. Умняшкин
ЦКБ-36
Начальник ПЭБ
ЦКБ-36 Н.В. Шкляева

От организации (вуза):

Начальник НИИ (НИС)

В.И. Курко

(И.О. Фамилия)

(дата)

Ответственный за внедрение
Ведущий инженер

А.И. Бабушкин

(И.О. Фамилия)

(дата)

Другие службы, руководитель
и ответственные исполнители
темы:

Руководитель
лабор. ВИАДО В.А. Пономарев
М.н.с. В.В. Пономарева
Инженер О.С. Языков

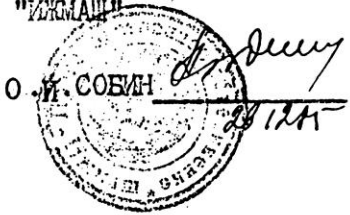
"УТВЕРЖДАЮ"
 ПРОРЕКТОР ПО НАУЧНОЙ РАБОТЕ
 УСТИНОВСКОГО МЕХАНИЧЕСКОГО
 ИНСТИТУТА
 О.Г. КЛАСОВ



"УТВЕРЖДАЮ"
 З. РУКОВОДИТЕЛЬ П/О

"ИЖМАШ"

О.И. СОБИН



А К Т

о внедрении результатов НИР

Мы, представители п/о "Ижмаш" настоящим актом подтверждаем, что результаты научно-исследовательской работы, выполненной УМИ НИР № госрегистрации № 18300-45298 "Создание системы виброакустической диагностики новой гаммы станков 250 ИТП, 250 ИТВ, 250 ИТВЭ1 на базе средств вычислительной техники" стоимостью 150 000 (сто пятьдесят тыс.) рублей начатой 1.03.83, законченной и принятой к внедрению 31.12.85 г., внедрена 9.12.85 г. на п/о "Ижмаш" ТА 5 705 83/236 акт приемки "ДИАССА 5.3".

1. Вид внедренных результатов - система "ДИАССА 5.3"
2. Область и форма внедрения - серийное производство
3. Технологический уровень НИР - неохраноспособная
4. Публикации по материалам НИР :
 - 1) В.А.Пономарев "Стохастические свойства параметрического преобразования Фурье", Радиотехника и электроника, 1983, т.26, № 8 ;
 - 2) В.А.Пономарев "Принципы построения систем вибродиагностики" Тезисы докладов Всесоюзного совещания по вибродиагностике, Иваново, 1985.
5. Эффект от внедрения повышение качества продукции
6. Фактический годовой экономический эффект:
 - а) в целом по работе - 495664 (четыре ста девяносто пять тыс. шестьсот шестьдесят четыре) руб./год
 - б) долевое участие - Устиновского механического института в общей (расчетной) величине фондов поощрения - 16 000 (шестнадцать тысяч) рублей.

Приложение : Расчет фактического годового экономического эффекта
 Предприятие по форме ? 10 не отчитывается

От п/о "Ижмаш"

Начальник отдела

В.И. Курко

В.И. Курко

26.12.85

(дата)

От организации (вуза)

Начальник НИИ (НИС)

В.И. Курко

В.И. Курко

26.12.85

(дата)

"СОГЛАСОВАНО"

Проректор по научной работе
О.Г.ВЛАСОВ

"УТВЕРЖДАЮ"

Руководитель предприятия

3.07.85

А К Т

о внедрении результатов НИР (ОКР)

Мы, представители Механического завода г.Устинованастоящим актом подтверждаем, что результатынаучно-исследовательской(научно-исследовательской или опытно-конструкторской)работы, выполненной Устиновским механическим институтом(наименование вуза), НИР (ОКР) № госрегистрации № 0830003494"Разработка системы виброакустической диагностики двигателей мотоциклов "ИЖ-ЮПИТЕР" и изготовление (наименование работы)стоимостью 70000 руб. (две варианта)(семьдесят тысяч рублей)(цифрами и прописью)начатой 1.04.83 года, законченной и принятой заказчиком к внедрению(дата)30 июня 1985 г.158/III, внедрены 30.06.85 г.(дата, номер, поз. плана внедрения)на механическом заводе г.УстиноваНГ 5-404-83/1(датавнедрения, наименование предприятия, наименование и номер документао внедрении)

1. Вид внедренных результатов система виброакустической диагностики ВИАД05.
(комплекс, машина, система, прибор, инструмент, технология, методика, программа ЦВМ, сырье, материалы и т.д.)
2. Область и форма внедрения серийное производство
(производственный процесс-серийное, инструмент, технология, уникальное, или единичное производство, проектные разработки, научные исследования и т.п.)
3. Технологический уровень НИР неохраноспособная
(поданы заявки, получены положительные решения, авторские свидетельства, патенты, медали ВДНХ, и др., их №, дата)
1) Пономарев В.А. "Стохастические св-ва пар"
4. Публикации по материалам НИР метрического дискретного преобразования Фурье"-Радиотехника и электроника, 1983, т.28, №8. 2) Пономарев В.А., Пономарева О.В. "Модификация ЛПФ для решения задач интерполяции и свертки функций" Радиотехника и электроника, 1984, т.29, №8, стр.115-125.

5. Эффект от внедрения повышение качества продукции, улучшение условий труда
(экономия материальных ресурсов, рост производительности труда, повышение качества продукции, окупаемости, улучшение условий труда, механизация, оздоровление окружающей среды и т.д.)
6. Фактический годовой экономический эффект
- а) в целом по работе 278800 (двести семьдесят восемь тыс.) руб./год
(цифрами и прописью) восемьсот
- б) долевое участие Устиновского механического института в
в общей (расчетной) величине фондов поощрения : 15 000 руб.
(пятнадцать тысяч рублей) руб. (сумма цифрами и прописью)

Приложение: Расчет фактического годового экономического эффекта

Предприятие по форме Р 10 не отчитывается

От предприятия:

Начальник планово-экономической службы

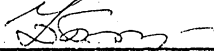


(И.О.Фамилия)

03.07.85

(дата)

Ответственный за внедрение



(И.О.Фамилия)

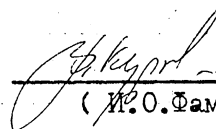
03.07.85

(Дата)

Другие службы:

От организации (вуза):

Начальник НИИ (НИС)

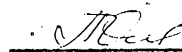


/В.И.Курко/

(И.О.Фамилия)

(дата)

Ответственный за внедрение






/О.В.Пономарева/

(И.О.Фамилия)

(дата)

Другие службы, руководитель и ответственные исполнители темы:

Руководитель  /В.А.Пономарев/
лаб.ВиАДО
Вед. инженер  /О.С.Языков/
Инженер  /С.А.Исупов/

5. Эффект от внедрения повышение качества продукции, улучшение условий труда
(экономия материальных ресурсов, рост производительности труда,
повышение качества продукции, окупаемости, улучшение условий труда,
механизация, оздоровление окружающей среды и т.д.)

6. Фактический годовой экономический эффект

а) в целом по работе: 75 660 (семьдесят пять тыс. шестьсот руб/год
(цифрами и прописью) шестьдесят)

б) долевое участие Устиновского механического института
(наименование вуза)

в общей (расчетной) величине фондов поощрения: 15000 руб. (пят-
надцать тысяч) руб.
и прописью)

Приложение: Расчет фактического годового экономического эффекта

Предприятие по форме Р 10 не учитывается.

От предприятия:

Начальник плано-экономи-
ческой службы

В.И. Курко
(И.О.Фамилия)

(дата)

Ответственный за внедрение

В.И. Курко
(И.О.Фамилия)

03.07.85

(дата)

Другие службы:

От организации (вуза):

Начальник НИИ (НИС)

В.И. Курко
(И.О.Фамилия)

(дата)

Ответственный за внедрение

О.В. Пономарева
(И.О.Фамилия)

(дата)

Другие службы, руководитель
и ответственные исполните-
ли темы:

Руководитель В.А. Пономарев
лаб. ВиАДО
Вед. инженер О.С. Языков
Инженер С.А. Исупов

УТВЕРЖДАЮ



по научной работе ИМИ

Н. А. Корякин

1990 г.

УТВЕРЖДАЮ



Зам. заместителя по "ИЖМАШ"

И. Белоцерковский

1990 г.

АКТ

от 18.05.90г. 01

о приемке системы "ДИАССА 7.1"

Основание: Протокол испытаний N1, N2

Составлен комиссией в составе:

Председатель Зам. начальника отд. 40 Б. М. Зорин

Члены комиссии: 1. Ст. научный сотрудник лав. ВИАДО О. В. Пономарева
 2. Нач. КБ-14 отд. 40 А. А. Ожегов
 3. Инженер-конструктор отд. 40 В. А. Давыдов
 4. М. н. с. лав. Виадо Исупов С. А.

Комиссия провела в период с 16 апреля по 19 апреля 1990 г.
 приемку системы "ДИАССА 7.1", выполненной в соответствии с договором
 N8008, Доп. соглашением N8008/1 _____

Комиссии были предъявлены:

1. Документация согласно возможности эксплуатационных документов
2. Микро-ЭВМ ДИАССА 7.1 на базе микро-ЭВМ "МС1201.01"
3. Электрофицированная пиццущая машинка ЭУМ-23
4. Фотосчитыватель FS1501
5. Перфоратор ленточный ПЛ150М
6. Дисплей РИН-609
7. Встроенный телевизионный адаптер ИМИ 2.791.000
8. Встроенный магнитофон "Маяк-231-стерео"

9. АЦП

10. Переносной магнитофон "Россия-211-1"

Рассмотрев предъявленные материалы, комиссия признала их достаточными для проведения приемки автоматизированной системы испытаний "ДИАССА 7.1" для испытаний изделий 9-А-4071К.

Заключение комиссии:

Комиссия постановила принять систему "ДИАССА 7.1" для периодических и исследовательских испытаний изделия 9А-4071К и исследовательских испытаний изделия 9А-76В в объеме 150 циклов.

Рекомендации комиссии:

- повышение помехоустойчивости работы с системой требует доработки датчиков с точки зрения условий их эксплуатации и стыковки их с ЭВМ
- расширение функциональных возможностей системы требует перехода на микро-ЭВМ типа ЕС1842 или иных совместимых с IBM, имеющих "Винчестер".

Приложения: 1. Протокол испытаний N1
2. Протокол испытаний N2

Председатель комиссии

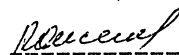


Б. М. Зорин

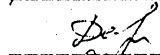
Члены комиссии:



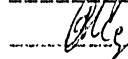
О. В. Пономарева



А. А. Ожегов



В. А. Давыдов



С. А. Исупов